

---

## Prefazione

### Per lo studente

Questo libro contiene un insegnamento base di topologia generale ed una introduzione alla topologia algebrica. È rivolto a studenti dotati delle conoscenze matematiche che solitamente si insegnano al primo anno dei corsi di laurea in Matematica e Fisica.

La topologia generale è il linguaggio con il quale è scritta una parte consistente della Matematica. Non a caso il nome originario “topologia analitica” è stato rimpiazzato da “topologia generale”, anche a significare che si tratta della topologia che è usata dalla grande maggioranza dei matematici e che è necessaria a molti settori della matematica. Il suo continuo uso ha agito come una ripetuta limatura e lucidatura dei suoi teoremi e delle sue definizioni, facendone una materia di studio molto elegante. È inoltre innegabile che la topologia generale ha un notevole valore formativo, in quanto costringe ed abitua la mente a lavorare con oggetti estremamente astratti, definiti esclusivamente per conto di assiomi. Vi renderete conto voi stessi, studiando questo libro, che la topologia generale somiglia più ad un linguaggio che ad una teoria. Ci sono molti nomi nuovi da imparare, molte definizioni e molti teoremi la cui dimostrazione è spesso molto semplice e quasi mai supera le venti righe di lunghezza. Naturalmente ci sono anche risultati profondi e non banali, come ad esempio i teoremi di Baire, Alexander e Tyconoff.

La parte di topologia algebrica, sulla quale daremo maggiori dettagli e le necessarie motivazioni nel Capitolo 9, è dedicata allo studio dell’omotopia, del gruppo fondamentale e dei rivestimenti.

Ho inserito nel volume circa 400 esercizi: affrontarli con passione è il modo migliore per impadronirsi della materia, per adattarla al proprio modo di pensare e per imparare a sviluppare idee originali. Alcuni esercizi sono, completamente o quasi, svolti nel testo, e vengono chiamati “*Esempi*”. La loro importanza non deve essere assolutamente sottovalutata: studiarli è il modo migliore per rendere concreti i concetti astratti. Di altri esercizi, segnalati dal simbolo ♡, le soluzioni sono differite al Capitolo 16.

È un dato di fatto che il modo migliore di studiare è quello di frequentare le lezioni, o in alternativa studiare i libri, cercando di capire bene le definizioni, i teoremi ed i collegamenti esistenti tra loro, e contemporaneamente svolgere gli esercizi, senza paura di sbagliare, confrontando successivamente le proprie soluzioni con quelle proposte dal libro, dal docente, dai compagni di corso, dai siti internet eccetera. Alla pagina web indicata al termine della prefazione troverete una sezione con ulteriori soluzioni degli esercizi proposti.

Questo libro contiene anche alcuni esercizi, indicati dal simbolo ☛, da me ritenuti più difficili di quanto è ragionevole assegnare alle prove d'esame. Tali esercizi devono pertanto essere interpretati come stimoli creativi e sfide all'intelligenza, dove non bisogna seguire pazientemente un sentiero fatto di idee e suggestioni abituali ma abbandonarsi a nuove combinazioni di elementi, guidate da analogie più sottili.

## Per il docente

Negli anni accademici 2004–05 e 2005–06 ho insegnato il corso denominato “Topologia” agli studenti della laurea triennale in Matematica della Sapienza Università di Roma con l'obiettivo di adattare alle esigenze dei nuovi ordinamenti didattici parte della matematica tradizionalmente insegnata nel corso di Geometria 2 della laurea quadriennale. La scelta degli argomenti è stata fatta tenendo conto degli aspetti formativi e culturali dei singoli temi e della loro utilità ai fini dell'attività di studio e ricerca in matematica. Alcune scelte di programma sono di indubbia rottura con il tradizionale insegnamento della topologia nelle Università Italiane e mi sono state probabilmente suggerite dalla mia attività di ricerca nei settori dell'algebra e della geometria algebrica. Ho preferito andare subito al sodo, enunciando prima possibile i teoremi e le definizioni più importanti e cercando di limitare gli aspetti teratopologici.

Nel passaggio dal progetto iniziale alla stesura finale delle note, ho lavorato sull'esposizione in modo da presentare le difficoltà concettuali in maniera graduale e di rendere teoria ed esempi il più possibile interessanti e dilettevoli agli occhi dello studente. In che misura tali obiettivi siano stati raggiunti saranno i lettori a giudicarlo.

Ho assunto come prerequisiti le conoscenze matematiche tipicamente insegnate al primo anno dei corsi di laurea in Matematica e Fisica. Si richiede quindi la conoscenza del linguaggio degli insiemi, dell'algebra lineare, delle nozioni base di teoria dei gruppi, delle proprietà delle funzioni, delle serie e delle successioni di numeri reali insegnate nei corsi di Calcolo e Analisi 1. All'aritmetica cardinale ed al lemma di Zorn, due importanti prerequisiti non sempre trattati nei corsi del primo anno, è dedicato il secondo capitolo: sarà compito del docente decidere, dopo aver valutato le competenze dei propri studenti, se trattare o meno tali argomenti a lezione.

Il materiale presente in questo volume è più che sufficiente per 90 ore di lezioni ed esercitazioni, anche se la tendenza attuale nei corsi laurea di Matematica è quella di dedicare alla topologia un tempo inferiore. Per facilitare il

docente nella scelta dei contenuti eventualmente da omettere, ho introdotto il simbolo  $\curvearrowright$  per segnalare gli argomenti di natura complementare che possono essere omessi del tutto od in parte ad una prima lettura. Bisogna comunque tenere presente che i capitoli 3,4,5 e 6, con l'eccezione delle sezioni segnalate da  $\curvearrowright$ , formano il nocciolo duro della topologia e non possono essere tralasciati.

La bibliografia è necessariamente incompleta e contiene i testi che mi sono stati più utili assieme ad una selezione di libri e articoli dove lo studente interessato può approfondire alcuni argomenti trattati, o solamente accennati, in questo volume.

*Ringraziamenti.* Voglio qui ringraziare Ciro Ciliberto e Domenico Fiorenza per la lettura delle versioni preliminari e per i suggerimenti che ho ricevuto da loro, la dottoressa Francesca Bonadei della Springer-Verlag Italia per la collaborazione nella stesura finale del manoscritto e gli studenti che hanno “subìto” i miei corsi di topologia per tutte le osservazioni, quasi sempre utili e pertinenti, che mi hanno permesso di correggere e migliorare il presente volume.

*Aggiornamenti.* Ulteriori soluzioni degli esercizi proposti ed aggiornamenti futuri saranno consultabili alla pagina  
<http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/librotopologia.html>

Roma, ottobre 2007

Marco Manetti

## **Prefazione alla seconda edizione**

Oltre a correggere errori e semplificare alcune dimostrazioni, le variazioni più significative rispetto alla prima edizione riguardano una sostanziale riscrittura della parte sui rivestimenti e l'aggiunta di ulteriori esempi; il numero complessivo di esercizi proposti è stato portato a 500 ed il numero di quelli svolti è stato elevato a 120. Ho deciso di non perseguire il proposito di pubblicare in rete le soluzioni di ulteriori esercizi, confortato in ciò dalle parole del celebre genetista L. Cavalli Sforza: “il quoziente intellettuale è anche, e forse soprattutto, determinato dalla quantità di sudore spesa su problemi generali di buon livello intellettuale”. È comunque disponibile, per tutti i docenti che ne facciano richiesta, un documento con le tracce di soluzione di alcuni esercizi del presente libro.

Desidero, con sincero piacere e gratitudine, ringraziare i tanti che mi hanno segnalato errori, imprecisioni ed ambiguità presenti nella prima edizione.

Roma, gennaio 2014

Marco Manetti



<http://www.springer.com/978-88-470-5661-9>

Topologia

Manetti, M.

2014, XII, 339 pagg., Softcover

ISBN: 978-88-470-5661-9