

The background of the page is a light gray with a large, faint number '9' in the top left corner. Overlaid on this are several thin, light gray circles of varying sizes that overlap each other and the number '9'.

Kapitel 9

**Räumlicher Spannungszustand**

**9**

---

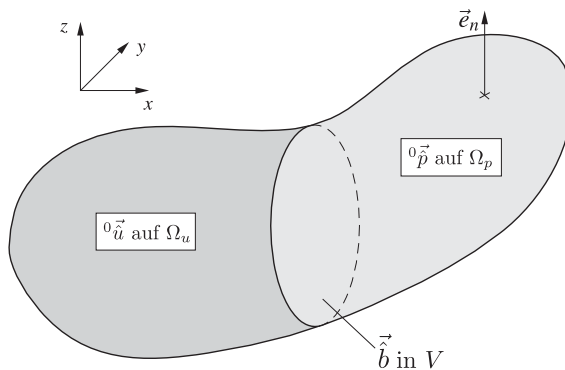
<b>9</b>	<b>Räumlicher Spannungszustand</b>	
9.1	Problemdefinition .....	297
9.2	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems.....	297
9.2.1	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems .....	298
9.3	Das Funktional des räumlichen Problems .....	300
9.4	Das vierknotige Tetraederelement .....	301
9.4.1	Volumenkoordinaten.....	301
9.4.2	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	302
9.5	Diskretisierung des Funktional .....	302
9.5.1	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes ....	302
9.5.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung .....	304
9.5.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung .....	307
9.5.4	Variation des diskretisierten Funktional .....	308
9.5.5	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	308
9.5.6	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement .....	312
9.5.7	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement .....	312
9.5.8	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement .....	314
9.5.9	Konvergenztest in den Verformungen .....	315
9.5.10	Konvergenztest in den Spannungen .....	316
9.5.11	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem.....	317

# 9 Räumlicher Spannungszustand

## 9.1 Problemdefinition

9.1

Das Bild 9.1 zeigt einen dreidimensionalen<sup>1</sup>, linear elastischen Körper mit einem Volumen  $V$  und einer Oberfläche  $\Omega$ . Er wird in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben. Die natürlichen Randbedingungen bestehen aus Flächenlasten  ${}^0\vec{p}$ . Die wesentlichen Randbedingungen  ${}^0\vec{u}$  stellen sich als bekannte Verschiebungen auf der Oberfläche  $\Omega_u$  dar.



**Bild 9.1.** Ein linear elastischer Körper mit dem Volumen  $V$

## 9.2 Die Grundgleichungen des räumlichen Problems

9.2

Im Tonti-Diagramm nach Bild 9.2 sind die drei Feldgleichungen des räumlichen Problems angeführt. Diese sind das Verschiebungsfeld  $\vec{u}$ , das Dehnungsfeld  $\vec{\varepsilon}$  und das Spannungsfeld  $\vec{\sigma}$ . Weiterhin sind im Tonti-Diagramm die wesentlichen und natürlichen Randbedingungen angeführt.

### ⊗ Verschiebungen

Das vektorielle Verschiebungsfeld  $\vec{u}(x, y, z)$  enthält die Komponenten  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  und  $w(x, y, z)$ .  $u$  ist die Verschiebung in  $x$ -Richtung,  $v$  die in  $y$ -Richtung und  $w$  die Verschiebung in  $z$ -Richtung:

$$\vec{u}^T = \left[ u(x, y, z) \mid v(x, y, z) \mid w(x, y, z) \right] \quad (731)$$

<sup>1</sup>Ausgangspunkt der Betrachtung des räumlichen Spannungszustandes ist die Darstellung elastostatischer Probleme im Kap. 3 auf der S. 61 für den dreidimensionalen Fall.

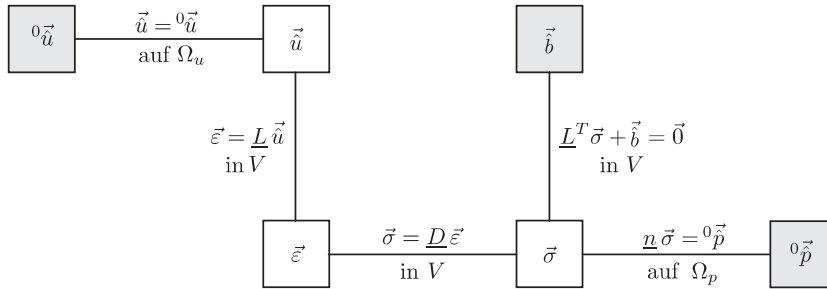


Bild 9.2. Das räumliche Spannungsproblem im Tonti-Diagramm dargestellt

### ⊗ Dehnungen

Das Dehnungsfeld ist ein dyadisches Feld (s. (33) auf der S. 29) mit den sechs Komponenten  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  und  $\gamma_{zx}$ . Die Dehnungen werden wie auch die Spannungen im Rahmen der FEM als Vektor geschrieben:

$$\vec{\varepsilon}^T = \left[ \varepsilon_{xx} \mid \varepsilon_{yy} \mid \varepsilon_{zz} \mid \gamma_{xy} \mid \gamma_{yz} \mid \gamma_{zx} \right] \quad (732)$$

### ⊗ Spannungen

Das Spannungsfeld stellt sich als dyadisches Feld mit den sechs Komponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  und  $\sigma_{zx}$  dar. Sie werden analog zu den Dehnungen in Vektorform geschrieben:

$$\vec{\sigma}^T = \left[ \sigma_{xx} \mid \sigma_{yy} \mid \sigma_{zz} \mid \sigma_{xy} \mid \sigma_{yz} \mid \sigma_{zx} \right] \quad (733)$$

#### ➤ 9.2.1 Die Feldgleichungen des räumlichen Problems

Die drei Felder des räumlichen Problems werden über die drei Feldgleichungen (Kinematik-, Stoff- und Gleichgewichtsgleichung) miteinander verknüpft.

### ⊗ Kinematische Beziehung

Die kinematische Beziehung  $\vec{\varepsilon} = \underline{L} \vec{u}$  (s. Bild 9.2) lautet in ausführlicher Schreibweise:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{L}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underline{L} \vec{u} \quad (734)$$

Über den Differentialoperator  $\underline{L}$  werden die Verschiebungen  $\vec{u}$  mit den Dehnungen  $\vec{\varepsilon}$  verknüpft.

### ⊗ Stoffgleichungen

Mit Hilfe der Stoffmatrix  $\underline{D}$  und der Beziehung  $\vec{\sigma} = \underline{D} \vec{\varepsilon}$  lassen sich aus den Dehnungen  $\vec{\varepsilon}$  die Spannungen  $\vec{\sigma}$  berechnen. In ausführlicher Form:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}}_{\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \alpha & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \underline{D} \vec{\varepsilon} \quad (735)$$

In der Stoffmatrix  $\underline{D}$  tritt für den isotropen Fall neben dem Elastizitätsmodul  $E$  noch die Querkontraktion  $\nu$  auf ( $\alpha = 1 - \nu$ ,  $\beta = (1 - 2\nu)/2$ ).

### ⊗ Gleichgewichtsbeziehung

Die Gleichgewichtsbeziehung  $\underline{L}^T \vec{\sigma} + \vec{b} = \vec{0}$  (s. Bild 9.2) schreibt sich in ausführlicher Form:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \\ \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{xy}} \\ \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{zx}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_x}{b_y} \\ \frac{b_z}{b_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (736)$$

Der Vektor  $\vec{b}$  beschreibt sogenannte Volumenkräfte. Dies sind innere Kräfte, die an das Volumen gekoppelt sind. Mit Hilfe des Beschleunigungsvektors  $\vec{g}$  und der Dichte  $\rho$  lassen sie sich schreiben als:  $\vec{b}^T = \rho \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}$ .

### ⊙ Randbedingungen

Die wesentlichen Randbedingungen  $\vec{u} = {}^0\vec{u}$  werden dem Rand  $\Omega_u$  aufgeprägt (s. Bild 9.1), wobei auch punktförmige Lagerungen möglich sind.

Die natürlichen Randbedingungen der Form  $\underline{n} \vec{\sigma} = {}^0\vec{p}$  werden dem Rand  $\Omega_p$  zugeordnet. Dabei stellt sich  ${}^0\vec{p}$  als aufgeprägte Flächenlast dar. Die Matrix  $\underline{n}$  ist in (151) auf der S. 63 definiert.

## 9.3

### 9.3 Das Funktional des räumlichen Problems

Das Gesamtpotential für den räumlichen Fall lautet:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} dV - \int_V \vec{u}^T \vec{b} dV - \int_{\Omega} \vec{u}^T \vec{p} dA - \vec{u}^T \vec{F} \quad (737)$$

Die Formänderungsarbeit  $1/2 \int_V \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} dV$  läßt sich über die Beziehungen (734) und (735) beschreiben. In dem Potential der Volumenkräfte  $\int_V \vec{u}^T \vec{b} dV$  geht das Verschiebungsfeld nach (731) ein. Der Vektor  $\vec{b} = \rho \vec{g}$  enthält die Dichte  $\rho$  und einen Beschleunigungsvektor  $\vec{g}$ . Der Term  $\int_{\Omega} \vec{u}^T \vec{p} dA$  erfaßt die Flächenlast  $\vec{p}$ , die auf der Fläche  $\Omega_p$  zu finden ist. Der letzte Term in (737) beschreibt das Potential der Einzelkräfte.

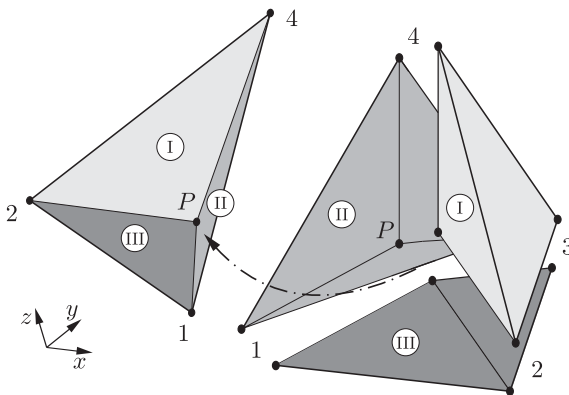
## 9.4 Das vierknotige Tetraederelement

9.4

### 9.4.1 Volumenkoordinaten

In Bild 9.3 ist ein Tetraeder in vier Teilvolumina zerlegt worden, wobei ein Teilvolumen aus dem Tetraeder herausgedreht worden ist. Die Eckpunkte sind jeweils mit den Ziffern 1 bis 4 belegt. Im Tetraeder wird ein Punkt  $P$  betrachtet. Die Teilvolumina werden dadurch gebildet, daß von  $P$  Kanten zu den Eckpunkten gezogen werden. Diese wiederum bilden Flächen, die sich gleichzeitig als Schnittflächen zwischen den Teilvolumina darstellen. Zur Einführung der Volumenkoordinaten  $L_1, L_2, L_3$  und  $L_4$  werden nachfolgende Verhältnisse zwischen den Teilvolumina und dem Volumen  $V$  des Tetraeders gebildet:

$$L_1 = \frac{V_{234}}{V} ; \quad L_2 = \frac{V_{134}}{V} ; \quad L_3 = \frac{V_{124}}{V} ; \quad L_4 = \frac{V_{123}}{V} \quad (738)$$



**Bild 9.3.** Tetraederelement in vier Teilvolumina unterteilt

Das Teilvolumen  $V_{ijk}$  ist das Volumen, das die Eckpunkte  $ijk$  aufweist. Mit Hilfe der nachfolgenden Beziehung lassen sich die Volumenkoordinaten  $L_1$  bis  $L_4$  eines Punktes  $P$ , der innerhalb des Tetraeders liegt, in kartesische Koordinaten umrechnen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}}_{\vec{L}} \quad (739)$$

### 9.4.2 Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten

In Bild 9.4 ist ein vierknotiges Tetraederelement in einem globalen Koordinatensystem dargestellt. Es weist die Knoten 1 bis 4 auf. Für den dritten Knoten sind die Freiheitsgrade des Knotens, nämlich die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  eingezeichnet. Knoten 1 zeigt die möglichen Belastungen eines Knotens.

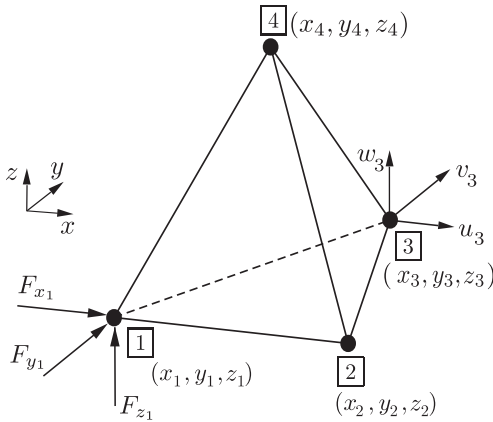


Bild 9.4. Tetraederelement in einem globalen  $x, y, z$ -Koordinatensystem

## 9.5

## 9.5 Diskretisierung des Funktional

### 9.5.1 Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes

#### Ansatzfunktion für die Verschiebungen

Die Ansatzfunktion für die drei Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  wird in den Volumenkoordinaten formuliert. Es steht  $\phi$  stellvertretend für  $u$ ,  $v$  oder  $w$ :

$$\phi = a_0 + a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = \vec{a}^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{a} \quad (740)$$

#### Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} \phi(L_1 = 1, L_2 = L_3 = L_4 = 0) &= \phi_1 \Rightarrow a_0 + a_1 = \phi_1 \\ \phi(L_2 = 1, L_1 = L_3 = L_4 = 0) &= \phi_2 \Rightarrow a_0 + a_2 = \phi_2 \\ \phi(L_3 = 1, L_1 = L_2 = L_4 = 0) &= \phi_3 \Rightarrow a_0 + a_3 = \phi_3 \\ \phi(L_4 = 1, L_1 = L_2 = L_3 = 0) &= \phi_4 \Rightarrow a_0 = \phi_4 \end{aligned} \quad (741)$$

Als lineares Gleichungssystem geschrieben:



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}}_{\vec{\phi}} \quad (742)$$

Einsetzen von  $\vec{a} = \underline{A}^{-1} \vec{\phi}$  in (740) führt auf die Formfunktionen  $\vec{N}$ :

$$\begin{aligned} \phi &= \vec{x}^T \underline{A}^{-1} \vec{\phi} = \left[ 1 \mid L_1 \mid L_2 \mid L_3 \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{\phi} \\ &= \underbrace{\left[ L_1 \mid L_2 \mid L_3 \mid \overbrace{1 - L_1 - L_2 - L_3}^{L_4} \right]}_{\vec{N}^T} \vec{\phi} \end{aligned} \quad (743)$$

Damit lassen sich die drei Verschiebungen  $u, v, w$  ausdrücken als:

$$\begin{aligned} u &= L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 + L_4 u_4 = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ v &= L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3 + L_4 v_4 = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \\ w &= L_1 w_1 + L_2 w_2 + L_3 w_3 + L_4 w_4 = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 \end{aligned} \quad (744)$$

Die Größen  $u_i, v_i$  und  $w_i$  sind die Verschiebungen im Knoten  $i$ . Die voranstehenden Gleichungen lassen sich in Matrixform schreiben als:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} \quad (745)$$

Der Vektor  $\vec{u}$  enthält die Verschiebungen im Element, die Matrix  $\underline{N}$  die Formfunktionen und der Vektor  $\vec{u}$  die Knotenverschiebungen.

### ► 9.5.2 Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung

Der Dehnungsvektor  $\vec{\varepsilon}$  in (734) läßt sich mit (745) schreiben als:

$$\vec{\varepsilon} = \underline{L} \vec{u} = \underline{L} \underline{N} \vec{u} = \underline{B} \vec{u} \quad (746)$$

Die Verschiebungen sind nach (744) in Volumenkoordinaten beschrieben. Daher muß der Operator  $\underline{L}$  aus (746) ebenfalls in Volumenkoordinaten ausgedrückt werden. Nach der Kettenregel erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial L_1} &= \frac{\partial x}{\partial L_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial L_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial L_1} \frac{\partial}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial L_2} &= \frac{\partial x}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial L_2} \frac{\partial}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial L_3} &= \frac{\partial x}{\partial L_3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial L_3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial L_3} \frac{\partial}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (747)$$

In Matrizenform:

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

Steinke, P.

2015, XVI, 485 S. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-53936-7