Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme

2

Teil I

Wie lassen sich Drehungen mathematisch beschreiben?

Was sind Galilei-Transformationen?

Wie lauten die Newton'schen Axiome in beschleunigten Bezugssystemen?

Was ist die Zentrifugalkraft?

Warum werden Kugelkoordinaten verwendet?

M. Bartelmann et al., *Theoretische Physik*, DOI 10.1007/978-3-642-54618-1_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Die Untersuchung des Verhaltens eines physikalischen Systems unter einer Koordinatentransformation ist ein zentraler Punkt in der gesamten theoretischen Physik. Wird ein physikalisches System nach einer Koordinatentransformation durch dieselben Gleichungen beschrieben wie vorher, so heißt es symmetrisch unter dieser Transformation.

Symmetrien spielen in der Physik eine herausragende Rolle, was in Kap. 5 herausgearbeitet wird. Das Interesse an den Symmetrieeigenschaften physikalischer Systeme ist deswegen so wichtig, da Symmetrien in der Regel auf Erhaltungsgrößen führen. Beispiele hierfür sind die Energieerhaltung aufgrund der Zeittranslationsinvarianz (Symmetrie unter Verschiebung des Zeitnullpunktes) oder die Impulserhaltung aufgrund der Homogenität des Raumes (Symmetrie unter räumlichen Translationen). Wir werden darauf in Kap. 5 genauer eingehen.

In diesem Kapitel werden zahlreiche mathematische Werkzeuge eingeführt, um Koordinatentransformationen und beschleunigte Bezugssysteme beschreiben zu können. Dazu gehören z. B. die Drehmatrizen (Abschn. 2.1) sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten (Abschn. 2.5). Des Weiteren wird ein Schwerpunkt auf die mit Koordinatentransformationen verbundene Physik gelegt. Beispielsweise lässt eine bestimmte Klasse von Koordinatentransformationen, den Galilei-Transformationen (Abschn. 2.2), die Newton'schen Bewegungsgleichungen invariant. Beschleunigte Bezugssysteme andererseits erfordern Erweiterungen der Bewegungsgleichungen, was letztlich auf die Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte führt (Abschn. 2.3 und 2.4).

2.1 Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen

Wir werden uns im Folgenden mit Drehungen von kartesischen Koordinatensystemen im dreidimensionalen Raum beschäftigen. Dabei wird im Normalfall nicht das betrachtete physikalische System selbst im Raum gedreht, sondern das beschreibende Koordinatensystem. Als Konsequenz aus diesen sogenannten passiven Drehungen ändern sich die Koordinaten des Ortes einer Punktmasse, nicht jedoch ihre Lage bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems. Drehungen von Vektoren lassen sich dabei durch orthogonale Matrizen darstellen, deren mathematische Eigenschaften vorgestellt werden. Schließlich werden die Transformationsgleichungen für Vektoren unter Drehungen abgeleitet.

Darstellung des Ortsvektors in einem Koordinatensystem

Es ist deutlich zu unterscheiden zwischen einem physikalischen Vektor (z. B. dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$) und seiner *Darstellung* in einem gegebenen Koordinatensystem. Der Vektor $\mathfrak{x}$ kann durch seine Komponenten (x_1, x_2, x_3) bezüglich einer geeigneten Basis $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ als

$$\mathfrak{x} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{2.1}$$

dargestellt werden. Oftmals werden dabei die drei Koordinaten in der Form

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

zusammengefasst. Mit dem *Koordinatenvektor* $\boldsymbol{x}$ lässt sich dann wie gewohnt rechnen. Man sagt auch, dass $\mathfrak{x}$ nach den Basisvektoren entwickelt wird. Die Koordinaten sind jeweils die Projektionen des Vektors $\mathfrak{x}$ auf die drei Koordinatenachsen entlang $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, also $x_i = \mathfrak{x} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Hierbei nehmen wir an, dass die Basisvektoren eine Orthonormalbasis bilden und somit $\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij}$ erfüllen. Weiterhin sollen die $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ ein *rechtshändiges Dreibein* bilden, d. h. $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2$. Wir nennen physikalische Vektoren wie $\mathfrak{x}$ auch *abstrakte* Vektoren, da sie unabhängig von irgendeiner Wahl des Koordinatensystems sind.

Achtung Es ist unbedingt zu unterscheiden zwischen einem physikalischen Vektor $\mathfrak{x}$ und seiner Darstellung $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ bezüglich einer gewählten Basis, d. h. eines festgelegten Koordinatensystems. Die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) hängen von der Wahl der Basis ab, der Vektor $\mathfrak{x}$ ist allerdings völlig unabhängig von der Wahl irgendeiner Basis. Oftmals tritt Verwirrung auf, da $\boldsymbol{x}$ ebenfalls als Vektor bezeichnet wird. Dies liegt daran, dass es sich bei $\boldsymbol{x}$ um einen *mathematischen* Vektor handelt („Mathematischer Hintergrund 1.1"). In diesem Buch werden wir dennoch häufig auf die bequemere Formulierung ausweichen und $\boldsymbol{x}$ als den Ortsvektor bezeichnen, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind. In den wenigen Fällen, bei denen eine Unterscheidung zwischen $\mathfrak{x}$ und $\boldsymbol{x}$ notwendig ist, wird dies explizit betont. ◀

Frage 1

Machen Sie sich klar, dass die Darstellungen der drei Basisvektoren in ihrem eigenen Koordinatensystem stets $(1, 0, 0)^\top$, $(0, 1, 0)^\top$ und $(0, 0, 1)^\top$ lauten.

Physikalische Vorgänge sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, da Koordinatensysteme lediglich der Darstellung dienen, physikalische Prozesse aber nicht beeinflussen. Dies erlaubt das geschickte Auswählen eines Koordinatensystems, in welchem die resultierenden Gleichungen möglichst einfach werden. Ein Beispiel haben wir bereits in Abschn. 1.3 gesehen: Dort wurde das Koordinatensystem so gewählt, dass die Bewegung der Punktmasse entlang der z-Achse erfolgte. Genauso gut hätte man die Bewegung entlang der x-Achse oder innerhalb der y-z-Ebene definieren können.

Geht man von einem Koordinatensystem in ein anderes über, ohne das physikalische System als solches zu verändern, stellt sich die Frage nach den damit verbundenen Transformationsgleichungen für die Basisvektoren und die Koordinaten des

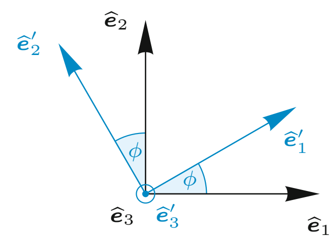


Abb. 2.1 Ein ungestrichenes Koordinatensystem (*schwarz*) wird um einen Winkel ϕ um die x_3-Achse gedreht und geht somit in ein neues, gestrichenes Koordinatensystem (*blau*) über

Ortsvektors. In diesem Kapitel werden wir uns daher mit den wichtigsten dieser Transformationen beschäftigen:

- zeitunabhängige und zeitabhängige Drehungen und Translationen von kartesischen Koordinatensystemen,
- Übergang von einem kartesischen zu einem nichtkartesischen Koordinatensystem, insbesondere zu Zylinder- und sphärischen Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten.

Es werden hierbei auch beschleunigte Koordinatensysteme und solche mit nichtkonstanten Basisvektoren zugelassen, was eine Modifizierung des zweiten Newton'schen Axioms erfordert.

Drehungen um eine Koordinatenachse

Stellen wir uns zunächst vor, dass ein vorher eingeführtes ungestrichenes Koordinatensystem S mit den kartesischen Basisvektoren $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ um einen Winkel ϕ um die x_3-Achse gedreht wird, wobei der Ursprung nicht verschoben wird (Abb. 2.1). Dadurch gehen die beiden Basisvektoren $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2$ in neue Basisvektoren $\hat{e}_1'$ und $\hat{e}_2'$ über. Das neue gestrichene Koordinatensystem S' ist ebenfalls kartesisch. Offenbar ist der Winkel zwischen $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_1'$ sowie zwischen $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_2'$ gerade der Winkel ϕ, während der Basisvektor $\hat{e}_3$ unverändert bleibt:

$$\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_1 = \cos\phi, \quad \hat{e}_2' \cdot \hat{e}_2 = \cos\phi, \quad \hat{e}_3' \cdot \hat{e}_3 = 1. \tag{2.3}$$

Diese Größen werden *Richtungskosinus* genannt.

Aus Abb. 2.1 erkennt man, dass zwischen $\hat{e}_1$ und $\hat{e}_2'$ der Winkel $\pi/2 + \phi$ und zwischen $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_1'$ der Winkel $\pi/2 - \phi$ ist:

$$\begin{aligned} \hat{e}_2' \cdot \hat{e}_1 &= \cos(\pi/2 + \phi) = -\sin\phi, \\ \hat{e}_1' \cdot \hat{e}_2 &= \cos(\pi/2 - \phi) = \sin\phi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Da $\hat{e}_3 = \hat{e}_3'$ ist, verschwinden alle übrigen Skalarprodukte $a_{ij} := \hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Zusammengefasst lauten die 3×3 Zahlen a_{ij}

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\phi, & a_{12} &= \sin\phi, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= -\sin\phi, & a_{22} &= \cos\phi, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die neuen Basisvektoren lassen sich somit aus den alten berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1' &= \cos\phi\,\hat{e}_1 + \sin\phi\,\hat{e}_2, \\ \hat{e}_2' &= -\sin\phi\,\hat{e}_1 + \cos\phi\,\hat{e}_2, \\ \hat{e}_3' &= \hat{e}_3. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} \hat{e}_i' &= (\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_1)\hat{e}_1 + (\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_2)\hat{e}_2 + (\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_3)\hat{e}_3 \\ &= a_{i1}\hat{e}_1 + a_{i2}\hat{e}_2 + a_{i3}\hat{e}_3. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die entsprechende Umkehrung ist

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_1')\hat{e}_1' + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_2')\hat{e}_2' + (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_3')\hat{e}_3' \\ &= a_{1i}\hat{e}_1' + a_{2i}\hat{e}_2' + a_{3i}\hat{e}_3'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Frage 2

Man überprüfe die Gültigkeit von (2.6) anhand von Abb. 2.1 bzw. Gleichung (2.5).

Wie bereits betont, handelt es sich bei der oben diskutierten Koordinatentransformation um eine Drehung des Koordinatensystems, wobei das physikalische System selbst unverändert bleibt. In diesem Zusammenhang spricht man von *passiven Drehungen*. Dreht man im Gegensatz dazu das physikalische System in einem festen Koordinatensystem, bezeichnet man dies als *aktive Drehung*. Mathematisch sind beide Vorgänge äquivalent, physikalisch aber streng zu unterscheiden, da für eine aktive Drehung in der Regel Kräfte benötigt werden (und auch nicht immer möglich sind, z. B. bei Spiegelungen).

Passive Koordinatentransformation

Passive Koordinatentransformationen entsprechen dem Wechsel von einem Koordinatensystem zu einem anderen. Sie haben keine Auswirkung auf physikalische Größen, ändern aber in der Regel ihre Darstellung.

Darstellung von Drehungen durch Matrizen

Die 3×3 Zahlen a_{ij} aus (2.5) lassen sich durch das rechteckige Zahlenschema einer *quadratischen Matrix* darstellen:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Matrizen und ihre grundlegenden Rechenregeln werden im „Mathematischen Hintergrund" 2.1 besprochen. Die Matrix $\boldsymbol{A}$

2.1 Mathematischer Hintergrund: Matrizen I Definition und grundlegende Rechenregeln

In der Mathematik und der Physik sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen von großer Bedeutung. Im Falle des $\mathbb{R}^3$ sind dies beispielsweise Drehungen oder Spiegelungen. Solche linearen Abbildungen lassen sich mithilfe von Matrizen beschreiben.

Matrizen *Matrizen* (singular: Matrix) sind Zahlenschemata aus $M \times N$ Zahlen eines Körpers K, die in M Zeilen und N Spalten angeordnet sind:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} =: (a_{ij}).$$

Die Zahlen a_{ij} heißen *Matrixelemente*. Eine Matrix mit M Zeilen und N Spalten nennt man auch $M \times N$-Matrix. Jeder linearen Abbildung kann man (nachdem in den betreffenden Vektorräumen eine Basis gewählt wurde) genau eine Matrix zuordnen, und umgekehrt definiert jede Matrix (bei fester Basis) eine eindeutige lineare Abbildung. Eine spezielle Matrix ist die *Einheitsmatrix*

$$\boldsymbol{I} = (a_{ij}) \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \delta_{ij}.$$

Diese Matrix beschreibt die Identitätsabbildung.

Vektorraum der Matrizen Die $M \times N$-Matrizen bilden selbst wieder einen Vektorraum $\mathcal{M}_{MN}$ über K, wenn man die Addition und die Multiplikation mit Skalaren elementweise definiert:

$$\begin{aligned} + &: \mathcal{M}_{MN} \times \mathcal{M}_{MN} \to \mathcal{M}_{MN}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto (a_{ij} + b_{ij}), \\ \cdot &: K \times \mathcal{M}_{MN} \to \mathcal{M}_{MN}, \quad (\lambda, \boldsymbol{A}) \mapsto (\lambda a_{ij}). \end{aligned}$$

Man kann nur Matrizen addieren, bei denen sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenanzahl übereinstimmt.

Matrixmultiplikation Man definiert eine *Matrixmultiplikation* so, dass man $L \times M$-Matrizen mit $M \times N$-Matrizen multiplizieren kann, um $L \times N$-Matrizen zu erhalten:

$$\mathcal{M}_{LM} \times \mathcal{M}_{MN} \to \mathcal{M}_{LN}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \mapsto \boldsymbol{AB} = (a_{ij} b_{jk}).$$

Hier sind $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq M$ und $1 \leq k \leq N$. Die Summation über doppelte Indizes (hier über j von 1 bis M) wird implizit vorausgesetzt, d. h.

$$a_{ij} b_{jk} := \sum_{j=1}^{M} a_{ij} b_{jk}.$$

Das Matrixprodukt ist gerade so definiert, dass das Produkt zweier Matrizen der Verkettung der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht. Hierbei ist es wichtig, dass man zwei Matrizen nur dann multiplizieren kann, wenn die erste Matrix genauso viele Spalten wie die zweite Matrix Zeilen hat.

Rechenregeln für die Matrixmultiplikation Für das Matrixprodukt gelten folgende Rechenregeln, sofern man die beteiligten Matrizen addieren bzw. multiplizieren kann:

- $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ (Assoziativgesetz)
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$ (rechtes Distributivgesetz)
- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$ (linkes Distributivgesetz)
- $\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$ (Identitätsabbildung)

Im Allgemeinen gilt jedoch $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

Matrix-Vektor-Multiplikation Indem man die Koordinatendarstellungen von Spaltenvektoren aus N-dimensionalen Vektorräumen V_N als $N \times 1$-Matrizen auffasst, ist damit auch eine Multiplikation von $M \times N$-Matrizen mit N-dimensionalen Spaltenvektoren definiert, deren Ergebnis ein Vektor aus einem M-dimensionalen Vektorraum V_M ist:

$$\mathcal{M}_{MN} \times V_N \to V_M, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v}) \mapsto (a_{ij} v_j),$$

wobei $1 \leq i \leq M$ und $1 \leq j \leq N$ sind. Ebenso kann man Zeilenvektoren aus V_N als $1 \times N$-Matrizen auffassen und sie von rechts mit $N \times M$-Matrizen multiplizieren, um M-dimensionale Zeilenvektoren zu erhalten:

$$V_N \times \mathcal{M}_{NM} \to V_M, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}) \mapsto (v_i a_{ij}).$$

Man schreibt die Multiplikationen auch kurz in der Form $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{A}$.

Transponierte Die *Transponierte* einer Matrix wird definiert, indem man die beiden Indizes und damit Zeilen und Spalten vertauscht:

$$\boldsymbol{A}^\top = (a_{ij})^\top = (a_{ji}).$$

Somit gilt dann

$$\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{A} = v_i a_{ij} = a_{ji}^\top v_i = \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{v}.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $(\boldsymbol{AB})^\top = (a_{ij} b_{jk})^\top = (a_{kj} b_{ji}) = (a_{jk}^\top b_{ij}^\top) = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top$,
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$,
- $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$,
- $\boldsymbol{I}^\top = \boldsymbol{I}$.

Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Springer Spektrum (2014)
- Bosch, S.: Lineare Algebra. 4. Aufl., Springer (2007)

ist die *Drehmatrix*, welche die in Abb. 2.1 beschriebene Drehung vermittelt. Für eine allgemeine Transformation zwischen beliebigen kartesischen Koordinatensystemen gilt

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_1' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_1' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_2' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_3' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

oder in Kurzform $a_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j$. Solche Matrizen sind *orthogonale Matrizen*, die im „Mathematischen Hintergrund" 2.2 definiert werden und für die $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ gilt, wobei $\boldsymbol{I} = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix ist. Als Konvention für die Schreibweise legen wir fest, dass Matrizen durch Großbuchstaben, die Matrixelemente jedoch durch Kleinbuchstaben notiert werden, z. B. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ oder $\boldsymbol{R} = (r_{kl})$.

Frage 3

Man mache sich klar, warum nur quadratische Matrizen für Drehungen von Koordinatensystemen infrage kommen.

Sukzessive Drehungen

Im Folgenden wollen wir Drehmatrizen mit $\boldsymbol{R}$ (wie Rotation) bezeichnen. Sie bilden eine mathematische Untergruppe (siehe den „Mathematischen Hintergrund" 2.4) der allgemeineren orthogonalen Matrizen. Da sich Drehungen durch quadratische Matrizen ausdrücken lassen, können nacheinander ausgeführte mehrfache Drehungen eines Bezugssystems mithilfe der Matrixmultiplikation formuliert werden. Eine solche mehrfache Rotation ist in vielen Bereichen der theoretischen Physik von großer Bedeutung. Wird ein Koordinatensystem nacheinander durch N Rotationen $\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_N$ gedreht, so ist dies äquivalent zu einer Drehung mit der Matrix

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_N \boldsymbol{R}_{N-1} \ldots \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 . \tag{2.11}$$

Die Reihenfolge der $\boldsymbol{R}_i$ ist dabei derart, dass dasjenige $\boldsymbol{R}_i$, das als Erstes auf einen Vektor wirken soll, ganz rechts und somit unmittelbar „vor" dem Vektor steht (und folglich zuerst multipliziert wird).

Achtung Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Multiplikation ab. Physikalisch bedeutet dies, dass das Ergebnis aufeinanderfolgender Drehungen im Raum von deren Reihenfolge abhängt (Abb. 2.2). ◀

Reihenfolge von Drehungen

Betrachten wir zwei Drehungen, die erste um einen Winkel ϕ um die $\hat{\boldsymbol{e}}_3$-Achse, die zweite um einen Winkel ψ um die ursprüngliche $\hat{\boldsymbol{e}}_2$-Achse. Die beiden Drehmatrizen lauten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_1 &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{R}_2 &= \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wendet man die Regeln der Matrixmultiplikation an, findet man für die resultierende Drehmatrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi\, \cos\psi & \sin\phi\, \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi\, \sin\psi & -\sin\phi\, \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Im Gegensatz dazu würde eine Drehung vermittelt durch $\boldsymbol{R}_2$ gefolgt von $\boldsymbol{R}_1$ auf die Drehmatrix

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 = \\ &\begin{pmatrix} \cos\phi\, \cos\psi & \sin\phi & \cos\phi\, \sin\psi \\ -\sin\phi\, \cos\psi & \cos\phi & -\sin\phi\, \sin\psi \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.14}$$

führen. Offensichtlich sind beide Ergebnisse unterschiedlich. ◀

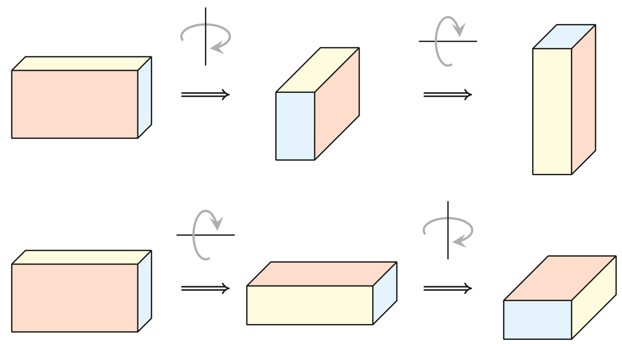


Abb. 2.2 Bei aufeinanderfolgenden Drehungen spielt die Reihenfolge der Einzeldrehungen eine Rolle. Im *oberen Beispiel* wird ein Quader um zwei zueinander senkrechte Achsen gedreht. Vertauscht man die Reihenfolge, ist das Resultat unterschiedlich (*unteres Beispiel*)

Frage 4

Rechnen Sie die beiden Produkte in (2.13) und (2.14) komponentenweise nach, wobei Sie die Regeln der Matrixmultiplikation verwenden.

In Kap. 4 werden wir sehen, dass eine räumliche Drehung um eine beliebige Achse stets durch drei sukzessive Drehungen um

Teil I

2.2 Mathematischer Hintergrund: Matrizen II Determinanten

Wir haben bereits Matrizen und deren Bedeutung kennengelernt. Hier wollen wir uns nun noch etwas genauer mit ihnen beschäftigen. Außerdem werden wir die Determinante kennenlernen, die für Matrizen eine große Bedeutung hat. Dafür benötigen wir Permutationen.

Permutationen Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge in sich selbst. Anders gesagt, vertauscht (permutiert) eine Permutation nur die Reihenfolge der Elemente einer Menge. Meist werden Permutationen auf einer endlichen Indexmenge (d. h. einer endlichen Menge von Zahlen $\{1,\ldots,N\}$) betrachtet. Die Menge dieser Permutationen bezeichnet man dann mit S_N.

Findet eine gerade Anzahl von Vertauschungen (von je zwei Elementen) statt, so nennt man die Permutation *gerade*, ansonsten *ungerade*. Entsprechend ist für eine Permutation π das *Signum* $\operatorname{sgn}(\pi)$ definiert als 1, wenn π gerade ist, und als -1, wenn π ungerade ist. Da die Indizes $\{1,\ldots,N\}$ auf $N\cdot(N-1)\cdots 1 = N!$ verschiedene Arten permutiert werden können, enthält S_N genau $N!$ Elemente. Davon sind genau $N!/2$ gerade.

Determinante Die *Determinante* einer Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{NN}$ ist definiert als

$$\det(\boldsymbol{A}) := \sum_{\pi\in S_N} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{N\pi(N)}.$$

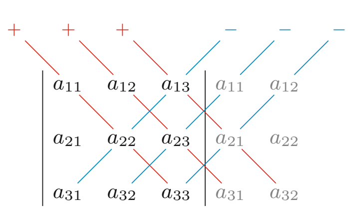
Statt $\det(\boldsymbol{A})$ schreibt man auch $|\boldsymbol{A}|$. Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für $N = 2$ lautet die obige Formel

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und für $N = 3$

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}) &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}.\end{aligned}$$

Diese Formel nennt man auch *Regel von Sarrus*, die man sich folgendermaßen grafisch vorstellen kann:



Man kann sich merken, dass die Produkte der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) minus der Produkte der Nebendiagonalen (von rechts oben nach links unten) genommen werden.

Normalerweise wird die Determinante etwas anders definiert und die obige Formel daraus gefolgert. Für uns werden die obige Definition und die folgenden Rechenregeln (die im Wesentlichen alle Details der „richtigen" Definition der Determinante enthalten) jedoch ausreichen.

Rechenregeln für die Determinante

- $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
- $\det(\boldsymbol{A}^\top) = \det(\boldsymbol{A})$
- $\det(\lambda\boldsymbol{A}) = \lambda^N \det(\boldsymbol{A})$
- sind in $\boldsymbol{A}$ zwei Zeilen oder Spalten linear abhängig, so ist $\det(\boldsymbol{A}) = 0$
- $\det(\boldsymbol{I}) = 1$

Orthonormale Transformationen Mit Matrizen lassen sich Koordinatentransformationen beschreiben, die eine alte Basis $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ in eine neue $\hat{\boldsymbol{e}}'_i$ überführen. Besonders wichtig sind Transformationen für Orthonormalbasen, d. h. für Basen, für die $\langle\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_j\rangle = \delta_{ij}$ bzw. $\langle\hat{\boldsymbol{e}}'_i, \hat{\boldsymbol{e}}'_j\rangle = \delta_{ij}$ gilt. Ist $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ eine solche Matrix, so muss

$$\delta_{ij} = \langle a_{ik}\hat{\boldsymbol{e}}_k, a_{jl}\hat{\boldsymbol{e}}_l\rangle = a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = a_{ik}a^\top_{kj},$$

also

$$\boldsymbol{AA}^\top = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A},$$

gelten. Eine solche Matrix heißt *orthogonal*, während man die Transformation *orthonormal* nennt. Wegen der Rechenregeln für Determinanten gilt

$$1 = \det(\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{AA}^\top) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^\top) = (\det(\boldsymbol{A}))^2,$$

also $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$. Ist $\det(\boldsymbol{A}) = 1$, nennt man die orthonormale Transformation *eigentlich*, ansonsten *uneigentlich*.

Anschaulich gibt die Determinante einer Transformationsmatrix an, wie sich das orientierte Volumen eines Körpers unter dieser Transformation ändert. Insbesondere lassen orthogonale Transformationen das Volumen höchstens bis auf das Vorzeichen invariant.

Literatur

- Modler, F., Kreh, M.: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. 3. Aufl., Spektrum (2014)
- Bosch, S.: Lineare Algebra. 4. Aufl., Springer (2007)

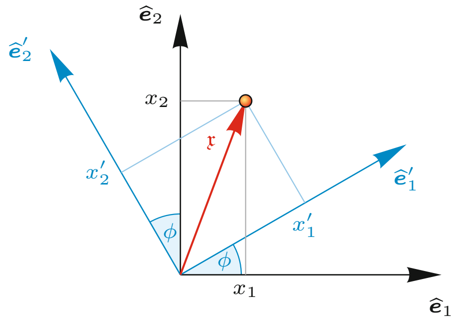


Abb. 2.3 Darstellung einer passiven Drehung, bei der das ungestrichene Koordinatensystem (*schwarz*) durch eine Drehung um die x_3-Achse in das gestrichene Koordinatensystem (*blau*) überführt wird. Der Vektor $\mathfrak{x}$ wird davon nicht berührt, allerdings hängt seine Darstellung vom Koordinatensystem ab, wie man an den Projektionen auf die entsprechenden Koordinatenachsen erkennen kann

die drei Koordinatenachsen dargestellt werden kann. Drehungen im dreidimensionalen Raum lassen sich daher durch drei unabhängige Drehwinkel beschreiben.

Transformation des Ortsvektors unter Drehungen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Darstellung des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ ändert, wenn das Koordinatensystem gedreht wird. Eine Punktmasse befinde sich am Ort mit den Koordinaten $\boldsymbol{x}$. Abhängig von der Wahl des Koordinatensystems hat dieser Ort verschiedene Darstellungen. Wir schreiben die Darstellungen vor und nach der Drehung als $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ bzw. $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', x_3')^\top$. Die Drehung ist in Abb. 2.3 illustriert. Wir wissen, dass für die Koordinaten des Ortes in den beiden Koordinatensystemen

$$x_i = \mathfrak{x} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i \quad \text{bzw.} \quad x_i' = \mathfrak{x} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i' \tag{2.15}$$

gilt. Weiterhin sind

$$\mathfrak{x} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = x_1'\hat{\boldsymbol{e}}_1' + x_2'\hat{\boldsymbol{e}}_2' + x_3'\hat{\boldsymbol{e}}_3' \tag{2.16}$$

gegeben. Dies führt direkt auf

$$\begin{aligned} x_i' &= (x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i' \\ &= x_j\hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i' = x_j\hat{\boldsymbol{e}}_i' \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = r_{ij}x_j, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{R}$ durch (2.10) definiert ist. Hier und im Folgenden wird über doppelt auftretende Indizes summiert, ohne das Summenzeichen explizit anzugeben (*Einstein'sche Summenkonvention*):

$$r_{ij}x_j := \sum_{j=1}^{3} r_{ij}x_j. \tag{2.18}$$

Offensichtlich erhält man die neuen Koordinaten des Ortsvektors durch Anwendung der Matrix $\boldsymbol{R}$ auf die alten Koordinaten. In Kurzform können wir auch

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}. \tag{2.19}$$

schreiben.

Achtung Ausdrücke der Form $r_{ij}a_ib_j$ oder $r_{ij}r_{kj}$ sind Abkürzungen (und nichts anderes als das) für die längeren Schreibweisen $\sum_{i,j} r_{ij}a_ib_j$ oder $\sum_j r_{ij}r_{kj}$. Dabei wird stets über doppelt auftretende Indizes summiert. Einzelne Indizes müssen auf beiden Seiten einer Gleichung auftreten, z. B. $a_ib_j = r_{ij}c_kd_k$ oder $a_ib_j = r_{ik}c_jd_k$. Gleichungen wie $a_ib_i = c_i$, $r_{ij} = d_k$ oder $a_ib_j = r_{ik}c_id_k$ sind nicht korrekt! Indizes können also entweder einfach vorkommen, müssen dann aber auf beiden Seiten einer Gleichung stehen oder auf einer oder beiden Seiten doppelt. Dann wird über sie summiert. Zum Beispiel sind die Gleichungen $a_ib_i = c_jd_j$ und $a_kb_k = c_kd_k$ beide gültig und sogar gleichwertig. Indizes dürfen nicht häufiger als zweimal auf einer Seite einer Gleichung vorkommen, da stets paarweise summiert wird. Summationsindizes können also im Rahmen der oben genannten Regeln umbenannt werden. ◀

Transformation der Darstellung des Ortsvektors unter passiven Drehungen

Der Koordinatenvektor des Ortes transformiert unter passiven Drehungen vermittelt durch die Matrix $\boldsymbol{R}$ wie

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}. \tag{2.20}$$

Frage 5

Machen Sie sich anhand des Beispiels in Gleichung (2.9) und Abb. 2.3 klar, dass die Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ verwendet wird, um die neue Darstellung des Ortsvektors zu finden.

Drehung

Wir betrachten den Vektor mit der ursprünglichen Darstellung $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top = (1, 1, 1)^\top$. Die Drehung, die durch die Matrix $\boldsymbol{R}$ in (2.9) vermittelt wird, führt auf die Darstellung

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi + \sin\phi \\ \cos\phi - \sin\phi \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

◀

Bei einer *aktiven* Transformation wird ein physikalischer Vektor $\mathfrak{x}$ mit der Darstellung $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ in ein und demselben

Koordinatensystem gedreht, sodass sich ein *anderer* physikalischer Vektor $\underset{\sim}{x}'$ mit der Darstellung $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', x_3')^\top$ ergibt. Hier gilt ebenfalls (2.19); dies ist jedoch anders zu interpretieren, da die Basisvektoren von der Transformation nicht betroffen sind. Wie bereits erwähnt ist für solch eine Drehung eine Kraft nötig; sie ist daher von einer passiven Transformation zu unterscheiden.

Passive und aktive Drehungen

Möchte man die Rückseite einer auf dem Tisch stehenden Vase betrachten, kann man um den Tisch herum gehen. Dies entspricht einer passiven Transformation, da sich die Vase nicht dreht, das Bezugssystem (festgelegt durch die Blickrichtung) schon. Die andere Möglichkeit ist, die Vase zu nehmen und umzudrehen. Dabei ändert sich das Bezugssystem nicht, aber die Vase wird im Raum gedreht. Mathematisch werden beide Vorgänge durch dieselbe Drehung beschrieben, physikalisch kann es jedoch Unterschiede geben: So könnte beispielsweise der Lichteinfall von der Richtung abhängen, sodass man die Rückseite der Vase im einen Fall gut, im anderen nur schlecht sehen kann. Außerdem muss eine aktive Drehung jeweils genau entgegengesetzt zu einer passiven sein, damit man dasselbe Ergebnis erhält. ◄

In Aufgabe 2.1 wird gezeigt, dass Winkel zwischen Vektoren und Längen (Beträge) von Vektoren invariant unter orthogonalen Transformationen sind.

Gebundene und ungebundene Vektoren, Transformation des Geschwindigkeitsvektors

Man unterscheidet zwischen *gebundenen* und *ungebundenen* Vektoren. Der Ort einer Punktmasse wird durch einen gebundenen Vektor beschrieben, da der Ort von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt. Man sagt, dass der Ortsvektor an den Ursprung gebunden ist. Ein ungebundener Vektor ist dagegen von der Lage des Ursprungs unabhängig. Solche Vektoren sind *Verschiebungsvektoren*, die z. B. die Differenz von zwei Ortsvektoren und somit eine Verschiebung beschreiben. Häufig nennt man ungebundene Vektoren schlicht *Vektoren* und gebundene Vektoren Elemente eines *affinen Raumes*.

Um dies besser zu verstehen, betrachten wir ein Beispiel.

Verschiebungsvektoren und Drehungen

Zwei Koordinatensysteme, S und S', seien durch eine Translation gegeneinander verschoben, die Achsen aber nicht gegeneinander gedreht (Abb. 2.4). Der Ursprung O' des gestrichenen Systems S' habe vom ungestrichenen System S aus betrachtet die Koordinaten $\boldsymbol{b}$. Der Ursprung O' hat in S' natürlich die Koordinaten $\boldsymbol{b}' = (0, 0, 0)^\top$.

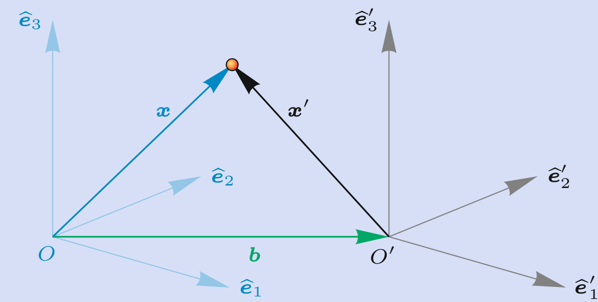


Abb. 2.4 Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen. Der Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems S' befindet sich vom ungestrichenen Koordinatensystem S aus betrachtet am Ort $\boldsymbol{b}$. Eine Punktmasse hat in S die Ortskoordinaten $\boldsymbol{x}$ (*blau*), in S' $\boldsymbol{x}'$ (*schwarz*)

Wird der Ort einer Punktmasse beschrieben, so lauten die Koordinaten in S zunächst $\boldsymbol{x}$. Ein Beobachter in S' gibt dagegen die Koordinaten $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ für dieselbe Punktmasse an. Legt man nun eine zweite Punktmasse genau in den Ursprung O' und fragt nach dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{d}$, der beide Punktmassen verbindet, so lautet dieser Vektor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ bzw. $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{x}'$. Man sieht sofort, dass dann $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}'$ gilt, wohingegen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ ist. Somit ist $\boldsymbol{x}$ ein Beispiel für einen gebundenen, $\boldsymbol{d}$ für einen ungebundenen Vektor. Allgemein kann man sagen, dass ungebundene Vektoren ihre Darstellung unter *Translationen* des Koordinatensystems nicht ändern. ◄

Nehmen wir nun an, dass S' gegenüber S zuerst verschoben und dann gedreht ist. Die Verschiebung des Ursprungs sei durch den Vektor $\boldsymbol{b}$, die Rotation durch die Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ beschrieben. Sowohl $\boldsymbol{b}$ als auch $\boldsymbol{R}$ seien zeitunabhängig. In diesem Fall gilt für den Ort einer Punktmasse

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}), \qquad (2.22)$$

da $\boldsymbol{b}' = 0$ ist. Für den Verschiebungsvektor $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ gilt dagegen

$$\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{d}. \qquad (2.23)$$

Gebundene und ungebundene Vektoren transformieren sich daher unterschiedlich.

Transformation der Darstellung des Ortsvektors unter passiven Rotationen und Translationen

Der Ortsvektor ist ein an den Ursprung gebundener Vektor. Nur Differenzen von Ortsvektoren, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$, transformieren sich wie

$$\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{d}. \qquad (2.24)$$

Solche Größen nennt man im physikalischen Sinne Vektoren.

Frage 6

Machen Sie sich die Gültigkeit von (2.22) zeichnerisch klar.

Fragt man nach dem Transformationsverhalten des Geschwindigkeitsvektors der Punktmasse, so sieht man direkt, dass

$$\dot{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.25}$$

gilt. Geschwindigkeiten transformieren unter Drehungen daher wie ungebundene Vektoren. Eine gleichzeitige Verschiebung des Ursprungs spielt dabei keine Rolle.

Frage 7

Überprüfen Sie das Ergebnis in (2.25), indem sie von (2.22) ausgehen und $\dot{\boldsymbol{b}} = 0$ und $\dot{\boldsymbol{R}} = 0$ verwenden.

Wir werden auf das Transformationsverhalten von $\dot{\boldsymbol{x}}$ bei allgemeinen zeitabhängigen Verschiebungen und Drehungen in Abschn. 2.3 zurückkommen.

Transformation des Drehimpulses unter Drehungen, polare und axiale Vektoren

Der Drehimpuls $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ einer Punktmasse am Ort $\boldsymbol{x}$ mit Impuls $\boldsymbol{p}$ lautet in Komponentenschreibweise

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k. \tag{2.26}$$

Wir betrachten erneut eine durch eine Rotation $\boldsymbol{R}$ vermittelte Transformation vom ungestrichenen System S zum gestrichenen System S'. Zur Vereinfachung seien beide Koordinatensysteme nicht gegeneinander verschoben. In S' lautet der Drehimpuls

$$L'_i = \varepsilon_{ijk} x'_j p'_k = \varepsilon_{ijk}(r_{jl}x_l)(r_{km}p_m) = \varepsilon_{ijk} r_{jl} r_{km} x_l p_m. \tag{2.27}$$

Die Orthogonalität der Drehmatrix, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top = \boldsymbol{I}$ oder $r_{pq}r_{iq} = \delta_{pi}$, lässt sich ausnutzen, um das Matrixprodukt umzuschreiben:

$$\varepsilon_{ijk} r_{jl} r_{km} = \varepsilon_{pjk}\delta_{pi} r_{jl} r_{km} = \varepsilon_{pjk}(r_{pq}r_{iq}) r_{jl} r_{km}. \tag{2.28}$$

Wie im „Mathematischen Hintergrund" 2.2 und 2.3 erläutert wird, erfüllen 3×3-Matrizen die Relation

$$\det(\boldsymbol{A}) = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \tag{2.29}$$

Hier ist $\det(\boldsymbol{A})$ die *Determinante* der Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Allgemeiner lässt sich der folgende Zusammenhang zeigen (Riley et al. 2006):

$$\varepsilon_{pjk} a_{pq} a_{jl} a_{km} = \det(\boldsymbol{A})\varepsilon_{qlm}. \tag{2.30}$$

Dies wiederum führt mit der Drehmatrix $\boldsymbol{R}$ statt $\boldsymbol{A}$ auf

$$\varepsilon_{pjk} r_{pq} r_{jl} r_{km} r_{iq} = \det(\boldsymbol{R})\varepsilon_{qlm} r_{iq}. \tag{2.31}$$

Es folgt sofort der transformierte Drehimpuls

$$L'_i = \det(\boldsymbol{R}) r_{iq}(\varepsilon_{qlm} r_l p_m) = \det(\boldsymbol{R}) r_{iq} L_q \tag{2.32}$$

bzw.

$$\boldsymbol{L}' = \det(\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{R}\boldsymbol{L} \tag{2.33}$$

in Vektorform.

Im Gegensatz zu Geschwindigkeiten bzw. Impulsen, die entsprechend $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p}$ transformieren, tritt beim Drehimpuls ein zusätzlicher Faktor $\det(\boldsymbol{R})$ auf. Dies ist typisch für Größen, in deren Definitionen das Levi-Civita-Symbol auftaucht. Der Drehimpuls ändert daher sein Vorzeichen, wenn die Matrix $\boldsymbol{R}$ eine uneigentliche Transformation mit $\det(\boldsymbol{R}) = -1$ ist. Beispiele hierfür sind Spiegelungen oder das paarweise Vertauschen von Koordinatenachsen. Eigentliche Drehungen sind dagegen stets durch $\det(\boldsymbol{R}) = +1$ ausgezeichnet.

Spiegelung

Die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

vermittelt eine Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene, d. h., die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ des Ortsvektors werden folgendermaßen transformiert: $(x_1, x_2, x_3)^\top \rightarrow (x_1, x_2, -x_3)^\top$. Offensichtlich ist $\det(\boldsymbol{A}) = -1$. Es handelt sich also um eine uneigentliche orthogonale Matrix. Die neuen Basisvektoren sind wegen

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = -\epsilon_{ijk}\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{2.35}$$

nicht mehr rechtshändig, sondern *linkshändig*. Man sagt auch, dass die *Helizität* vertauscht wurde. ◀

2.2 Galilei-Transformationen

In Abschn. 2.1 wurden einige mathematischen Grundlagen für Koordinatentransformationen (insbesondere Drehungen) bereitgestellt. Diese Ergebnisse werden nun ausgenutzt, um physikalische Aussagen treffen zu können. Das Verhalten von physikalischen Systemen unter Transformationen ist von fundamentaler Bedeutung für die theoretische Physik. Dies gilt vor allem, wenn Systeme unter gewissen Transformationen invariant, d. h. symmetrisch sind. Wie in Kap. 5 diskutiert wird, führen Symmetrien

Vertiefung: Transformationsverhalten von Vektoren
Polare und axiale Vektoren

Man unterscheidet physikalische Vektoren entsprechend des Verhaltens ihrer Darstellungen unter orthogonalen Transformationen $\boldsymbol{R}$, die sie von einem ungestrichenen in ein gestrichenes Koordinatensystem überführen. Transformiert ein Darstellungsvektor wie der Impuls,

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{p},$$

d. h. unabhängig von $\det(\boldsymbol{R})$, so ist diese Größe ein *polarer Vektor*. Transformiert ein Darstellungsvektor wie der Drehimpuls,

$$\boldsymbol{L}' = \det(\boldsymbol{R})\,\boldsymbol{R}\boldsymbol{L},$$

ändert er also bei einer uneigentlichen Transformation das Vorzeichen, so ist diese Größe ein *axialer Vektor*. Allgemein ist das Kreuzprodukt zweier polarer Vektoren ein axialer Vektor. Das Skalarprodukt zweier polarer Vektoren ist ein Skalar, der unter uneigentlichen Transformationen invariant ist. Das Produkt eines skalaren und eines polaren Vektors, z. B. $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{L}$, ist ein *Pseudoskalar*, der sein Vorzeichen ändert, wenn $\det(\boldsymbol{R}) = -1$ ist. Die physikalischen Begriffe der polaren und axialen Vektoren sind von der mathematischen Definition eines Vektors zu unterscheiden.

in der Regel auf Erhaltungsgrößen, deren Kenntnis das Lösen physikalischer Probleme stark vereinfacht. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die Newton'schen Axiome invariant unter einer gewissen Klasse von Koordinatentransformationen sind. Diese werden als Galilei-Transformationen bezeichnet. Sie überführen Inertialsysteme ineinander. Anhand der Galilei-Transformationen werden einige Grundlagen der mathematischen Gruppen erläutert, die in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielen.

Kovarianz des ersten Newton'schen Axioms unter Galilei-Transformationen

Wir haben in Abschn. 1.2 gelernt, dass das erste Newton'sche Axiom in allen Inertialsystemen gültig ist: Sind Kräfte abwesend, bewegen sich Punktmassen gleichförmig-geradlinig. Dieses Prinzip besagt, dass alle Inertialsysteme im Hinblick auf die Newton'schen Axiome gleichwertig sind. Weiterhin bedeutet dies, dass die Bewegungsgleichungen *kovariant*, d. h. forminvariant, sein müssen, wenn eine Transformation von einem Inertialsystem in ein anderes durchgeführt wird. Kein Inertialsystem kann sich gegenüber einem anderen auszeichnen. Genauso darf sich die Form der Bewegungsgleichungen in keinem Inertialsystem von der in einem anderen Inertialsystem unterscheiden. Diese Aussagen sollen im weiteren Verlauf näher beleuchtet werden.

Wir untersuchen nun, welchen Einfluss Koordinatentransformationen auf die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse haben. Das Ausgangssystem sei ein Inertialsystem S mit Ursprung O und den Basisvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_i$. Das neue System sei S' mit Ursprung O' und Basisvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}'_i$. Zusätzlich zu Transformationen, vermittelt durch orthogonale Matrizen $\boldsymbol{R}$, erlauben wir räumliche und zeitliche Translationen. Der Ursprung O' von S' liege von S aus betrachtet an einem beliebigen Ort $\boldsymbol{b}$ (Abb. 2.5). Offensichtlich sind die Koordinaten eines Punktes in S und S' wegen

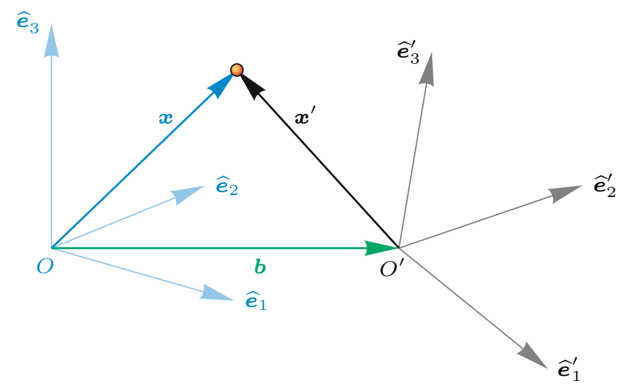


Abb. 2.5 Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen. Der Ursprung des gestrichenen Koordinatensystems S' befindet sich vom ungestrichenen Koordinatensystem S aus betrachtet am Ort $\boldsymbol{b}$. Zusätzlich sind die Koordinatenachsen von S' und S gegeneinander gedreht. Eine Punktmasse hat in S die Ortskoordinaten $\boldsymbol{x}$ (*blau*), in S' $\boldsymbol{x}'$ (*schwarz*)

$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^\top$ in der Form

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \tag{2.36}$$

miteinander verbunden.

Im Rahmen der Newton'schen Mechanik ist die Zeit ein externer Parameter, dessen Verlauf nicht von der Bewegung von Punktmassen im physikalischen System abhängt. Allerdings kann der Zeitnullpunkt beliebig gewählt werden. Wir schreiben daher die Relation zwischen den Zeiten t und t' in S und S' in der Form

$$t' = t - t_0, \tag{2.37}$$

d. h., es gebe eine konstante zeitliche Verschiebung. Daraus folgt das Differenzial

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t. \tag{2.38}$$

Somit hängen Zeitableitungen nicht von der Wahl von t_0 ab.

http://www.springer.com/978-3-642-54617-4

Theoretische Physik
Bartelmann, M.; Feuerbacher, B.; Krüger, T.; Lüst, D.;
Rebhan, A.; Wipf, A.
2015, XXVI, 1315 S. 486 Abb., 454 Abb. in Farbe.,
Hardcover
ISBN: 978-3-642-54617-4