

Indice

1.	Elementi di analisi delle matrici	1
1.1	Spazi vettoriali	1
1.2	Matrici	3
1.3	Operazioni su matrici	4
1.3.1	Inversa di una matrice	6
1.3.2	Matrici e trasformazioni lineari	7
1.4	Traccia e determinante	7
1.5	Rango e nucleo di una matrice	8
1.6	Matrici di forma particolare	9
1.6.1	Matrici diagonali a blocchi	9
1.6.2	Matrici trapezoidali e triangolari	10
1.6.3	Matrici a banda	10
1.7	Autovalori e autovettori	11
1.8	Trasformazioni per similitudine	13
1.9	La decomposizione in valori singolari (SVD)	16
1.10	Prodotto scalare e norme in spazi vettoriali	17
1.11	Norme matriciali	20
1.11.1	Relazione tra norme e raggio spettrale di una matrice	24
1.11.2	Successioni e serie di matrici	25
1.12	Matrici definite positive, matrici a dominanza diagonale e M-matrici	27
1.13	Esercizi	29
2.	I fondamenti della matematica numerica	33
2.1	Buona posizione e numero di condizionamento di un problema	33
2.2	Stabilità di metodi numerici	37
2.2.1	Le relazioni tra stabilità e convergenza	41
2.3	Analisi a priori e a posteriori	42
2.4	Sorgenti di errore nei modelli computazionali	44
2.5	Rappresentazione dei numeri sul calcolatore	46

2.5.1	Il sistema posizionale	46
2.5.2	Il sistema dei numeri floating-point	47
2.5.3	Distribuzione dei numeri floating-point	50
2.5.4	Aritmetica IEC/IEEE	51
2.5.5	Arrotondamento di un numero reale nella sua rappresentazione di macchina	52
2.5.6	Operazioni di macchina effettuate in virgola mobile	53
2.6	Esercizi	56
3.	Risoluzione di sistemi lineari con metodi diretti	59
3.1	Analisi di stabilità per sistemi lineari	60
3.1.1	Il numero di condizionamento di una matrice	60
3.1.2	Analisi a priori in avanti	62
3.1.3	Analisi a priori all'indietro	64
3.1.4	Analisi a posteriori	65
3.2	Risoluzione di sistemi triangolari	66
3.2.1	Aspetti implementativi dei metodi delle sostituzioni	67
3.2.2	Analisi degli errori di arrotondamento	69
3.2.3	Calcolo dell'inversa di una matrice triangolare	70
3.3	Il metodo di eliminazione gaussiana (MEG) e la fattorizzazione LU	71
3.3.1	Il MEG interpretato come metodo di fattorizzazione	74
3.3.2	L'effetto degli errori di arrotondamento	77
3.3.3	Aspetti implementativi della fattorizzazione LU	78
3.3.4	Forme compatte di fattorizzazione	79
3.4	Altri tipi di fattorizzazione	81
3.4.1	Fattorizzazione LDM^T	81
3.4.2	Matrici simmetriche e definite positive: fattorizzazione di Cholesky	82
3.4.3	Matrici rettangolari: fattorizzazione QR	84
3.5	Pivoting	88
3.6	Il calcolo dell'inversa	93
3.7	Sistemi a banda	93
3.7.1	Matrici tridiagonali	95
3.7.2	Aspetti computazionali	96
3.8	Sistemi a blocchi	98
3.8.1	Fattorizzazione LU a blocchi	99
3.8.2	Inversa di una matrice a blocchi	99
3.8.3	Sistemi tridiagonali a blocchi	100
3.9	Accuratezza della soluzione generata dal MEG	102
3.10	Calcolo approssimato di $K(A)$	104
3.11	Aumento dell'accuratezza	106
3.11.1	Lo scaling	106
3.11.2	Raffinamento iterativo	107

3.12	Sistemi indeterminati	108
3.13	Esercizi	112
4.	Risoluzione di sistemi lineari con metodi iterativi	115
4.1	Convergenza di metodi iterativi	115
4.2	Metodi iterativi lineari	118
4.2.1	I metodi di Jacobi, di Gauss-Seidel e del rilassamento	119
4.2.2	Risultati di convergenza per i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel	121
4.2.3	Risultati di convergenza per il metodo di rilassamento	123
4.2.4	Il caso delle matrici a blocchi	124
4.2.5	Forma simmetrica dei metodi di Gauss-Seidel e SOR	125
4.2.6	Aspetti implementativi	126
4.3	Metodi di Richardson stazionari e non stazionari	128
4.3.1	Analisi di convergenza per il metodo di Richardson	129
4.3.2	Matrici di preconditionamento	131
4.3.3	Il metodo del gradiente	139
4.3.4	Il metodo del gradiente coniugato	143
4.3.5	Il metodo del gradiente coniugato preconditionato	148
4.4	Metodi basati su iterazioni in sottospazi di Krylov	150
4.4.1	Il metodo di Arnoldi per sistemi lineari	154
4.4.2	Il metodo GMRES	156
4.5	Criteri di arresto per metodi iterativi	159
4.5.1	Un criterio basato sul controllo dell'incremento . . .	160
4.5.2	Un criterio basato sul controllo del residuo	161
4.6	Esercizi	162
5.	Approssimazione di autovalori e autovettori	165
5.1	Localizzazione geometrica degli autovalori	165
5.2	Analisi di stabilità e condizionamento	168
5.2.1	Stime a priori	168
5.2.2	Stime a posteriori	172
5.3	Il metodo delle potenze	174
5.3.1	Calcolo dell'autovalore di modulo massimo	174
5.3.2	Calcolo dell'autovalore di modulo minimo	178
5.3.3	Aspetti computazionali e di implementazione	179
5.4	Metodi basati sulle iterazioni QR	184
5.5	L'iterazione QR nella sua forma di base	185
5.6	Il metodo QR per matrici in forma di Hessenberg	187
5.6.1	Matrici di trasformazione di Householder e di Givens	188
5.6.2	Riduzione di una matrice in forma di Hessenberg . .	191
5.6.3	Fattorizzazione QR di una matrice in forma di Hessenberg	193

5.6.4	Aspetti implementativi del metodo Hessenberg-QR	194
5.6.5	Implementazione delle matrici di trasformazione	197
5.6.6	Il metodo QR con shift	200
5.7	Metodi per il calcolo di autovalori di matrici simmetriche	203
5.7.1	Il metodo di Jacobi	203
5.7.2	Il metodo delle successioni di Sturm	207
5.8	Esercizi	212
6.	Risoluzione di equazioni e sistemi non lineari	215
6.1	Condizionamento di un'equazione non lineare	216
6.2	Un approccio geometrico per la ricerca delle radici	218
6.2.1	Il metodo di bisezione	219
6.2.2	I metodi delle corde, secanti, Regula Falsi e Newton	221
6.3	Il metodo delle iterazioni di punto fisso	228
6.3.1	Risultati di convergenza per alcuni metodi di punto fisso	232
6.4	Radici di polinomi algebrici	233
6.4.1	Il metodo di Horner e la deflazione	233
6.4.2	Il metodo di Newton-Horner	235
6.4.3	Il metodo di Muller	238
6.5	Criteri d'arresto	242
6.6	Tecniche di post-processing per metodi iterativi	244
6.6.1	La tecnica di accelerazione di Aitken	245
6.6.2	Tecniche per il trattamento di radici multiple	248
6.7	Risoluzione di sistemi di equazioni non lineari	250
6.7.1	Il metodo di Newton e le sue varianti	250
6.7.2	Metodi di Newton modificati	252
6.7.3	Metodi quasi-Newton e metodi ibridi o poli-algoritmi	256
6.7.4	Metodi quasi-Newton di tipo secanti	256
6.7.5	Metodi di punto fisso	259
6.8	Esercizi	262
7.	Interpolazione polinomiale	265
7.1	Interpolazione polinomiale di Lagrange	265
7.1.1	L'errore di interpolazione	267
7.1.2	Limiti dell'interpolazione polinomiale su nodi equispaziati e controesempio di Runge	268
7.1.3	Stabilità dell'interpolazione polinomiale	270
7.2	Forma di Newton del polinomio interpolatore	271
7.2.1	Alcune proprietà delle differenze divise di Newton	273
7.2.2	L'errore di interpolazione usando le differenze divise	276
7.3	Interpolazione composta di Lagrange	277
7.4	Interpolazione di Hermite	277

7.5	L'estensione al caso bidimensionale	280
7.5.1	Interpolazione polinomiale semplice	280
7.5.2	Interpolazione polinomiale composta	281
7.6	Funzioni spline	285
7.6.1	Spline cubiche interpolatorie	286
7.6.2	B-spline	291
7.7	Curve spline di tipo parametrico	294
7.8	Esercizi	296
8.	Integrazione numerica	299
8.1	Formule di quadratura interpolatorie	300
8.1.1	La formula del punto medio o del rettangolo	301
8.1.2	La formula del trapezio	303
8.1.3	La formula di Cavalieri-Simpson	305
8.2	Formule di Newton-Cotes	306
8.3	Formule di Newton-Cotes composite	313
8.4	L'estrapolazione di Richardson	315
8.4.1	Il metodo di integrazione di Romberg	317
8.5	Integrazione automatica	319
8.5.1	Algoritmi di integrazione non adattivi	320
8.5.2	Algoritmi di integrazione adattivi	322
8.6	Estensioni	326
8.6.1	Integrali di funzioni con discontinuità di tipo salto	326
8.6.2	Integrali di funzioni illimitate su intervalli limitati	327
8.6.3	Integrali su intervalli illimitati	329
8.7	Integrazione numerica in più dimensioni	331
8.7.1	Il metodo della formula di riduzione	331
8.7.2	Quadrature composite bidimensionali	333
8.8	Esercizi	336
9.	I polinomi ortogonali nella teoria dell'approssimazione	339
9.1	Approssimazione di funzioni con serie generalizzate di Fourier	339
9.1.1	I polinomi di Chebyshev	341
9.1.2	I polinomi di Legendre	342
9.2	Integrazione ed interpolazione Gaussiana	343
9.3	Integrazione ed interpolazione con nodi di Chebyshev	347
9.4	Integrazione ed interpolazione con nodi di Legendre	351
9.5	Integrazione Gaussiana su intervalli illimitati	353
9.6	Programmi per l'implementazione delle formule Gaussiane	355
9.7	Approssimazione di una funzione nel senso dei minimi quadrati	357
9.7.1	I minimi quadrati discreti	357
9.8	Il polinomio di migliore approssimazione	360

9.9	I polinomi trigonometrici di Fourier	361
9.9.1	La trasformata rapida di Fourier	366
9.10	Approssimazione delle derivate di una funzione	368
9.10.1	Metodi alle differenze finite classiche	369
9.10.2	Differenze finite compatte	371
9.10.3	La derivata pseudo-spettrale	374
9.11	Esercizi	375
10.	Risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie	377
10.1	Il problema di Cauchy	377
10.2	Metodi numerici ad un passo	380
10.3	Analisi dei metodi ad un passo	382
10.3.1	La zero-stabilità	383
10.3.2	Analisi di convergenza	385
10.3.3	L'assoluta stabilità	388
10.4	Le equazioni alle differenze	391
10.5	I metodi a più passi (o multistep)	396
10.5.1	I metodi di Adams	400
10.5.2	I metodi BDF	402
10.6	Analisi dei metodi multistep	402
10.6.1	Consistenza	403
10.6.2	Le condizioni delle radici	404
10.6.3	Analisi di stabilità e di convergenza per i metodi multistep	405
10.6.4	L'assoluta stabilità nei metodi multistep	407
10.7	Metodi predictor-corrector	410
10.8	Metodi Runge-Kutta	417
10.8.1	Derivazione di un metodo Runge-Kutta esplicito	420
10.8.2	Adattività del passo per i metodi Runge-Kutta	420
10.8.3	Regioni di assoluta stabilità per i metodi Runge-Kutta	423
10.9	Il caso dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie	424
10.10	I problemi stiff	426
10.11	Esercizi	428
11.	Approssimazione di problemi ai limiti	433
11.1	Un problema modello	433
11.2	Il metodo delle differenze finite	435
11.2.1	Analisi di stabilità con il metodo dell'energia	436
11.2.2	Analisi di convergenza	440
11.2.3	Le differenze finite per problemi ai limiti a coefficienti variabili	441
11.3	Il metodo di Galerkin	442
11.3.1	Formulazione debole di problemi ai limiti	442

11.3.2	Una breve introduzione alle distribuzioni	444
11.3.3	Proprietà del metodo di Galerkin	446
11.3.4	Analisi del metodo di Galerkin	447
11.3.5	Il metodo degli elementi finiti	449
11.3.6	Aspetti implementativi	454
11.4	Problemi di diffusione-trasporto a trasporto dominante . . .	457
11.5	Esercizi	463
12.	Problemi ai valori iniziali e ai limiti di tipo parabolico e iperbolico	465
12.1	L'equazione del calore	465
12.2	Approssimazione a differenze finite dell'equazione del calore	468
12.3	Approssimazione ad elementi finiti dell'equazione del calore	470
12.3.1	Analisi di stabilità per il θ -metodo	472
12.4	Metodi a elementi finiti spazio-temporali per l'equazione del calore	478
12.5	Equazioni iperboliche: un problema di trasporto scalare . .	482
12.6	Sistemi di equazioni iperboliche lineari	484
12.6.1	L'equazione delle onde	486
12.7	Il metodo delle differenze finite per equazioni iperboliche . .	487
12.7.1	Discretizzazione dell'equazione scalare	488
12.8	Analisi dei metodi alle differenze finite	490
12.8.1	Consistenza	490
12.8.2	Stabilità	491
12.8.3	La condizione CFL	491
12.8.4	Analisi di stabilità alla von Neumann	494
12.9	Dissipazione e dispersione	497
12.10	Approssimazione ad elementi finiti di equazioni iperboliche	502
12.10.1	Discretizzazione spaziale con elementi finiti continui e discontinui	502
12.10.2	Discretizzazione temporale	505
12.11	Esercizi	508
	Riferimenti bibliografici	511
	Indice dei programmi MATLAB	519
	Indice analitico	523

Matematica Numerica

Quarteroni, A.; Sacco, R.; Saleri, F.; Gervasio, P.

2014, XVIII, 542 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-5643-5