

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM	3
1.2	Verschiedene Elementtypen	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung	11
2	Mathematische Grundlagen	
2.1	Schreibweisen	19
2.2	Vektoren	20
2.2.1	Definition eines n dimensionalen Vektors	20
2.2.2	Skalarprodukt	20
2.2.3	Kreuzprodukt	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor	22
2.2.6	Der Gradientenvektor	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator	23
2.3	Matrizen	23
2.3.1	Definition einer Matrix	23
2.3.2	Rechenregeln	24
2.3.3	Transponierte Matrix	26
2.3.4	Orthogonale Matrix	26
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe)	27
2.4.1	Differentialoperator	27
2.4.2	Tensor höherer Stufe	28
2.5	Felder	28
2.5.1	Skalarfelder	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes	28
2.5.3	Das dyadische Feld	29
2.6	Lineare Transformation	31
2.6.1	Transformation eines Vektors	31
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe)	33
2.6.3	Beispiele zur Transformation	34
2.7	Funktionale	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktional	37
2.8	Dreieckskoordinaten	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix)	40
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten	43
2.9	Numerische Integration (Quadratur)	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten	46
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM	47
2.10.1	Definition der Bandbreite	48
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme	49
2.10.3	Positiv definite Matrix	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen	55
2.11	Näherungsfehler bei der FEM	57
2.12	Das Tonti-Diagramm	58
3	Beschreibung elastostatischer Probleme	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	62
3.1.4	Randbedingungen	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential	65
4	Das Verfahren von Ritz	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials	80
4.4	Scheibenproblem	84
4.4.1	Verschiebungsansätze	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem	89

5	Stabelemente	
5.1	Das eindimensionale Stabelement	95
5.1.1	Problemdefinition	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktional des Stabes	98
5.1.5	Variation des Funktional	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	109
5.1.8	Allgemeine Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	112
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab	116
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes	118
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit n Knoten	119
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten	121
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement	122
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement	122
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem	126
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	130
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	133
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement	136
6	Balkenelemente	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	141
6.1.1	Problemdefinition	141
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken	142
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens	143
6.1.4	Funktional des Balkenproblems	144
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	145
6.1.6	Diskretisierung des Funktional	147
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktional	149
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix	150
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	151
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes	153
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken	155
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast.....	155
6.2.2	Konvergenztest zum zweiknotigen Balkenelement.....	159
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	161
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	163
6.4	Balkenelement mit n Knoten und p Freiheitsgraden pro Knoten	166
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten	169

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten	173
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung	176
6.6	Der Timoshenko-Balken	177
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken	183
6.6.2	„Locking-Effect“	184
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken	186
6.7	Der elastisch gelagerte Balken	187
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	189
6.8	Zweidimensionales Balkenelement	194
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens	194
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	194
6.8.3	Steifigkeitsmatrix	195
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix	197
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	200
6.9.1	Winkelproblem	200
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	206
7	Scheibenproblem	
7.1	Problemdefinition	211
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems	212
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe	213
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems	214
7.3.1	Diskretisierung des Funktionals	215
7.3.2	Variation des diskretisierten Funktionals	219
7.3.3	Diskretisierung der Volumenkräfte	221
7.3.4	Diskretisierung der Streckenlasten	224
7.3.5	Spannungen in der Scheibe	227
7.3.6	Beispiel zum Scheibenproblem	227
7.4	Übungsbeispiele zur Scheibe	233
7.5	Isoparametrisches Scheibenelement	236
7.5.1	Isoparametrische Viereckselemente	236
7.5.2	Das vierknotige Viereckselement	237
7.5.3	Beispiel zu möglichen Formen des Viereckselementes	242
7.5.4	Numerische Integration mittels Gauß-Quadratur	247
7.5.5	Diskretisierung der Volumenkräfte	250
7.5.6	Diskretisierung der Streckenlast	254
7.5.7	Berechnung der Spannungen	255
7.5.8	Lokale Glättung der Spannungen	255
7.5.9	Beispiel zur lokalen Spannungsglättung	257

7.5.10	Vergleich der Verformungen von Dreiecks- und Viereckselement	258
8	Platten- und Schalenelemente	
8.1	Problemdefinition	263
8.2	Grundbeziehungen der Platte	263
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte	263
8.2.2	Kinematische Größen der Platte	265
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung)	266
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte	268
8.2.5	Randbedingungen der Platte	268
8.3	Das Funktional der Platte	269
8.4	Anforderungen an das Plattenelement	271
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente)	271
8.4.2	Starrkörperbewegung	272
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand)	273
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente	273
8.5	Diskretisierung des Funktionalis	275
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung	275
8.5.2	Interpolationsbedingungen	276
8.5.3	Formfunktionen	279
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung	280
8.5.5	Steifigkeitsmatrix	280
8.5.6	Flächenlast	282
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante	282
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes	284
8.6.1	Vergleich der Platten nach DKT und Specht	285
8.7	Schalenelement	286
8.7.1	Konvergenztest für verschiedene Schalenelementtypen ...	292
9	Räumlicher Spannungszustand	
9.1	Problemdefinition	297
9.2	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems	297
9.2.1	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems	298
9.3	Das Funktional des räumlichen Problems	300
9.4	Das vierknotige Tetraederelement	301
9.4.1	Volumenkoordinaten	301
9.4.2	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	302
9.5	Diskretisierung des Funktionalis	302
9.5.1	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes	302
9.5.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	304
9.5.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung	307

9.5.4	Variation des diskretisierten Funktionalis	308
9.5.5	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	308
9.5.6	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement	312
9.5.7	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement	312
9.5.8	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement	314
9.5.9	Konvergenztest in den Verformungen	315
9.5.10	Konvergenztest in den Spannungen	316
9.5.11	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem.....	317
10	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben, Balken, Scheiben und Platten	
10.1	Das Prinzip von Hamilton.....	321
10.1.1	Diskretisierung des Wirkungsfunktionalis	321
10.1.2	Eigenwerte und Eigenfrequenzen.....	323
10.1.3	Eigenvektoren und Schwingungsformen	324
10.2	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....	324
10.3	Beispiele zum eindimensionalen Stab	325
10.3.1	Einmassenschwinger	325
10.3.2	Zweimassenschwinger	326
10.3.3	Übungsbeispiel zur Stabschwingung.....	329
10.4	Massenmatrix des zweidimensionalen Stabes.....	329
10.4.1	Beispiel zum zweidimensionalen Stab	330
10.5	Der eindimensionale, zweiknotige Balken	333
10.5.1	Der eindimensionale Balken mit Längsverschiebung	333
10.5.2	Der eindimensionale Balken ohne Längsverschiebung.....	334
10.5.3	Beispiele zum eindimensionalen Balken.....	334
10.5.4	Beidseitig gelenkig gelagerter Balken	335
10.5.5	Kragbalken	337
10.5.6	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung	340
10.6	Massenmatrix des zweidimensionalen Balkens.....	340
10.6.1	Beispiel zum 2D-Balken	341
10.7	Massenmatrix des dreiknotigen Scheibenelementes	344
10.7.1	Beispiel zur Eigenfrequenz einer Scheibe	344
10.8	Massenmatrix der Platte nach Specht	347
11	Knicken von Stäben und Balken	
11.1	Green-Lagrange Dehnungstensor.....	353
11.2	Formänderungsarbeit des Stabes.....	354
11.3	Dehnungen und Formänderungsarbeit des Balkens.....	355
11.4	Das zweiknotige Stabelement	356
11.5	Das zweiknotige Balkenelement	358
11.6	Das Knicken als Eigenwertproblem	361

11.6.1	Beispiel zum Knicken von Stäben	363
11.6.2	Knickbeispiel I (Stab)	367
11.6.3	Beispiel zum Knicken von Balken	368
11.6.4	Die vier Eulerfälle	370
11.6.5	Knickbeispiel II (Balken)	371
11.6.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement)	371
12	Feldprobleme	
12.1	Wärmeübertragung	377
12.1.1	Die Poisson'sche Gleichung	377
12.1.2	Randbedingungen	377
12.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung	378
12.2	Eindimensionale Wärmeübertragung	379
12.2.1	Problemdefinition	379
12.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems	380
12.2.3	Diskretisierung des Funktionalis	380
12.2.4	Variation des Funktionalis	384
12.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung	384
12.2.6	Übungsbeispiele zur eindimensionalen Wärmeübertragung	389
12.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung	392
12.3.1	Problemdefinition	392
12.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung	392
12.3.3	Diskretisierung des Funktionalis	393
12.3.4	Variation des Funktionalis	400
12.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	402
12.3.6	Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	407
12.4	Torsion von prismatischen Körpern	411
12.4.1	Funktional des Torsionsproblems	414
12.5	Analogie zwischen Wärmeübertragung und Schichtenströmung	417
12.5.1	Problembeschreibung	417
12.5.2	Grundgleichungen der Schichtenströmung	417
12.5.3	Analogie der Randbedingungen	419
12.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems	420
13	CALL_for_FEM	
13.1	Übersicht über CALL_for_FEM	425
13.1.1	Erstinstallation von CALL_for_FEM auf dem Rechner	426
13.1.2	Installation einer neuen Version von CALL_for_FEM	426
13.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen	427

13.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons	427
13.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel	428
13.2	Numerische Programme	429
13.3	Symbolische Programme	430
13.3.1	Symbolische Programme in Maple und Python	430
13.3.2	Symbolische Programme in Maple realisiert	432
13.4	Ausführliche Programmbeschreibungen	433
13.4.1	Das Programm InterFEM	433
13.4.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab)	434
13.4.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken)	436
13.4.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	438
13.4.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D)	440
13.4.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D)	442
13.4.7	Timoshenko-Balken (Timoshenko_1D)	443
13.4.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck)	444
13.4.9	Plattenelement (Platte)	445
13.4.10	Knicken des eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	445
13.4.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken)	447
13.4.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D)	448
13.4.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D)	449
14	Beispiele zu den Programmen	
14.1	Elastisch gelagerter Balken	453
14.2	Scheibe gestützt durch eine Feder	454
14.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Drei- ecks (Quadrates)	456
	Verwendete Formelzeichen und Symbole	461
	Literaturverzeichnis	473
	Sachverzeichnis	477
	Programme	485

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

Steinke, P.

2015, XVI, 485 S. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-53936-7