

2

Spieltheorie

Der Einzelne entscheidet nicht als Einziger

John und Mary überlegen, wie sie ihren Freitagabend verbringen wollen. John würde lieber daheim bleiben und Videospiele spielen. Mary würde lieber ins Kino gehen. Beide aber wollen den Abend lieber zusammen als getrennt voneinander verbringen. Das Problem ist offensichtlich. Egal, wie sie sich entscheiden, einer von beiden zieht den Kürzeren: Wenn sie beide zu Hause bleiben und Videospiele spielen, ist John glücklich, aber Mary langweilt sich. Wenn sie zusammen ins Kino gehen, ist Mary glücklich, aber John hat das Nachsehen. Und wenn sie getrennte Wege gehen, sind beide unzufrieden.

Was also tun? Hier zu einer Entscheidung zu gelangen, ist sehr viel schwieriger, als es auf den ersten Blick scheinen mag, denn das Ergebnis wird nicht von einem Entscheider alleine bestimmt, sondern hängt für jeden einzeln davon ab, was der jeweils andere entscheidet – und beide wissen das. Schauen wir uns Mary und John ein bisschen näher an.

Es ist Montagnachmittag. Mary ist im Büro und tut alles, um einem lästigen Kollegen aus dem Weg zu gehen, der sich ständig mit ihr verabreden will, obwohl er weiß, dass sie verheiratet ist. Unweit ihrer Arbeitsstätte gibt es lediglich zwei Lokale, wo man in der Mittagspause etwas essen

kann, Subway und Starbucks. Ginge Mary zu Subway und ihr Kollege ebenfalls, liefe sie ihm zwangsläufig über den Weg. Sie würde sich ärgern und er sich freuen. Dasselbe wäre der Fall, wenn sie beide zu Starbucks gingen. Ginge Mary zu Subway und ihr Kollege zu Starbucks, wäre sie erleichtert und er würde sich ärgern. Dasselbe wäre der Fall, wenn sie zu Starbucks ginge und er zu Subway. Wie das Ergebnis für jeden einzelnen ausfallen wird, hängt davon ab, was der jeweils andere tut – und beide wissen das.

In der Zwischenzeit sieht sich John mit einem ganz anderen Dilemma konfrontiert. Zusammen mit einem Kollegen hat er ein Gutachten gründlich verpfuscht, was seine Firma nun mit 100.000 Dollar teuer zu stehen kommen wird. Sein Chef ist außer sich vor Wut und erwägt, die beiden zur Rechenschaft zu ziehen und sich den Schaden von ihnen bezahlen zu lassen. Er zitiert beide getrennt voneinander zu sich und verlangt Auskunft darüber, wer genau den Schaden verursacht hat. Würden sie sich gegenseitig die Schuld anlasten, böte er sie beide mit jeweils 50.000 Dollar zur Kasse. Beschuldigte nur einer den anderen, würde er von dem Beschuldigten den vollen Betrag von 100.000 Dollar verlangen und der Kollege käme ungeschoren davon. Weigerten beide sich, den jeweils anderen zu beschuldigen, würde er von jedem 25.000 Dollar verlangen und die restlichen 50.000 abschreiben. John muss also entscheiden, ob er seinen Kollegen beschuldigen oder besser den Mund halten soll. Sein Kollege steht vor demselben Dilemma – und beide wissen das. Es ist eine Frage des Vertrauens: Wie das Ergebnis für jeden einzeln ausfallen wird, hängt davon ab, was der jeweils andere tut.

Wir alle kennen ähnliche Entscheidungssituationen aus dem eigenen Leben. Mathematiker nennen diese Art von Problemen (oder Entscheidungsdilemmas) „Spiele“, und die damit verbundenen optimalen Entscheidungen können durch die sogenannte „Spieltheorie“ bestimmt werden.

Grundlagen der Spieltheorie

Oskar Morgenstern und John von Neumann formulierten die grundlegenden Gedanken hinter der Spieltheorie in ihrem Buch *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten* (Originaltitel von 1944: *The theory of games and economic behavior*). Zunächst einmal sind wir auf bestimmte Vermutungen angewiesen, die nach dem Satz von Bayes gebildet werden: Die Akteure oder *Spieler*, wie sie im mathematisch-formalen Sinne heißen, haben Präferenzen, die sie nach ihrem Nutzen (*Befriedigung*) ordnen, um dann in logischer Übereinstimmung danach zu handeln. (In der Spieltheorie steht der Begriff des Nutzens oft synonym für den Gewinn, den ein Spieler potenziell machen kann und der als Auszahlung bezeichnet wird. Daraus resultiert eine befriedigende Freude, die eine Person aus einem bestimmten Ergebnis, dem *Spielausgang*, zieht; Anm. d. Übers.)

Ein Spiel stellt eine Entscheidungssituation dar, in die mehr als ein Spieler eingebunden ist. Jeder Spieler versucht, seine „Auszahlungen“ zu maximieren, doch wie hoch die Auszahlung für den einzelnen Spieler tatsächlich ausfällt, hängt davon ab, was der oder die anderen Spieler tut. Spiele werden definiert durch die Zahl der Spieler, die möglichen Handlungsoptionen, die dem einzelnen Spieler (Akteur)

zur Verfügung stehen, sowie die Zahl der möglichen Spielausgänge. *Konstantsummenspiele* beschreiben Situationen, bei denen die Höhe des Gesamtgewinns (die ausgezahlte Summe), den jeder einzelne Spieler erhalten kann, für alle möglichen Spielausgänge immer genau dieselbe ist. Man denke an TV-Sender, die um Zuschauer konkurrieren. Wenn es zehn Millionen Zuschauer gibt und drei Millionen davon sehen NBC, dann bedeutet das, dass die anderen Sender drei Millionen Zuschauer weniger haben. Wenn zwei Millionen davon auf ABC umschalten, gewinnt ABC zwei Millionen Zuschauer hinzu und NBC verliert zwei Millionen. Was der Gewinn des einen Spielers ist, ist der Verlust des anderen, und die Summe ist im Ergebnis immer dieselbe, egal welcher der beiden Sender die Zuschauer gewinnt und welcher sie verliert. In einem *Nullsummenspiel* (eine spezielle Form des Konstantsummenspiels) beträgt der Gesamtgewinn (die Auszahlungssumme) für alle Spieler immer genau Null. Wenn ich 1 Dollar gewinne, verlieren Sie 1 Dollar. Der Gewinn für mich ist also +1, für Sie ist er -1, und die Summe aus beidem beträgt Null. In einem *Nicht-Nullsummenspiel* kann die Summe aller Auszahlungen negativ oder positiv sein: Jeder Spieler kann einen Verlust erleiden oder jeder Spieler kann einen Gewinn einstreichen, aber die Summe aus Verlust und Gewinn ist für alle Spieler und für alle möglichen Spielausgänge immer dieselbe. Beispiel 1: Die Summe aller Auszahlungen beträgt 50 Dollar, egal wie das Spiel gespielt wird. Das bedeutet, dass jeder Spieler gewinnt: Wenn es nur zwei Spieler gibt, Sie und mich, und ich gewinne 30 Dollar, dann gewinnen Sie 20 Dollar. Beispiel 2: Die Summe aller Auszahlungen beträgt -50 Dollar, egal wie das Spiel gespielt wird. Das

bedeutet, dass jeder Spieler verliert: Wenn ich 30 Dollar verliere, verlieren Sie 20 Dollar.

Spiele können kooperativ oder nichtkooperativ sein. In *kooperativen Spielen* können die Spieler Koalitionen oder Allianzen bilden, um den erwarteten Nutzen zu maximieren. Beispiel Tennis: Ein Einzel ist ein nichtkooperatives Spiel – die Spieler spielen als Einzelspieler und konkurrieren darum, das Spiel zu gewinnen. Ein Doppel ist ein kooperatives Spiel – jeweils zwei Spieler spielen in einem Team und kooperieren, um das andere Team zu schlagen. Basketball, Football und Fußball sind allesamt Beispiele für kooperative Spiele (ein Freund von mir bezeichnet sie als „koalitionäre Ballbewegungsspiele“). Tennis-Einzel, Schachturniere sowie die meisten Videospiele sind nichtkooperative Spiele: Ein Einzelner konkurriert mit einem menschlichen Gegner oder einem Computer als Gegner, um das Spiel zu gewinnen.

In jeder Phase des Spiels tun die Spieler etwas – sie entscheiden sich für eine Aktion. Es kann viele verschiedene Spieldausgänge geben, je nachdem, für welche Aktionen sich der einzelne Spieler entscheidet. Aktionen sind dabei als strategische Interaktionen zu verstehen. In einem Basketballspiel können die Spieler offensiv oder defensiv spielen. Sie können sich entscheiden, den Ball durch direkte Pässe über das Spielfeld zu bewegen, um ihn strategisch günstig zu positionieren. Dabei führen einige Aktionen zu besseren Ergebnissen für den einzelnen Spieler als andere. Die *beste Reaktion* eines Spielers ist die Strategie, die den höchstmöglichen Gewinn erbringt. Als Spieler oder Trainer der Mannschaft ist die beste Reaktion demnach die Strategie, die der Mannschaft am ehesten zum Sieg verhilft.

Hat das Spiel eine Phase erreicht, in der die einzelnen Spieler das Spielergebnis nicht mehr verbessern können, befindet sich das Spiel in einem *Gleichgewicht*. Jeder Spieler hat demnach eine Strategie verfolgt, die angesichts der Strategien der anderen Spieler das eigene Spielergebnis nicht verbessern konnte. Beispiel: Wenn ein Spieler oder ein Team ein Tennisspiel gewinnt, so hat das Spiel, wie es heißt, sein Gleichgewicht erreicht. Die Sieger können kein besseres Ergebnis mehr erzielen, sie haben das Spiel gewonnen. Und die Verlierer können kein besseres Ergebnis mehr erzielen, sie haben keine Punkte mehr zu gewinnen. Ein solches Gleichgewicht findet sich auch bei einem Remis im Schach, wo für keinen der beiden Spieler mehr ein Spielzug möglich ist, der seine Position verbessert. Das Spiel ist vorbei, aber keiner hat gewonnen.

Vergleichen wir damit eine Situation, die im Kinofilm *A Beautiful Mind – Genie und Wahnsinn* beschrieben wird: Einige junge Männer betreten eine Bar. Sie alle haben es auf die aufregendste Frau dort abgesehen, die jeder für sich erobern und mit nach Hause nehmen will. Alle buhlen um sie, aber nur einer kann gewinnen; all die anderen Frauen sind gekränkt und ziehen von dannen, sodass letztlich auch die übrigen Männer allein nach Hause gehen. Doch würden die Männer ihre Strategie ändern und sich nicht nur auf die begehrtesten Frau versteifen, sondern auch ein Auge auf die andere Frauen werfen, würden sie ihre Chancen auf eine nächtliche Eroberung, sprich einen Gewinn, um ein Vielfaches erhöhen. Mit anderen Worten: Die Männer könnten sehr viel besser abschneiden, indem sie ihre Strategien ändern – und das weiß jeder.

Bereits 1950 formalisierte der US-amerikanische Mathematiker diesen Gedanken für kooperative Spiele. In einem sogenannten *Nash-Gleichgewicht* sucht jeder Spieler für sich nach der besten Lösung oder nach der besten Antwort, wie es in der Spieltheorie heißt, und nimmt demnach zutreffend an, dass der andere Spieler dasselbe tut. Wenn jeder Spieler eine Strategie gewählt hat und kein Spieler mehr durch eine einseitige Änderung seiner Strategie profitieren kann, und solange alle anderen an ihrer Strategie festhalten, spricht man von einem *Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien*. Um zu prüfen, ob ein solches Gleichgewicht vorliegt, muss man also lediglich überprüfen, ob einer der Spieler durch eine einseitige Änderung seiner Strategie seine Situation verbessern kann.

Spieltheorie und der Kampf der Geschlechter

Kehren wir zurück zu John und Mary und den Dilemmas, in denen sich befinden. Im ersten Dilemma würde John lieber Videospiele spielen als ins Kino zu gehen. Mary würde lieber ins Kino gehen als Videospiele zu spielen. Beide aber wollen den Abend lieber gemeinsam als getrennt voneinander verbringen. Dieses Problem wird in der Spieltheorie „Kampf der Geschlechter“ genannt und hat eine sehr interessante Eigenschaft: Es gibt gleich zwei *Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien*.

Der Kampf der Geschlechter ist nach obiger Beschreibung ein *simultanes Spiel*. Das heißt, die Spieler treffen ihre

Tab. 2.1 Kampf der Geschlechter in der Normalform.

		Mary	
		Kino	Videospiele
John	Kino	3,2	0,0
	Videospiele	0,0	2,3

Entscheidung simultan und wählen ihre Lieblingsalternative zur selben Zeit, ohne zu wissen, wie sich der andere entschieden hat. Simultane Spiele werden oft in Form einer Matrix dargestellt, die Spielzüge und Auszahlungen (bei vollständiger Information) eines jeden Spielers beschreibt. Man spricht hier von der *Normalform* des Spiels, die für jede mögliche Strategiekombination das zugehörige Auszahlungsprofil angibt. Tabelle 2.1, dargestellt in Normalform, zeigt den Kampf der Geschlechter, den John und Mary auszufechten haben.

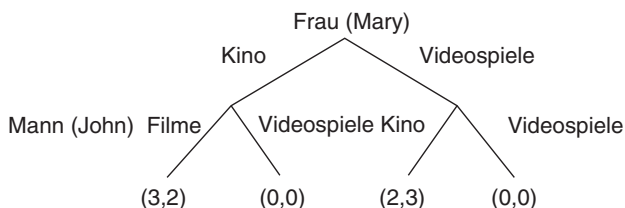
Marys erste Wahl heißt Kino, Johns erste Wahl heißt Videospiele – und beide wissen das. Was wäre, wenn beide sich auf ihre jeweils erste Wahl festlegten? Entschiede sich Mary für ihre erste Wahl (Kino), wüsste John, dass es für ihn die beste Wahl wäre, seine Strategie zu ändern und sich ebenfalls dafür zu entscheiden, ins Kino zu gehen. Entschiede sich John für seine erste Wahl (Videospiele), wüsste Mary, dass es für sie die beste Wahl wäre, ihre Strategie zu ändern und sich ebenfalls dafür zu entscheiden, den Abend zu Hause bei Videospielen zu verbringen. Es gibt hier also zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien: Kino-Kino und Videospiele-Videospiele. Gibt es eine Lösung, die aus dieser Sackgasse führt?

Ja. Die eine Möglichkeit besteht darin, dass John und Mary jeweils abwechselnd zum Zug kommen – das heißt,

einmal „gewinnt“ Johns erste Wahl, Mary „gewinnt“ beim nächsten Mal und so weiter. Der Kampf der Geschlechter wird so zu einem *sequenziellen Spiel*. In einem sequenziellen Spiel entscheiden die Spieler ihre Spielzüge abwechselnd und wissen jeweils, welche Züge bereits vorgenommen wurden. Nehmen wir einmal an, John und Mary schreiben jedes Mal auf, ob sie lieber ins Kino gehen oder Videospiele spielen, sodass sie beide immer wissen, wo in diesem Spiel sie gerade stehen. Wenn jeder Spieler beobachten kann, welchen Spielzug der jeweils andere vor ihm macht, ist es ein Spiel der *vollständigen Information*. Nehmen wir nun stattdessen an, John und Mary schreiben ihre jeweiligen Entscheidungen nicht auf, und nehmen wir weiterhin an, dass Mary sich die Spielzüge sehr viel besser merken kann als John. Wenn einige (aber nicht alle) Spieler also Informationen über vorausgegangene Spielzüge haben, ist es ein Spiel der *unvollständigen Information*. Sequenzielle Spiele werden anhand eines sogenannten *Spielbaums* beschrieben, der für jeden Spielzug und jede mögliche Antwort die zugehörigen Auszahlungsprofile (und Informationen) anzeigt. Diese Art der Darstellung wird als *Extensivform* bezeichnet und beinhaltet eine vollständige Beschreibung des Spiels, einschließlich der Reihenfolge möglicher Spielzüge, Auszahlungen und Informationen, die für jeden einzelnen Spieler für jeden einzelnen Zug verfügbar sind. Abbildung 2.1 zeigt den Kampf der Geschlechter im Fall von John und Mary in der Extensivform.

John und Mary könnten stattdessen beschließen, der Sackgasse zu entkommen, indem sie eine Münze werfen. Was wäre dann? Bringen die beiden ein Zufallselement in

Kampf der Geschlechter als sequenzielles Spiel



Der Kampf der Geschlechter als sequenzielles Spiel, in dem die Spieler abwechselnd über ihre Spielzüge entscheiden und die vorangegangenen Spielzüge kennen.

Abb. 2.1 Kampf der Geschlechter in der Extensivform.

das Spiel ein, handelt es sich formal nicht um eine reine Strategie, sondern um ein *Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien*, und die erste Wahl eines Spielers ist damit auf die Wahrscheinlichkeiten reduziert, die mit dem eingebrachten Zufallselement einhergehen. Da Mary und John sich nun entscheiden, in jedem gegebenen Spiel eine Münze zu werfen, haben sie jeweils eine 50%ige Chance, dass die Entscheidung auf ihre jeweils erste Wahl fällt. Sie könnten aber auch Schere-Stein-Papier spielen und ihre jeweilige Gewinnchance damit auf 2:3 zu erhöhen. In jeder Spielrunde liegt die Gewinnchance dann bei 1:3. Und wenn sie nun umschwenken und lieber Streichhölzer ziehen wollen, liegt die ihre jeweilige Gewinnchance bei 1:Gesamtzahl der Streichhölzer.

Und an diesem Punkt gelang dem genialen Mathematiker John Nash, dem „Beautiful Mind“, wie er in Anlehnung an den preisgekrönten Spielfilm, der seine Lebensgeschichte skizziert, auch genannt wird, ein geradezu brillan-

Gutes Denken

Wie Experten Entscheidungen fällen

Cummins, D.D.

2015, VII, 350 S. 19 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-642-41809-9