
Prefazione

L'uso dei modelli matematici ha assunto un ruolo di primaria importanza in moltissimi campi: dalla meteorologia alla descrizione sintetica di reazioni negli impianti chimici, dalla elaborazione di dati relativi a sistemi finanziari, allo studio di popolazione biologiche. Questi sono solo alcuni casi in cui anche il comune cittadino (e non solo l'esperto del settore) viene suo malgrado coinvolto nel dibattito, se non addirittura nella scelta, tra impostazioni alternative, allo scopo di mantenere l'evoluzione dei fenomeni descritti da tali modelli entro limiti ritenuti accettabili. È dunque auspicabile che almeno elementari conoscenze delle proprietà dei modelli matematici diventino un patrimonio il più possibile diffuso tra gli abitanti del “villaggio globale”.

Quando la modellazione matematica si riferisce a fenomeni dipendenti dal tempo, la terminologia moderna precisa la nozione di **modello matematico** definendo la nozione di **sistema dinamico**.

Il termine **discreto**, che compare nel titolo, indica la natura dei modelli che prenderemo in esame: a partire da un numero finito di istanti in cui si hanno informazioni sul fenomeno in esame, tali modelli ne descrivono l'evoluzione futura mediante i valori assunti in un insieme discreto di tempi successivi, detti **passi temporali** (ad esempio, i multipli interi positivi di una fissata unità di tempo), ma non la descrizione per tutti i valori del tempo considerato come una grandezza **continua** o, più precisamente, **analogica**.

Assai spesso nelle applicazioni anche le grandezze osservate risultano essere discrete (si usa dire “quantizzate”) per le caratteristiche degli strumenti di misura e per le manipolazioni di tipo elettrico o elettronico che, nell'attuale fase dello sviluppo tecnologico, inevitabilmente sono effettuate su tali grandezze. Tuttavia, in molti casi pratici la quantizzazione ha un ordine di grandezza così ridotto da poter essere trascurata; per questo motivo supporremo spesso che le grandezze in esame possano assumere una gamma continua di valori.

Negli anni recenti si è rivolta particolare attenzione allo studio dei **sistemi dinamici non lineari**, ed in questo campo si sono sviluppate nuove

idee ed utili paradigmi interpretativi che hanno contribuito ad una maggiore comprensione di numerosi problemi sia teorici che di rilevante interesse applicativo. Per comprendere cosa si intende con il termine **non lineare**, è utile ricordare cosa si intende in matematica con il termine **problema lineare**: un problema si dice lineare se vi è una proporzionalità tra i dati in ingresso (input) e gli effetti risultanti (output), e alla somma di più cause corrisponde la somma dei rispettivi effetti.

In generale si sanno risolvere in modo soddisfacente i problemi lineari, o perlomeno si sanno approssimare bene numericamente, ma i problemi fisici, chimici, biologici, economici, demografici e dell'ingegneria, sono più correttamente descritti da **modelli non lineari**.

Purtroppo si sa dire molto meno sulle soluzioni dei problemi non lineari, e tali soluzioni sono spesso caratterizzate da un comportamento complesso, instabilità e dipendenza sensibile dai dati iniziali, al punto che in taluni casi viene descritto come **caos**.

Con questa suggestiva, ma in parte fuorviante, espressione si intende la possibilità di avere evoluzioni estremamente complicate, anche a partire da semplici modelli deterministici non lineari: questo produce l'apparente paradosso per cui, in tali casi, la estrema sensibilità nella dipendenza dai dati iniziali (sempre affetti da errori sperimentali) rende assai debole la speranza di effettuare previsioni dettagliate di lungo periodo. Tale situazione è ben illustrata dall'esempio della meteorologia, ferma restando la possibilità oggi realizzata di affidabili previsioni nel breve periodo.

Queste considerazioni non mettono in discussione l'efficacia di tali metodiche ma sono un invito a ricordarne i limiti, al fine di non estrapolare a lungo termine gli effetti dedotti dall'analisi dei modelli non lineari, ed a tenere conto delle instabilità ad essi intrinsecamente associata.

Questo volume nasce da una precisa esigenza didattica: intende fornire una presentazione elementare ed autocontenuta della modellistica matematica discreta con una introduzione all'analisi dei sistemi dinamici discreti.

Si illustrano alcuni metodi qualitativi della modellazione matematica, discutendo cosa si intende per soluzione di tali modelli mediante semplici esempi (Capitolo 1); sono presentate alcune tecniche di soluzione di equazioni alle differenze lineari (Capitolo 2) e sono studiate le proprietà qualitative delle soluzioni e la loro struttura nel caso di modelli non lineari, con particolare riferimento alle proprietà di stabilità (Capitoli 3 e 4).

I metodi e le tecniche per lo studio dei modelli discreti sono dispersi nella letteratura matematica, economica, biologica, demografica e dell'ingegneria. Qui si è cercato di presentare la materia in modo unitario, sviluppando dapprima esempi e motivazioni, per poi affrontare lo studio dei modelli lineari e successivamente di quelli non lineari, cercando di unificare il punto di vista modellistico con quelli dell'Analisi Matematica, della Teoria dei Sistemi, dell'Algebra Lineare, del Calcolo delle Probabilità, del Calcolo numerico e della Matematica Finanziaria.

Il caso vettoriale, più tecnico come notazioni e metodi, è presentato a parte negli ultimi due capitoli (Capitoli 5 e 6), limitandone la trattazione esclusivamente ai problemi lineari.

L'esposizione della teoria è resa graduale dalla proposta di alcuni esercizi di difficoltà crescente. Altri esercizi di riepilogo sono raggruppati in apposite sezioni. Le soluzioni di gran parte degli esercizi sono descritte in dettaglio nel Capitolo 7. La Teoria è accompagnata da algoritmi e suggerimenti per effettuare prove numeriche e simulazioni al computer.

A quest'ultimo proposito, ricordiamo che i sistemi dinamici discreti sono essenzialmente iterazioni di funzioni, e che i computer eseguono con molta efficienza le iterazioni di algoritmi. Invitiamo dunque il lettore ad affrontare personalmente lo svolgimento degli esercizi sia mediante il calcolo manuale (quando è possibile), sia cercando le proprietà qualitative con il metodo grafico ed i risultati teorici del testo, sia effettuando simulazioni numeriche con un personal computer.

Attualmente sono disponibili software particolarmente adatti sia alla iterazione di calcoli simbolici sia alla gestione della grafica. Questo rende possibile, mediante opportune iterazioni di polinomi, generare sul monitor quelle immagini affascinanti ed intriganti denominate frattali anche senza conoscere gli aspetti più tecnici della sottostante Teoria Geometrica della Misura.

Nel testo si forniscono comunque (Capitolo 4 ed Appendice F) alcune nozioni di base per lo studio di tali enti e la definizione di dimensione frattale e di misura di un insieme frattale.

Per tutti gli esempi ed esercizi affrontati si invita il lettore a porre l'attenzione non solo sulle particolarità algebriche del **problema formalizzato**, quanto sul fenomeno modellizzato, il significato di **modello matematico**, il **dominio dei parametri** in cui il modello è sensato, il **valore predittivo** del modello e la sua **computabilità** a partire da dati sperimentali affetti da **inevitabili errori di misura**.

In questa prospettiva la matematica svolge un ruolo di retroazione tra lo studio e la formulazione di modelli descrittivi e predittivi. Qualora si pervenga ad un adeguato livello di astrazione e di rigore nella formulazione di tali modelli, si possono sviluppare idee innovative che permettono di comprendere ed unificare problemi applicativi diversi attraverso l'identificazione di strutture generali e l'elaborazione di teorie di ampia applicabilità.

Ringraziamo Maurizio Grasselli, Stefano Mortola e Antonio Cianci per gli utili suggerimenti e le osservazioni al testo e Irene Sabadini per l'accurata redazione delle numerose figure.

Milano, giugno 2002

Gli Autori

Questa seconda edizione del volume si avvale dell'esperienza didattica maturata nel corso di Modelli Dinamici Discreti tenuto in questi anni presso il Politecnico di Milano: numerose correzioni sono state apportate, la presentazione di molti esempi ed esercizi è stata migliorata ed ampliata; infine è stato inserito un nuovo capitolo su matrici positive, grafi e loro proprietà utili nell'analisi di reti e motori di ricerca.

Vogliamo esprimere un sentito ringraziamento a Francesca Bonadei per l'incoraggiamento ed il supporto forniti, ad Alberto Perversi per la valida consulenza sulla gestione della grafica ed agli studenti del corso di studi in Ingegneria Matematica per l'entusiasmo dimostrato e le utili osservazioni.

Milano, luglio 2008

Gli Autori

Nella terza edizione è stata aggiornata la trattazione di vari argomenti, sono stati inseriti nuovi esempi ed esercizi e la bibliografia è stata ampliata per fornire indicazioni al lettore interessato ad approfondire lo studio dei sistemi dinamici discreti.

Nella attuale organizzazione del testo i capitoli 5, 6 e 7 sono dedicati al caso vettoriale, conseguentemente le soluzioni svolte degli esercizi proposti sono raccolte nel Capitolo 8.

Ringraziamo Debora Sesana per la revisione del materiale iconografico.

Questa edizione è pubblicata sia in lingua italiana che in lingua inglese.

Milano, giugno 2013

Ernesto Salinelli, Franco Tomarelli

Modelli Dinamici Discreti

Salinelli, E.; Tomarelli, F.

2014, XVI, 401 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-5503-2