

Le incertezze nelle misure

In questo capitolo vengono presentati i vari tipi di incertezza, che si riscontrano nella misura di una grandezza fisica. Viene proposto il modo, in cui si presenta una misura, e vengono catalogati i vari tipi di incertezza: casuale, sistematica di lettura e di accuratezza.

Vengono presentati i modi, in cui si combinano tra loro, per fornire l'incertezza totale.

Definire le categorie ed etichettare le incertezze è in stretta connessione con le indicazioni delle proprietà degli strumenti utilizzati, per i quali si fornisce anche una descrizione generale.

2.1 Incertezza nella misura di una grandezza

La fisica si propone di misurare le grandezze, che significa assegnare un numero x , che indichi il rapporto rispetto ad una grandezza omogenea, universalmente riconosciuta e definita come campione $\{X\}$, e la grandezza da misurare X . Tale numero è dato dalla relazione:

$$x = \frac{X}{\{X\}}.$$

Spesso tale operazione viene sottintesa e si parla indistintamente della *grandezza* X o della sua *misura* x . Di seguito distingueremo, ove necessario e per non creare confusione, se parliamo della grandezza o della sua misura, indicando in corsivo maiuscolo la grandezza ed in corsivo minuscolo la sua misura.

L'*incertezza* (detta anche *errore*) nella fisica classica è data da limitazioni *strumentali*, e dalla difficoltà nell'isolare completamente un fenomeno fisico, al punto da evitare variazioni della misura, dette "*casuali*": queste ultime per ora le accettiamo per il loro significato etimologico, come dovute al caso: non siamo in grado di evitarle e non ne conosciamo l'origine.

Tali incertezze verranno ben catalogate e definite sulla base di una particolarità: se compaiono con un certo valore, si ha la stessa probabilità, che si presentino con il segno meno o con il segno più rispetto al "valore vero" della grandezza.

L'avvento della fisica quantistica ha "limitato" ulteriormente le prospettive di riduzione delle incertezze, quando cerchiamo di conoscere la natura dal punto di vista microscopico.

Questa limitazione, può essere intuitivamente concepita nel mondo macroscopico, supponendo di essere privi di vista e di avere a disposizione solo il tatto, per studiare il moto di un corpo, che scivola su un piano inclinato.

Possiamo prendere una bilia collocarla in alto su un piano inclinato¹, ma per localizzarla nei tempi successivi, dobbiamo intervenire sul processo, a tentoni, perturbando il moto del corpo: siamo in grado di dare la posizione della bilia, in una porzione di spazio data dalle dimensioni delle nostre dita, nel fornire la velocità abbiamo tale limitazione. Inoltre non possiamo dire nulla sul suo moto successivo. Per poter studiare completamente il processo, dovremmo preparare di nuovo la misura nelle stesse condizioni iniziali, eppoi andare a "toccare", e ripetere le misure².

Questo limite naturale viene formalizzato in modo matematicamente rigoroso dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che afferma che l'incertezza (δ) sulla posizione x di un elettrone in un atomo e l'incertezza sulla sua quantità di moto p ($p = mv$ dove m è la massa dell'elettrone e v la velocità) risultano vincolate tra loro dalla relazione $\delta x \delta p \gtrsim h$, dove h è la costante di Planck. Se determiniamo con precisione la posizione di un corpo di massa m , quindi con incertezza $\delta x = 0$, avremo un'incertezza infinita δp sulla sua quantità di moto.

L'incertezza risulta essere inevitabile nell'osservazione delle leggi naturali, di conseguenza lo studio e la sua valutazione sono fondamentali, per fornire una descrizione quantitativa dei fenomeni.

In ogni situazione, o campo, una condizione imprescindibile per un fisico, o un tecnologo, è non ritenere attendibile una misura, che non sia accompagnata dall'incertezza.

Questo certamente sembrerà agli studenti in contrasto, con quanto si studia nei corsi di fisica, dove si assume che ogni valore dato per una grandezza, da usare negli esercizi, sia preciso³.

Useremo come simbolo per l'incertezza la lettera minuscola delta (δ) dell'alfabeto greco, attribuendo a tale simbolo la totalità delle incertezze e chiamandola appunto *incertezza totale*. L'uso della lettera minuscola presuppone, che tale incertezza sia sufficientemente piccola.

¹ Come ogni esempio quantistico, nel tentativo di chiarirlo con un modello "classico" si incorre in qualche, diciamo, licenza didattica, in realtà anche la preparazione dello stato iniziale sarebbe indeterminata in quanto soggetta al principio di indeterminazione di Heisenberg.

² Precisamente si dovrà parlare di insiemi statistici.

³ Si considerano solo arrotondamenti sulla base del numero di cifre significative.

La misura di una grandezza fisica *deve essere presentata* nel modo seguente:

$$x = x_{ms} \pm \delta x .$$

La misura x di una grandezza X va riportata con

- un valore numerico, che riteniamo la *migliore stima* (il pedice ms sta per migliore stima), che fornisce il rapporto della grandezza rispetto ad un campione di riferimento,
- e corredata di $\pm$ un'incertezza, espressa con un numero in valore *assoluto*, etichettata con il simbolo δ e detta anche *incertezza assoluta totale*, che fornisce il rapporto dell'incertezza rispetto ad un campione di riferimento.

Significa affermare, che la nostra misura x della grandezza X possa essere compresa nell'intervallo

$$x_{ms} - \delta x \leq x \leq x_{ms} + \delta x .$$

Questi valori numerici sono riferiti all'unità di misura della grandezza omogenea (multipli o sottomultipli) e le unità di misura devono essere concordi.

Per esempio la misura di una lunghezza si riporterà come:

$$l = 5.00 \pm 0.04 \text{ m (}\mathbf{\text{si}}\mathbf{)};$$

oppure

$$l = 500 \pm 4 \text{ cm (}\mathbf{\text{si}}\mathbf{)}.$$

Una misura riportata come segue:

$$l = 5.00 \text{ m} \pm 4 \text{ cm (}\mathbf{\text{no}}\mathbf{)},$$

non risulta accettabile, perché meno lineare nella scrittura, nella lettura, nonché soprattutto può portare a confusioni nei calcoli successivi.

Abbiamo attribuito al simbolo delta (δ) il significato di incertezza *totale* in valore assoluto. Vediamo di cosa si compone questo totale e che cosa si intende per l'intervallo individuato da $\pm \delta x$.

Per chiarire, quali incertezze contribuiscono e come vanno interpretate, seguiamo un approccio mediante modi e metodi di misura. Partiamo dal caso di una misura diretta, eppoi considereremo altre situazioni.

2.2 Misure dirette ed incertezze: misura singola

Iniziamo con il descrivere le *misure dirette* di grandezze fisiche ed anticipare alcune considerazioni generali. In seguito ci interesseremo alle *misure indirette* e di come si propagano su di esse le incertezze delle misure dirette.

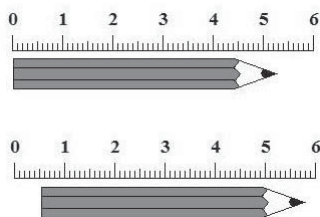
Incertezze di lettura da scale graduate

Partiamo dalla misura della grandezza più semplice e comune: la lunghezza. Cercheremo di definire nel dettaglio i vari tipi di incertezze, partendo da situazioni semplici e frequenti in un laboratorio.

Supponiamo di voler misurare la lunghezza di una matita, mediante l'utilizzo di un regolo calibrato (per ora per il termine calibrato intendiamo certificato, che sia equivalente al campione di riferimento).

Si parla di misura *diretta* della grandezza x , quando viene effettuata mediante confronto diretto con regoli o mediante l'utilizzo di strumenti sensibili alla grandezza da misurare. Per esempio la misura della velocità di un'auto risulta diretta, se utilizziamo il tachimetro a bordo.

Figura 2.1 Misura diretta di una matita con un regolo: nell'immagine superiore, allineando le parti iniziali sia del regolo che della matita. Nell'immagine inferiore senza allineamento delle parti iniziali.



Si parla invece di misura *indiretta*, quando viene dedotta grazie a leggi (relazioni funzionali), che descrivono una relazione della grandezza con altre, misurate direttamente, o a loro volta anche indirettamente.

Per tornare all'esempio dell'auto, possiamo fornire la misura della velocità (media) di un'auto, mediante il rapporto tra la misura diretta dello spazio percorso, effettuata con un regolo, e la misura diretta, effettuata con un cronometro, dell'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.

Ci proponiamo per ora di stimare l'incertezza nella misura diretta. Prendiamo l'esempio riportato in Fig. 2.1 mediante l'utilizzo di un regolo. La quantità minima, graduata su una scala è detta *risoluzione* o *unità fondamentale di lettura* dello strumento (abbreviato anche come u.f.).

Nell'esempio in Fig. 2.1 abbiamo una risoluzione di un millimetro. Avremo un'incertezza dovuta alla lettura di questa scala, detta *incertezza di lettura* o *di risoluzione*.

Per chiarire come comportarci, osserviamo il caso in alto in Fig. 2.1, dove supponiamo di poter appoggiare le parti iniziali del regolo e della matita su una superficie perfetta, ortogonale ad essi. Quindi la parte iniziale della matita, corrisponde a quella del regolo, su una superficie ideale per giunta, mentre la parte finale della matita (la punta) si potrebbe trovare tra due tacche, o più vicina ad una delle due, o ancora proprio su una tacca.

Ed ecco già l'intoppo della soggettività dell'operatore, mentre si parla sempre della fisica come scienza oggettiva.

Per venirne fuori, bisogna stabilire delle regole, che vengano accettate in modo universale e quindi siano, in quanto tali non vincolate ad una decisione del singolo soggetto.

Nel caso in cui la punta della matita si trovi tra due tacche del regolo, risulta una *convenzione conservativa* fornire come incertezza di lettura metà dell'unità fondamentale (metà della risoluzione).

Una situazione particolare sarebbe quella, in cui la punta finisce proprio sulla tacca, ma anche in questo caso rimarrebbe un'indeterminazione sullo spessore della tacca in sé.

Se si ritiene di poter risolvere sottomultipli dell'unità fondamentale, si può fornire una stima di buon senso, del valore e dell'incertezza. Questo può essere il caso in cui l'unità fondamentale è ben larga e distinguibile.

Usiamo la convenzione che l'incertezza di lettura è data da metà della risoluzione, sarà uniforme a quanto vedremo per i sistemi digitali, e più pratica anche per l'analisi di dati misurati con lo stesso strumento⁴.

Forniamo quindi la misura l della lunghezza della matita, per l'immagine superiore in Fig. 2.1, dove la punta è in prossimità della tacca 53, nel modo seguente:

$$l = 53 \pm 0.5 \text{ mm} ,$$

precisando che l'*incertezza* è dovuta alla *risoluzione* dello strumento, o equivalentemente che è un'*incertezza di lettura*.

Nelle misure dirette l'incertezza di lettura è già fornita dal dato registrato, in quanto è evidente l'unità fondamentale: la lettura del valore 53 mm, è multiplo dell'unità fondamentale.

Nell'immagine superiore di Fig. 2.1 siamo sicuri, che l'inizio della matita corrisponda precisamente con lo zero del regolo. Ma ci si potrebbe anche trovare nella situazione dell'immagine inferiore in Fig. 2.1, per cui si ha un'incertezza anche sull'inizio.

L'incertezza della misura dipende non solo dallo strumento, ma anche dal modo, in cui viene condotta la misura.

Questo modo dipende dalle condizioni operative a seconda delle situazioni concrete, se avete un regolo, che non inizia precisamente con lo zero, non potete metterlo contro una parete o una superficie piana.

Ritorniamo sul secondo caso, quando affronteremo la propagazione delle incertezze (Cap. 4) nelle relazioni funzionali, in quanto otterremo la lunghezza della matita dalla differenza della lettura della posizione finale meno quella iniziale.

Se riusciamo a mettere regolo e matita contro una parete e misuriamo, dove si colloca la fine, allora possiamo parlare di misura diretta. Se invece possiamo solo misurare l'inizio (lettura x_1) e la fine della matita (lettura x_2), sono due misure dirette per entrambe le posizioni, ma per la lunghezza dovremo considerare la loro

⁴ Nella stima cosiddetta a priori, dell'incertezza, in fase preparatoria o progettuale dell'esperimento usiamo la risoluzione degli strumenti utilizzati per fornire l'incertezza a priori.

differenza, dalla quale ottenere “indirettamente” la lunghezza della matita secondo la relazione $l = x_2 - x_1$.

Quindi una misura diretta è solo quella effettuata per confronto diretto, o con uno strumento sensibile alla grandezza da misurare, che non richieda operazioni matematiche o relazioni funzionali.

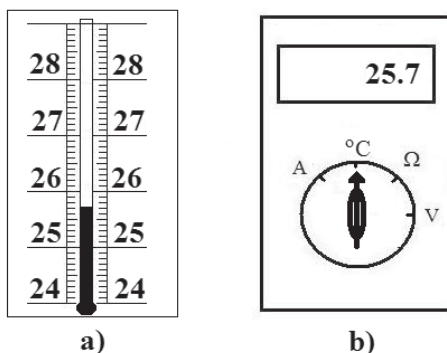
Incertezze di lettura da misure con visualizzatori

Abbiamo considerato lo strumento più semplice per chiarire alcuni argomenti relativi all’incertezza di lettura. Questi sistemi con lettura su scala graduata, vengono chiamati *sistemi analogici*. Oggi sono molto diffusi anche strumenti a “visualizzazione digitale”.

Per chiarire come comportarsi, mettiamo a confronto il sistema digitale con quello analogico. Prendiamo due sistemi, che misurino la stessa grandezza, uno con scala graduata, sistema analogico, l’altro con visualizzatore digitale.

Per esempio per la misura della temperatura in una stanza, prendiamo un termometro a mercurio (Fig. 2.2a) ed uno digitale (Fig. 2.2b).

Figura 2.2 Sistemi di misura più diffusi: **a)** scala graduata e **b)** visualizzatore digitale.



Si osserva per il caso del termometro analogico, che il livello di mercurio si colloca vicino alla tacca 25.7 °C, e non si è in grado di risolvere meglio tale osservazione. Presentiamo come incertezza di lettura la metà dell’unità fondamentale o risoluzione. Si riporterà quindi la misura della temperatura come:

$$T = 25.7 \pm 0.05 \text{ }^{\circ}\text{C} \text{ (misura con scala o strumento analogico)}.$$

Consideriamo ora il caso del visualizzatore digitale, sul quale si legge il valore 25.7 °C, l’unità fondamentale è, in questo caso, il minimo, che lo strumento riesce a risolvere, ovvero 0.1 °C, che non è altro che la risoluzione dello strumento.

Con gli strumenti digitali, risulta più accettabile la descrizione dell'incertezza di lettura, rispetto alla risoluzione. Se leggiamo $25.7\text{ }^{\circ}\text{C}$, questo valore potrebbe risultare a partire da un minimo $25.65\text{ }^{\circ}\text{C}$ ad un massimo $25.74\text{ }^{\circ}\text{C}$. Anche in questo caso risulterà opportuno riportare come misura:

$$T = 25.7 \pm 0.05\text{ }^{\circ}\text{C} \text{ misura con strumento digitale,}$$

in questo modo è stato incluso quasi tutto l'intervallo dei possibili valori, con motivati arrotondamenti, tenendo conto che per l'incertezza si fornisce un valore approssimato.

Quindi sia con lo strumento analogico, che con quello digitale, nel caso di una *misura diretta* e nel caso che si osservi *solo un valore* in lettura, si riporta come migliore stima il *valore letto* e come incertezza la *metà della risoluzione* strumentale. Questa incertezza, *strumentale di lettura*, è dovuta alla risoluzione dello strumento utilizzato.

Continuiamo ancora con l'osservazione della misura diretta con strumenti sensibili alla grandezza sotto osservazione, per introdurre di seguito le incertezze dette di accuratezza.

Incertezze di accuratezza

Nelle misure dirette di grandezze altre incertezze possono derivare dalla non *taratura* (o *calibrazione*) del regolo.

Problema che potrebbe scaturire per difetti di costruzione, per usura nel tempo, per utilizzi impropri e vari altri motivi. Questo tipo di incertezza è detta anche *strumentale* ma “*di accuratezza*”.

Per un regolo ci si potrebbe aspettare, che si sia dilatato o contratto.

Un esempio più semplice sarebbe il nostro termometro analogico. Cosa succede se tutto il sistema bulbo-capillare del termometro si abbassa rispetto alla scala graduata ⁵?

Ogni lettura di temperatura sarà falsata di un valore sempre positivo, quindi sempre con lo stesso segno.

Supponiamo di poter controllare, con un altro termometro, o con un processo attendibile e riproducibile (per esempio punto di fusione del ghiaccio e punto di ebollizione dell'acqua distillata) il termometro e notare che tutta la scala graduata risulta più in alto di $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Allora ad ogni nostra misura dovremmo sottrarre $2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Questo processo di “controllo” viene detto *calibrazione* o *taratura* dello strumento. E tali incertezze sono dette sistematiche di *accuratezza*.

⁵ Se osservate, p.e. i termometri di utilizzo domestico, il bulbo-capillare è vincolato a volte con semplici fili metallici.

Uno strumento scientifico, ben calibrato e ben funzionante, per costruzione deve avere un'incertezza di accuratezza inferiore e quindi trascurabile rispetto alla sua risoluzione.

Pensiamo al metro, assumeremo che, se la risoluzione è un mm, sicuramente l'incertezza sull'accuratezza, in quanto fornita dalla ditta per costruzione, sulla base di una calibrazione, sarà inferiore alla risoluzione e quindi trascurabile.

Per il termometro analogico, vale la stessa considerazione, ovvero assumeremo che l'incertezza di accuratezza sia inferiore all'incertezza di risoluzione-lettura.

Il problema dell'accuratezza risulta più articolato per sistemi elettronici o digitali, per i quali le case produttrici forniscono indicazioni sui manuali. Di solito sono fornite come incertezze percentuali e possono variare a seconda delle condizioni ambientali o degli intervalli di misura, in questo caso avremo l'indicazione di un intervallo, entro il quale può trovarsi la misura (comunque l'incertezza sarà sempre dello stesso segno).

Senza prolungarci troppo etichettiamo questo tipo di incertezza come η , possiamo trovarci nel caso, in cui abbiamo calibrato lo strumento, come per il termometro, mediante confronto, o con leggi fisiche di controllo per cui potremmo riportare l'incertezza di accuratezza come

$$+ \text{ oppure } - \eta,$$

dove individuiamo precisamente il segno.

O nel caso in cui, secondo quanto fornito dalla casa costruttrice, ci venga fornito un intervallo di incertezza, senza indicazione del segno, quindi avremo come descrizione:

$$\pm \eta.$$

Le incertezze di accuratezza possono derivare da deformazioni, usura, malfunzionamento degli strumenti e non si potrebbero rilevare, se non per confronto con altri strumenti ritenuti tarati (o calibrati).

Altre incertezze di accuratezza potrebbero derivare proprio dalla lettura sbagliata dell'*operatore*.

Vedremo come catalogare le incertezze sulla base di come si presentano, o delle loro proprietà, piuttosto che dal soggetto, che le potrebbe determinare. L'operatore potrebbe fornire un'incertezza casuale sempre di lettura, come vedremo di seguito, quando affronteremo tali tipi di incertezze.

Una considerazione preliminare alla misurazione è che si deve cercare di eliminare le incertezze, che è possibile evitare.

È formativo, per chi si avvicina allo studio delle leggi naturali, capire, che parte integrante del processo di misura è l'osservatore stesso.

L'osservatore, con la sua attenzione e cura, cerca di farsi "interprete" di quanto la natura voglia comunicare, anche se l'osservatore interagisce con gli strumenti e il processo fisico stesso.

2.3 Incertezze casuali: misure ripetute

Abbiamo visto come riportare una misura, nel caso in cui, nelle stesse condizioni ambientali o sperimentali, non si osservi alcuna variazione del valore misurato.

Abbiamo osservato il termometro digitale, che registrava un solo valore.

Supponiamo invece che, sempre in condizioni ambientali o sperimentali invariate, i valori sul visualizzatore del termometro digitale varino senza alcuna evidente motivazione.

Possiamo fare una serie di ipotesi: correnti d'aria, non sufficiente isolamento della stanza, che permetta una regolazione costante della temperatura, ecc., l'operatore che alita sulla parte sensibile del termometro.

Dopo aver cercato di eliminare qualsiasi perturbazione, vediamo, che ancora non siamo in grado di "evitare" delle variazioni, sebbene magari ridotte.

Dobbiamo fornire la misura della temperatura della stanza e quindi dobbiamo trovare un modo per presentare la nostra misurazione.

Si potrebbero presentare due casi, oltre a quanto già discusso per il caso di una lettura sempre costante:

- 1° caso: le letture oscillano solo tra due valori per esempio tra 25.7 °C e 25.6 °C.
- 2° caso: rileviamo le misure ogni intervallo di tempo prefissato e registriamo la seguente serie di valori: 25.7, 25.6, 25.7, 25.8, 25.5, 25.9, 25.7, 25.8, 25.6 espressi sempre in °C.

In entrambi i casi si osserva una maggiore incertezza sulla misura, e ci poniamo il problema di quale migliore stima possiamo fornire del valore misurato.

In questa prima parte daremo indicazioni di come si procede, le motivazioni saranno chiare nel corso del libro (Cap. 8).

Nel caso di osservazioni diverse nella misura della stessa grandezza, si considera come *migliore stima della misura* (x_{ms}) la *media aritmetica* di tutte le misure x_i . La media aritmetica di una serie di misure x_i viene indicata con un trattino sopra $\bar{x}$. Nel caso di n valori misurati $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n$ si ha:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

Risulta di più chiara lettura, e migliore utilizzo per le dimostrazioni teoriche, se scritta nel modo seguente:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n ,$$

dove x_i è ogni singola misura registrata, n il numero totale di dati, il simbolo $\sum_{i=1}^n$ indica la sommatoria di indice i da uno ad n .

Si considera come *migliore stima dell'incertezza* la cosiddetta *deviazione standard del campione* σ_x , definita nel seguente modo:

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)} .$$

Il perché di queste scelte sarà presentato in modo intuitivo in questa prima parte del libro e giustificato in modo rigoroso nella seconda parte.

Applichiamo già queste formule al secondo caso, in cui si ha che la media risulta:

$$\bar{T} = \frac{(25.7 + 25.6 + 25.7 + 25.8 + 25.5 + 25.9 + 25.7 + 25.8 + 25.6) \text{ }^{\circ}\text{C}}{9} = 25.7 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

quindi forniremo come migliore stima della temperatura T_{ms} = la media $\bar{T}$, e come incertezza la deviazione standard del campione:

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \sqrt{\sum_{i=1}^9 (T_i - \bar{T})^2 / (9 - 1)} = \\ &= \sqrt{[(25.7 - 25.7)^2 + (25.6 - 25.7)^2 + \dots + (25.6 - 25.7)^2] / (9 - 1)},\end{aligned}$$

da cui si ricava $\sigma_T = 0.12 \text{ }^{\circ}\text{C}$ (il risultato è stato arrotondato a due cifre significative, argomento che verrà affrontato a breve). Quindi forniremo come migliore stima di T $25.70 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e come incertezza casuale $\sigma_T = 0.12 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

L'utilizzo della *sommatoria* non è finalizzato al solo calcolo delle medie e delle deviazioni standard. Si consiglia allo studente di *prendere dimestichezza con questo operatore* già da adesso, perché sarà ricorrente nella seconda parte per chiarimenti e dimostrazioni nella teoria delle incertezze.

La *deviazione standard del campione* è una buona stima dell'*incertezza casuale*.

Ma quanto buona è questa stima e sulla base di cosa la definiamo tale e quanti dati servono?

Osserveremo che la deviazione standard del campione, per variabili casuali e campioni superiori a trenta, permette di affermare che $\approx$ il 68 % delle misure si trovino nell'intervallo $x_{ms} - \sigma_x \leq x \leq x_{ms} + \sigma_x$, questa affermazione riguarda anche la previsione sulla probabilità di ottenere un determinato valore in misure successive.

Combinazione delle varie incertezze

Abbiamo introdotto già diversi tipi di incertezze, rimane da chiarire ancora come combinarle tra loro, facendo attenzione a cosa descrive ogni incertezza e cosa si vuole rappresentare con numeri, che indicano la misura e la sua incertezza.

Partiamo dall'incertezza dovuta alla risoluzione dello strumento, che abbiamo definito di lettura o di risoluzione, ed introduciamo il simbolo ε , per etichettare questa incertezza.

Nel presentare una misura con questa incertezza, dichiariamo, che ci aspettiamo, invece, che il 100 % delle misure cadono nell'intervallo $x_{ms} - \varepsilon_x \leq x \leq x_{ms} + \varepsilon_x$. Per l'esempio della misura con i termometri è evidente che il valore può essere uno qualsiasi tra 25.65 e 25.74, per cui tutti i possibili valori sono compresi nell'inter-

vallo $T = 25.7 \pm 0.05 \text{ }^{\circ}\text{C}$, il 100 % . Sia dei dati osservati che delle previsioni di misure, successive, nelle stesse condizioni e con la stessa strumentazione.

Affrontiamo il problema di come combinare incertezze diverse in modo intuitivo, ritornando al *I° caso*, in cui la misura oscilla continuamente tra due soli valori con la differenza di una unità fondamentale dello strumento.

Per lo strumento che abbiamo utilizzato, l'unità fondamentale è $0.1 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e i due valori osservati sono $25.7 \text{ }^{\circ}\text{C}$ e $25.6 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Possiamo fornire come miglior stima della misura la media $T_{ms} = \bar{T} = 25.65 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Nel calcolo della deviazione standard del campione si osserva che all'aumentare del numero di misure questa tende a $0.05 \text{ }^{\circ}\text{C}$ (provate con la vostra calcolatrice a calcolare nel caso di n misure, σ_x con $n/2$ valori pari $25.6 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ed $n/2$ valori pari a $25.7 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ed osservate l'andamento all'aumentare di n).

Potremmo quindi fornire la misura con un'incertezza casuale :

$$T = 25.65 \pm 0.05_{cas} \text{ }^{\circ}\text{C},$$

dove con il pedice *cas* abbiamo evidenziato proprio l'incertezza casuale.

Per la risoluzione dello strumento in uso, la lettura $25.6 \text{ }^{\circ}\text{C}$ potrebbe cadere nell'intervallo $25.55 - 25.64 \text{ }^{\circ}\text{C}$, mentre la misura $25.7 \text{ }^{\circ}\text{C}$ potrebbe essere compresa tra $25.65 - 25.74 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Se forniamo la misura $25.65 \pm 0.05 \text{ }^{\circ}\text{C}$, non abbiamo incluso tali intervalli, per cui dovremmo aggiungere anche l'errore di lettura, ovvero avremo come risultato:

$$T = 25.65 \pm 0.05_{cas} \pm 0.05_{lett} \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Questo modo di combinare le incertezze viene detto *somma lineare* tra le incertezze casuali (etichettati con *cas*) e quelle sistematiche di lettura *lett*, si ha pertanto che:

$$\text{incertezza totale } \delta T = 0.05 + 0.05 \text{ }^{\circ}\text{C} = 0.1 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

che ribadiamo abbiamo ottenuto dalla *somma lineare* delle incertezze casuale e di lettura. La statistica sulla base dell'indipendenza tra l'incertezza casuale e quella strumentale ci permette di fornire come miglior stima dell'incertezza la cosiddetta *somma in quadratura*:

$$\text{incertezza totale } \delta T = \sqrt{0.05^2 + 0.05^2} \text{ }^{\circ}\text{C} = 0.07 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Possiamo intuire quanto sopra: se abbiamo che si osservano solo due valori, ci aspettiamo che ci sia una probabilità maggiore che il valore vero sia centrato proprio fra le due letture, per cui sarà meno probabile, che il valore arrivi agli estremi $25.55 \text{ }^{\circ}\text{C}$ o $25.74 \text{ }^{\circ}\text{C}$, inclusi nella somma lineare.

È necessario anticipare ora quanto osserveremo alla fine di questo percorso, utilizzando termini, che saranno chiariti in seguito.

In statistica l'incertezza su una misura viene interpretata come dispersione dei risultati della misura da un valore atteso. Tale dispersione viene descritta dalla varianza.

La varianza nel caso delle incertezze di tipo casuale risulta pari al quadrato della deviazione standard.

Osserveremo che nel caso di una variabile, che abbia una probabilità uniforme, che vuol dire che qualsiasi valore nell'intervallo ha la stessa probabilità (quindi 100 %), come il caso dell'incertezza di lettura, si può fornire la varianza, che risulterà $\varepsilon^2/3$.

In un corso di laboratorio del primo anno, con la scusa di semplificare la vita agli studenti, spesso si incorre in imprecise affermazioni.

Rimane una regola o scusa di base, che può essere tollerata per un corso introduttivo, ma che purtroppo poi si trascina anche negli studi futuri.

La *somma lineare* viene "accettata" in quanto è un *limite superiore*, per cui l'incertezza non può essere maggiore.

La considerazione suddetta sulla somma tra incertezze casuali e incertezze dovute alla risoluzione vale anche per più misure come espresso nel secondo caso.

Infatti per il 2° caso l'incertezza totale sarà data da:

$$\begin{aligned}\text{incertezza totale } \delta T &= 0.12 + 0.05 = 0.17 \text{ }^\circ\text{C} \\ \text{oppure} \\ \text{somma in quadratura } &= \delta T = \sqrt{0.12^2 + 0.05^2} \text{ }^\circ\text{C} = 0.13 \text{ }^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

Iniziano a comparire una serie di incertezze e forse è opportuno etichettarle in modo definitivo. Useremo per l'*incertezza casuale* di una grandezza x il simbolo σ_x , che non è altro che la deviazione standard del campione, etichetteremo invece l'incertezza di lettura con il simbolo ε_x . Si osservi che per la somma in quadratura:

$$\delta x = \sqrt{\sigma_x^2 + \varepsilon_x^2}$$

se l'*incertezza* dovuta alla *risoluzione* dello strumento, è maggiore dell'incertezza casuale

$$\varepsilon_x \gg \sigma_x,$$

ci aspettiamo di non osservare le fluttuazioni statistiche, quindi è dominante ε_x e l'errore totale $\delta x \approx \varepsilon_x$.

Nel caso in cui invece osserviamo per ogni misura ripetuta dei valori diversi, siamo nelle condizioni

$$\varepsilon_x \ll \sigma_x.$$

osserviamo le fluttuazioni statistiche, quindi è dominante σ_x e l'incertezza totale $\delta x \approx \sigma_x$.

Nel caso di misure dirette è immediato osservare, che al diminuire dell'incertezza dovuta alla risoluzione, si iniziano ad osservare le incertezze casuali, oggetto della statistica, che permetterà sotto alcune considerazioni di ridurle. Ma attenzione, anche se trascurabili, le incertezze sistematiche sono sempre in ballo.

Dopo una presentazione discorsiva delle varie incertezze, facciamo il punto della situazione con un'opportuna catalogazione delle rispettive definizioni o convenzioni, per fornire alla fine il modo corretto per combinarle.

2.4 Catalogazione delle incertezze

Iniziamo quindi a distinguere i vari tipi di incertezza, per i quali utilizzeremo dei simboli, che serviranno per tutte le discussioni successive.

Le incertezze su una misura si possono catalogare come segue :

- *Incertezze (errori) casuali σ_x* :
incertezze che hanno *pari probabilità di verificarsi sia in eccesso che in difetto sulla misura*. Sono dovute a piccole variazioni (casuali) delle condizioni ambientali, ad azioni (casuali) dell'operatore, fluttuazioni (casuali) di indici di scale. Non sono facili da eliminare, ma possono essere messe in evidenza mediante le misure ripetute e sono trattabili statisticamente. Sono l'argomento di maggiore approfondimento per un corso di laboratorio e della teoria delle incertezze.
- *Incertezze (o errori) sistematiche* che suddivideremo in due sotto gruppi:
 - *Incertezze (errori) a priori o di lettura (o misura) ϵ_x* :
sono dovute alla sensibilità di lettura (o di misura) del dispositivo utilizzato. Dipendono dalla
 - * minima quantità che si può apprezzare sulla scala nel caso di incertezza di *sensibilità di lettura*, o
 - * la minima quantità rilevabile dallo strumento nel caso di incertezza di *sensibilità di misura*.
 - *Incertezze (o errori) sistematiche di accuratezza η_x* :
sono le incertezze la cui *probabilità di verificarsi con un segno sia maggiore di quella di verificarsi con il segno opposto*. Nell'esempio del termometro tutte le misure saranno spostate di 2 °C. L'origine è varia: uso non corretto di leggi o metodi, strumenti non tarati bene, o usurati, caratteristiche limitate, errori di definizione, errore di lettura e quindi anche l'operatore e le condizioni ambientali, la cui influenza sia sempre nello stesso verso

La distinzione più chiara tra le incertezze è data dagli effetti, che inducono sulla misura, piuttosto che dal soggetto, che le causa, in quanto lo stesso soggetto potrebbe indurre incertezze di vari tipi.

Si pensi per esempio alle incertezze indotte da un operatore. Nella lettura di una scala graduata spesso si può dare un'incertezza di *parallasse*, se si legge dal basso o dall'alto, nel caso del termometro, oppure da sinistra o da destra nel caso di regoli, di misuratori analogici ad ago ...

Se l'operatore si posiziona un po' da un lato un po' dall'altro, questa incertezza risulta casuale (σ_x). Se si posiziona sempre dallo stesso lato allora diventa sistematica (η_x) di accuratezza.

L'operatore può anche interferire con la misura: si immagini la lettura della temperatura della stanza con il termometro, se lo studente per leggere sta sempre troppo vicino al bulbo e vi alita continuamente sopra, la lettura sarà sempre maggiore. Se prende fra le dita la parte sensibile, anche in questo caso la misura sarà falsata, con un'incertezza del tipo η_x .

La premessa è che ogni esperienza venga condotta in condizioni controllate, con strumenti calibrati e con attenzione, in modo da poter ritenere trascurabili le incertezze sistematiche del tipo η_x .

Ci si può concentrare così nell'individuare il comportamento casuale delle grandezze, grazie all'utilizzo di strumenti con una sufficiente risoluzione, per rilevarne le fluttuazioni, in modo da poter quindi utilizzare la statistica.

In un laboratorio del primo anno si assume, che non si abbiano incertezze del tipo η_x , e vengono considerate come sistematiche soprattutto le incertezze di sensibilità di lettura.

Questo per evitare, che lo studente debba approfondire le problematiche tecniche degli strumenti utilizzati e quindi non focalizzarsi sul senso generale dell'approccio scientifico allo studio dei fenomeni fisici.

Ma la presenza di incertezze di tipo η_x , a volte indotti dall'operatore stesso, spesso crea qualche problema, a chi si accinge a studiare una scienza esatta, e, pur impegnandosi al meglio, per condurre la misurazione in modo preciso, alla fine non ottiene il risultato atteso.

Chiariamo subito che l'*obiettivo di un corso introduttivo al laboratorio* è imparare a *trattare le incertezze*, per formulare un'ipotesi statistica e verificare con quale *probabilità* possiamo accettare o rifiutare l'*ipotesi*.

Tale discussione si può fare in presenza di incertezze del tipo casuale, anche se "sporcate" da incertezze di accuratezza.

Perciò alla fine rigetteremo l'ipotesi, il che nel caso di un'indagine scientifica, significa o formularne un'altra o ripetere in modo appropriato l'esperienza, cercando di individuare gli errori sistematici di tipo η_x .

Ma tutto questo richiede tempo ed un processo di modellizzazione e prove ripetute, cosa certo non possibile in un corso preliminare, per il quale si cerca di far confrontare lo studente con più esperienze, per avere una visione più ampia delle problematiche, piuttosto che concentrarsi su un solo caso sperimentale.

Ci saranno, comunque, alcuni problemi, per i quali si affronteranno alcune tecniche di calibrazione.

Gli studi delle incertezze sistematiche, risultano meglio compresi se affrontati direttamente sulle esperienze in laboratorio in sede operativa e valutati sulla base degli strumenti in uso.

2.5 Precisione ed accuratezza

Spesso si utilizzano, anche su testi universitari molto diffusi, impropriamente i termini precisione ed accuratezza. Cerchiamo di fare luce, per chiarirne meglio il loro significato diffusamente usato nel caso della misura di una grandezza fisica e della incertezza su essa. Osserviamo lo schema presentato in Fig. 2.3 per il gioco delle bocce.

Tale gioco consiste nell'avvicinarsi con le bilie il più possibile al boccino (il valore vero della grandezza). Nel caso che i tiratori facciano lanci molto vicini tra

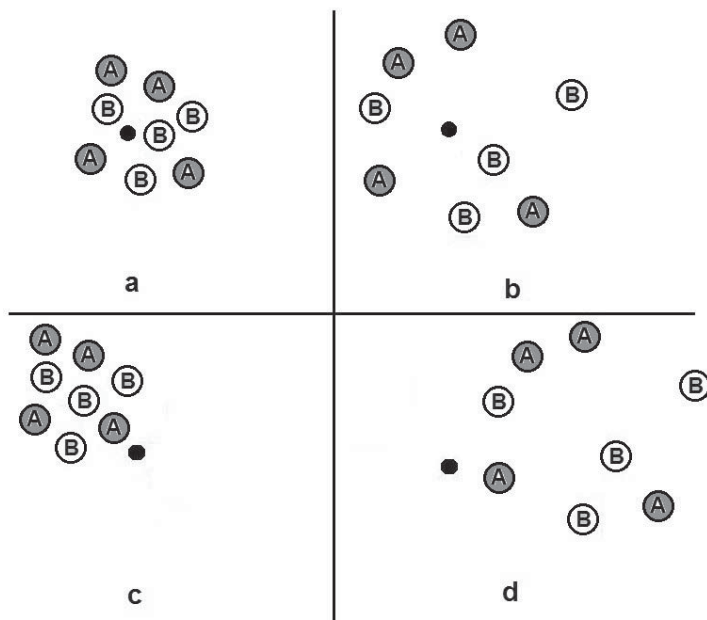


Figura 2.3 Esempio per spiegare la differenza tra precisione e accuratezza: il gioco delle bocce (il boccino è la bilia più piccola nera): **a)** tiri (misura) precisi ed accurati, **b)** tiri accurati ma non precisi, **c)** tiri precisi ma non accurati e **d)** tiri né precisi, né accurati.

loro, diremo che i lanci sono *precisi*, e diremo che sono anche *accurati*, se il centro di massa⁶ è in prossimità del boccino in Fig. 2.3a).

Le bocce in Fig. 2.3b) più distanti tra loro, quindi i tiri sono meno precisi, ma il centro di massa è comunque vicino al boccino, quindi comunque accurati.

Per il caso in Fig. 2.3c) si osserva che i tiri fra di loro sono vicini, per cui sono precisi, ma il loro centro di massa rispetto al caso in Fig. 2.3a) è più distante dal boccino, si parlerebbe in questo caso di misura precisa, ma poco accurata. Infine per il caso in Fig. 2.3d) si osserva che le bilie sono più distanti tra loro ed il loro centro di massa è più distante del caso in Fig. 2.3a), la misura risulta meno precisa ed anche meno accurata.

L'esempio del gioco delle bocce calza molto a pennello, con una considerazione aggiuntiva. Nella deduzione del valore vero dalle misure di una grandezza, noi non sappiamo quale sia, quindi è come giocare a bocce senza vedere il boccino. Cerchiamo di individuare la sua posizione (valore vero) dai “tiri” medi delle altre squadre, ovvero gli esperimenti dei nostri colleghi magari in laboratori diversi, indicati con le lettere A e B in Fig. 2.3, che devono fornirci indicazioni chiare ed universalmente

⁶ Il centro di massa è dato dalle somma dei prodotti tra i vettori posizione di ogni bilia per le rispettive masse (qui tutte uguali) divisa per la massa totale, in questo caso sul piano dà la posizione “media” delle bilie.

riconosciute, per poterci permettere di riprodurre l'esperienza, o utilizzare le loro misure, per verificare altre ipotesi e sviluppi.

Quindi è fondamentale in questa ricerca cercare di essere al meglio possibile *onesti e precisi*, nel fornire tutti i dettagli utili ai colleghi, interessati ad usare i nostri dati o verificarli.

Forniamo ulteriori chiarimenti sulla terminologia utilizzata, anche perché spesso nel linguaggio comune si crea un po' di confusione, e cerchiamo di uniformarla ai simboli usati per le incertezze:

- **Accuratezza** = $\frac{1}{|\eta_x|}$,
- **precisione** = $\frac{1}{\varepsilon_x}$,
- **grado di precisione** = $\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \varepsilon_x^2}}$,

da tali relazioni speriamo sia chiaro la confusione linguistica nel dire più preciso, più accurato, che equivale a dire avere una corrispondente incertezza minore.

Si faccia attenzione alla differenza tra grado di precisione, riferito al valore della misura, utile per il confronto tra misure diverse, rispetto alla precisione che invece riguarda il metodo di misura e la strumentazione usata. Spesso non viene riportata una distinzione tra questi, in quanto si evince da quanto riportato nel testo.

È opportuno chiarire e ribadire che si parla di *incertezza (errore) assoluta totale*, quando si riporta il valore assoluto dell'incertezza espressa ovviamente con l'unità di misura concorde.

Si parla di *incertezza (errore) relativa*, quando si riporta il rapporto tra l'incertezza assoluta totale e la migliore stima della misura, per questo tale incertezza risulta adimensionale:

incertezza assoluta totale : δx dimensioni di x_{ms}

incertezza relativa : $\delta x/|x_{ms}|$ adimensionale.

L'incertezza relativa permette di individuare nel caso di più grandezze, quale sia la più precisa, quindi con minore incertezza (relativa).

In alcuni casi risulta di più facile lettura presentare l'*incertezza relativa* in forma percentuale:

incertezza percentuale ($\delta x/|x_{ms}| \times 100$) % .

riconoscibile dal simbolo %.

Abbiamo usato il simbolo δ per il caso generale, si potrebbe parlare separatamente di incertezza assoluta totale, che abbiamo visto comprende tutti i contributi, o separatamente di incertezza casuale, di lettura e di accuratezza, equivalentemente per l'incertezza relativa, possiamo presentarla separatamente.

L'incertezza assoluta totale indicata con la delta greca (δ) include tutti i tipi, che essendo indipendenti tra loro si sommano in quadratura (vedi Cap. 10):

$$\delta_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \eta_x^2 + \varepsilon_x^2},$$

perciù la misura sarà riportata come:

$$x = x_{ms} \pm \delta x.$$

In alcuni casi è preferibile evidenziare i singoli contributi in modo separato:

$$x = x_{ms} \pm \sigma_x \pm \varepsilon_x + (o) - \eta_x$$

dove con $+$ (o) $-$ nel caso si sia individuato il segno dell'incertezza di accuratezza, altrimenti si presenta come $\pm \eta_x$.

Nel caso di una misura diretta la discussione suddetta è lineare e chiara, come riportato nell'esempio iniziale.

Spesso nel corso di laboratorio del primo anno ci si limita a quanto sopra, ma se, come vedremo,

con incertezza indichiamo la dispersione delle misure per una data misura, in grado di fornire una previsione "probabilistica" di ottenere un risultato in intervalli tipici del 68 %, per questo dobbiamo utilizzare per le incertezze, quanto dedotto dalle varianze (Cap. 8):

$$\delta x = \sqrt{\sigma_x^2 + \varepsilon_x^2/3 + \eta_x^2/3}. \quad (2.1)$$

Se il segno di η è distinguibile, tale incertezza agisce sulla stima della misura e l'intervallo di incertezza viene descritto semplicemente da $\sqrt{\sigma_x^2 + \varepsilon_x^2/3}$

$$x = x_{ms} + (o) - \eta_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + \varepsilon_x^2/3}.$$

Questa è sicuramente la forma di somma delle incertezze, nel caso si voglia interpretare l'incertezza come previsione statistica e quindi sicuramente nel caso di verifiche di leggi fisiche. È anche una convenzione consolidata a livello internazionale per uso scientifico, tecnico e commerciale secondo le normative e direttive [10] del "Joint Committee for Guide in Metrology", facente capo sempre al "Bureau International de Poids et Mesures" [1].

Chiariamo subito che δx , in quanto dedotta dalle varianze, assume peculiarità statistiche. Le derivazioni della teoria delle incertezze si basano su variabili statistiche ed utilizzano come simbolo per le varianze σ^2 , pertanto σ si può confondere con le sole incertezze casuali σ_x . Tali deduzioni si allargano a tutte le incertezze, in quanto dedotte dalle varianze, perciò sorge spesso l'equivoco di considerare le sole incertezze casuali, mentre vanno considerate le incertezze totali δx secondo la (2.1).

Cercheremo di ricordarlo periodicamente nel corso del testo, perché dal punto di vista formale e visivamente mnemonico risulterà necessario operare con il simbolo σ , ma bisognerà nell'atto pratico e di utilizzo delle formula ricondursi a quanto espresso come δ , per la combinazione appropriata delle varie varianze.

Nel combinare le incertezze, che si propagano in modo articolato in caso di diverse variabili in gioco, le considerazioni da fare sono più complesse e affronteremo questo argomento in parte nella propagazione delle incertezze (Cap. 4), e nel corso di tutto il testo. Potremo dare le regole appropriate solo dopo la trattazione statistica delle incertezze casuali e l'introduzione delle densità di probabilità, corrispondenti anche agli altri tipi di incertezza.

Risulta in ogni caso evidente, che quanto fornito come misura va chiarito e giustificato nel testo della relazione, rapporto o articolo.

La statistica ci permetterà di abbattere l'incertezza di tipo casuale, e sarà argomento principale della seconda parte, sebbene nella prima parte forniremo indicazioni di come procedere, necessarie anche ad affrontare in modo più preparato la parte teorica.

Bisogna tenere bene a mente che le incertezze sistematiche rimangono sempre in gioco.

Concludiamo questo capitolo proprio presentando una sintesi delle proprietà generali degli strumenti di misura.

2.6 Strumenti di misura e loro proprietà

L'utilizzo di strumenti di misura fa parte della pratica di laboratorio. A strumenti elementari, quali il regolo, il cronometro, si affiancano strumenti più complicati e sofisticati. È indispensabile prima di iniziare una misura essere a conoscenza dei limiti, delle prestazioni e delle specifiche degli strumenti, che ci si appresta ad utilizzare. Spesso si richiede uno studio dello strumento stesso, che non può prescindere dalla lettura del manuale e dai controlli, che lo strumento sia calibrato, cosa che in un corso di laboratorio del primo anno di solito viene tralasciata.

Ciò premesso cerchiamo di tracciare delle linee guida soprattutto per la comprensione della terminologia e la stima delle *incertezze a priori*, chiamate così, perché si possono (e si dovrebbero) stimare prima di effettuare la misura, per verificare se la risoluzione è sufficiente per quanto ci si propone di stimare.

Negli strumenti di misura si possono individuare tre parti costitutive principali: l'elemento rivelatore, il trasduttore e il dispositivo di visualizzazione.

1. L'*elemento rivelatore* è il dispositivo sensibile alla grandezza da misurare.
2. Il *trasduttore* trasforma l'informazione fornita dal rivelatore in una grandezza più facilmente accessibile.
3. Il *dispositivo di visualizzazione* è un indicatore, che fornisce il risultato della misura in modo visivo, con varie possibilità, scala graduata, visualizzatore digitale, registratori grafici o digitali.

Per esempio nel termometro a bulbo, il mercurio (dilatazione volumica) è l'elemento rivelatore, il sistema capillare-bulbo è il trasduttore e la scala graduata è il dispositivo di visualizzazione.

Nella pratica di laboratorio si elimina l'inconveniente delle misurazioni per confronto diretto con i campioni standard, utilizzando apparecchi tarati: sia nel caso di strumenti a confronto diretto: metri, calibri, micrometri ..., che nel caso di strumenti a lettura diretta: cronometri, termometri, amperometri, densimetri,

Le caratteristiche di qualsiasi strumento si possono elencare in:

- *portata o fondo scala*: limite superiore del campo di misura dello strumento, in alcuni strumenti la portata può essere impostata tra una serie di valori;
- *soglia*: limite inferiore del campo di misura, anche questo potrebbe variare a seconda dell'impostazione della portata;
- *sensibilità di lettura*: minimo spostamento dell'indice stimabile con la scala dello strumento, nel caso di uno strumento a lettura digitale coincide con la più piccola unità di lettura dello strumento detta unità fondamentale (u.f).
- *sensibilità di misura* detta anche errore assoluto massimo a priori o anche *risoluzione di misura*: la minima quantità, che comporta uno spostamento dell'indice dello strumento, in genere è indicato dal costruttore, per un buon strumento deve essere inferiore o al massimo coincidente con l'errore di sensibilità di lettura. Spesso non avendo a disposizione il manuale, ci si affida alla sensibilità di lettura che coinciderà in pratica alla metà della più piccola sensibilità di lettura. Per il metro avente la più piccola graduazione di un millimetro si ha $\varepsilon_x = 0.5$ mm, per un sistema digitale si utilizza $\varepsilon_x = 1/2$ u.f.
- *sensibilità dello strumento*: rapporto fra lo spostamento dell'indice di misura ed il valore della grandezza misurata:

$$\alpha = d\theta/dx \approx \Delta\theta/\Delta x,$$

tale relazione può essere lineare, nel qual caso la sensibilità di misura è costante, diversamente dipenderà dal valore misurato;

- *prontezza* o anche *tempo caratteristico*: rapidità con la quale risponde lo strumento alla variazione della grandezza da misurare;
- *classe di precisione (c.p.)*: il costruttore fornisce la classe di precisione, che esprime, in valore percentuale, l'errore assoluto massimo a priori rispetto alla portata massima c.p. = $(\varepsilon_x/X_{max}) \times 100$. Nota la classe di precisione, si può risalire all'errore massimo a priori. Si assuma il caso di una casa costruttrice, che abbia indicato per un voltmetro la classe 1. Si ha che con un fondo scala di 5 V (Volt) si ha un errore massimo a priori sulla misura pari a 1% di 5 V ovvero il valore sarà $V \pm 0.05$ V. Ma con un altro fondoscala per esempio di 1000 V si avrà una misura affetta da errore massimo a priori $V \pm 10$ V.

Un suggerimento per un buon sperimentale o tecnologo è leggere i manuali degli strumenti utilizzati. Cosa che richiede tempo e che per questo spesso in un laboratorio del primo anno viene tralasciata, ma non possiamo esimerci da invitare a considerare, quale debba essere l'approccio corretto allo studio dei fenomeni fisici.

Problemi

2.1. In un multimetro al variare del fondo scala varia la risoluzione. In Tabella 2.1 nella seconda colonna viene riportata la lettura del visualizzatore digitale, completare la tabella fornendo l'incertezza assoluta sulla misura e quella relativa.

Tabella 2.1 misure di tensione al variare del fondo scala

<i>Fondoscala</i> [V]	<i>Tensione</i> V [V]	δV [V]	$\delta V/ V $
1000	2		
100	2.0		
10	2.00		

2.2. Misurate una distanza con una rollina metrica con risoluzione 1 cm ed ottenete la misura di 750 cm. Misurate il lato di una calcolatrice pari a 70 mm con una riga avente risoluzione 1 mm. Riportate l'incertezza relativa delle due misure. Quale è la più precisa?

2.3. Misurate con un multimetro la temperatura di una stanza, le misurazioni hanno oscillazioni casuali, per le quali si osserva un errore causale pari a 0.45°C su una media aritmetica di 25.72°C . Con quale risoluzione è possibile trascurare l'incertezza della lettura di scala? (Assumete trascurabile ϵ_x , quando non si osserverà un effetto sull'incertezza totale espressa con due cifre significative, sommando in quadratura errore casuale e di lettura.)

2.4. Per le nove misurazione di temperatura fornite in questo capitolo, provate ad esercitarvi nel calcolare $\bar{T}$ e σ_T : prima su un foglio di carta senza calcolatrice, poi prendete dimestichezza con la vostra calcolatrice e verificate di essere in grado di utilizzarne le funzioni statistiche. Per chi ha a disposizione un PC, si eserciti con il foglio di calcolo disponibile (p.e. Excel [8]).

2.5. Osservate un misuratore digitale, che oscilla continuamente tra due valori x_1 , x_2 con la differenza di una sola unità fondamentale (u.f.). Assumete $n/2$ misure di x_1 ed $n/2$ misure di x_2 . Dimostrate per il caso generale di n qualsiasi, che il valore medio è pari a $(x_1 + x_2)/2$ e la deviazione standard del campione tende a $1/2$ della risoluzione (o u.f.).

2.6. Se avete difficoltà a formalizzare il Probl. 2.5, provate con la calcolatrice o con un foglio elettronico al calcolatore con la formula, aumentando di volta in volta n , oppure semplicemente aumentando il numero dei due dati.

2.7. Una misura viene effettuata con un termometro digitale, avente risoluzione 1°C , dalle misure ripetute si ottiene $\bar{T} = 25.4^\circ\text{C}$ e $\sigma_T = 1.5^\circ\text{C}$, qual è la misura di temperatura? Leggendo il manuale della strumentazione si ha che nell'intervallo $0\text{--}50^\circ\text{C}$ si ha un'incertezza di accuratezza di 0.5°C . Fornire la misura di T , cercando di utilizzare la (2.1) degli intervalli previsionali con le varianze.

Introduzione al Laboratorio di Fisica

Misure e Teoria delle Incertezze

Ciullo, G.

2014, XIV, 250 pagg. 39 figg., Hardcover

ISBN: 978-88-470-5655-8