

Wie am Ende des vorigen Kapitels bereits erwähnt, ist die notwendige Gradientenbedingung aus Satz 1.4.6 für konvexe Zielfunktionen auch hinreichend. Diese Tatsache mag als erste Motivation dafür dienen, sich näher mit der konvexen Optimierung zu beschäftigen. Dabei wird in diesem Kapitel zunächst ein gründliches Studium der konvexen Mengen erfolgen; in Kap. 5 werden wir dann die Bedeutung der Konvexität für Funktionen sowie einige Verallgemeinerungen dieser Theorie (insbesondere quasi- und pseudokonvexe Funktionen) untersuchen.

Noch eine prinzipielle Bemerkung zur klassischen Geometrie: Lineare Gleichungssysteme im \mathbb{R}^n entsprechen der affinen Geometrie¹ im \mathbb{R}^n , und lineare Ungleichungssysteme entsprechen der konvexen Geometrie. Wir werden in diesem Kapitel sehen, wie eng der Zusammenhang zwischen diesen zunächst doch recht verschieden anmutenden Gebieten ist, und immer wieder feststellen können, daß sich die algebraische und die geometrische Sichtweise vortrefflich ergänzen.

2.1 Grundlagen

Definition 2.1.1 Eine Teilmenge S des \mathbb{R}^n heißt *konvex*, wenn für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ stets die gesamte *Strecke* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ in S liegt:

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \wedge \lambda \in [0, 1] \implies \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S. \quad (2.1)$$

Insbesondere sind nach dieser Definition also auch die leere Menge und einpunktige Teilmengen konvex. \square

¹ Für Leser, die mit den Grundbegriffen der affinen Geometrie sowie den entsprechenden Konzepten aus der linearen Algebra – wie affinen Unterräumen, affiner Abhängigkeit, der affinen Hülle und dem affinen Rang – nicht vertraut sind, stellen wir die wichtigsten Fakten hierzu im Anhang zusammen.

Noch eine kleine Anmerkung zu der soeben gegebenen Definition des Streckenbegriffs:
Die triviale Beobachtung

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} = \mathbf{x} + (1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

zeigt, daß man die Strecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ durch eine Bewegung vom Punkt \mathbf{x} aus in Richtung $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ bis zum Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{d}$ erhalten kann.

Beispiel 2.1.2 Die folgenden Beispiele konvexer Mengen werden für uns besonders wichtig sein:

1. *Affine Hyperebenen*, also Teilmengen des \mathbb{R}^n der Form

$$H_{\mathbf{s}, \alpha} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}^T \mathbf{x} = \alpha\} \quad (\mathbf{s} \neq \mathbf{0}).$$

2. Allgemeiner: *affine Unterräume*, also jedes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in U \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U.$$

3. Die *Halbräume* zu einer affinen Hyperebene $H_{\mathbf{s}, \alpha}$, also die abgeschlossenen Mengen

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}^T \mathbf{x} \leq \alpha\} \quad \text{bzw.} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}^T \mathbf{x} \geq \alpha\}$$

sowie die offenen Mengen

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}^T \mathbf{x} < \alpha\} \quad \text{bzw.} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}^T \mathbf{x} > \alpha\}.$$

4. Das *Einheitssimplex*

$$\Delta_n := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \right\};$$

allgemeiner heißt die konvexe Hülle (siehe Definition 2.1.6 unten) von $n + 1$ affin unabhängigen Vektoren im \mathbb{R}^n ein (n -dimensionales) *Simplex*. Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir somit *Strecken*, *Dreiecke* und *Tetraeder*.

5. Die *Einheitskugel*

$$B_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\};$$

der Rand von B_n (vgl. § [2.2]) ist die *Einheitssphäre*

$$S_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Man beachte, daß S_n natürlich nicht konvex ist.

6. Die *konvexen Kegel*; dabei heißt eine Teilmenge K des \mathbb{R}^n ein *Kegel*, wenn aus $\mathbf{x} \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$ stets $\lambda \mathbf{x} \in K$ folgt.² □

² Nach dieser Definition muß also jeder Kegel mit einer eindeutig bestimmten Spitze diese Spitze im Ursprung $\mathbf{0}$ haben, während man in der klassischen Geometrie üblicherweise auch Kegel mit einer anderen Spitze betrachtet, also Translationen von Kegeln in unserem Sinne erlaubt. Für die Zwecke der Optimierung ist die hier gegebene engere Definition aber besser geeignet.

Übung 2.1.3 Man beweise die folgenden Aussagen:

1. Seien $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ Elemente einer konvexen Teilmenge S des \mathbb{R}^n . Dann liegt auch jede *Konvexkombination* dieser Punkte in S , also jeder Punkt der Form

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0 \text{ und } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1.$$

2. Ein Kegel K ist genau dann konvex, wenn $K + K \subseteq K$ gilt. Insbesondere ist also jeder lineare Unterraum des \mathbb{R}^n ein konvexer Kegel.
3. Sei K ein konvexer Kegel im \mathbb{R}^n und $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in K$. Dann liegt auch jede *konische Kombination* dieser Punkte in K , also jeder Punkt der Form

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0. \quad \square$$

Das folgende Lemma ist offensichtlich:

Lemma 2.1.4 Sei $(S_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen des \mathbb{R}^n . Wenn alle S_i konvex sind, ist auch $\bigcap_{i \in I} S_i$ konvex; wenn alle S_i (konvexe) Kegel sind, ist auch $\bigcap_{i \in I} S_i$ ein (konvexer) Kegel. \square

Definition 2.1.5 Ein *Polyeder* ist eine Menge der Form

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ gelte. Ein Polyeder ist also stets der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen und somit nach Lemma 2.1.4 konvex.³ Genauer gilt

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}'_i \mathbf{x} \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, m\},$$

wobei $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m$ die Zeilen von \mathbf{A} bezeichnen und $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ ist. Ein beschränktes Polyeder wird als *Polytop* bezeichnet. \square

Man beachte, daß der Zulässigkeitsbereich S eines linearen Programms stets ein Polyeder ist; daher sind die Polyeder die für die lineare Optimierung wichtigsten konvexen Mengen.

Definition 2.1.6 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Schnitt aller S umfassenden konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n heißt die *konvexe Hülle* von S und wird mit $\text{conv } S$ bezeichnet. Die *konische Hülle* ist der Schnitt aller S umfassenden konvexen Kegel; sie wird mit $\text{cone } S$ bezeichnet. Man beachte dabei, daß $\text{cone } S$ somit der von S erzeugte konvexe Kegel – also nicht einfach der von S erzeugte Kegel – ist. \square

³ Auch hier weichen wir von der in der Geometrie üblichen Terminologie ab, wo Polyeder nicht notwendigerweise konvex sind. Im Sinne der Geometrie sollten wir also stets von *konvexen Polyedern* sprechen. Für die Optimierung sind nur derartige Polyeder von Interesse, weswegen wir bei der einfacheren Bezeichnung *Polyeder* bleiben wollen.

Analog zu den aus der linearen Algebra bekannten Sätzen über die lineare bzw. affine Hülle einer Menge S zeigen wir nun die entsprechenden Aussagen für konvexe und konische Hüllen.

Satz 2.1.7 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $\text{conv } S$ die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen in S ; entsprechend ist $\text{cone } S$ die Menge aller konischen Kombinationen von Elementen in S .

Beweis Wir beweisen nur die Aussage für $\text{conv } S$, da der Beweis für $\text{cone } S$ völlig analog (und sogar etwas einfacher) ist. Nach Übung 2.1.3 liegen sämtliche Konvexkombinationen von Elementen aus S in $\text{conv } S$. Der Vollständigkeit halber wollen wir den Beweis hierfür durchführen, wobei wir Induktion über die Länge k der Konvexkombination verwenden. Da $\text{conv } S$ konvex ist, ist der Induktionsanfang $k = 2$ klar. Für den Induktionsschluß von k auf $k + 1$ seien nun $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1} \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = 1$ gegeben. Dabei kann man sogar $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} > 0$ annehmen, da sonst nichts zu zeigen ist. Wir schreiben

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1} = \alpha + (1 - \alpha) \quad \text{mit } \alpha := \lambda_1 + \dots + \lambda_k \text{ und } 0 < \alpha < 1.$$

Es genügt nun $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{x}_{k+1}$ für ein $\mathbf{x} \in S$ zu zeigen. Dazu setzen wir

$$\alpha_i := \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i = 1, \dots, k) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Dann gelten in der Tat $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $\alpha_i > 0$ für alle i , also $\mathbf{x} \in S$, sowie $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i = \alpha \mathbf{x}$.

Wie man leicht nachprüft, ist die Menge aller Konvexkombinationen von Vektoren aus S selbst konvex; damit folgt die Behauptung. \square

Definition 2.1.8 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Die *Dimension* $\dim S$ von S ist die Dimension der affinen Hülle $\text{aff } S$, also der affine Rang von S minus 1 bzw. die Dimension des zu $\text{aff } S$ gehörenden linearen Unterraums des \mathbb{R}^n . \square

Satz 2.1.9 (Satz von Carathéodory) Sei S eine k -dimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist jeder Punkt in $\text{conv } S$ eine Konvexkombination von höchstens $k + 1$ Punkten aus S .⁴

Beweis Sei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i$ eine Konvexkombination von $m \geq k + 2$ Punkten von S . Es genügt zu zeigen, daß \mathbf{x} dann auch als Konvexkombination von $m - 1$ Punkten aus S geschrieben werden kann. Insbesondere können wir also annehmen, daß alle λ_j von 0 verschieden sind.

⁴ Etwas geometrischer formuliert liegt also jeder Punkt der konvexen Hülle von S in einem k -dimensionalen Simplex mit Ecken aus S .

Nach Voraussetzung sind die Punkte $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ affin abhängig. Wegen Satz A.2.2 gibt es daher Skalare μ_1, \dots, μ_m , von denen mindestens einer von 0 verschieden ist, so daß

$$\sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \mu_j = 0$$

gelten; es ist also mindestens eines der μ_j positiv. Wir setzen nun

$$\alpha := \min \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : j = 1, \dots, m, \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad (\text{für ein geeignetes } i).$$

Dann folgt

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{x}_j + \mathbf{0} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{x}_j - \alpha \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^m (\lambda_j - \alpha \mu_j) \mathbf{x}_j.$$

Dabei ist $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$, so daß \mathbf{x} wie gewünscht als Linearkombination von höchstens $m-1$ Vektoren in S dargestellt ist. Ferner gilt stets $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$; das ist klar für $\mu_j \leq 0$, und für $\mu_j > 0$ gilt $\lambda_j/\mu_j \geq \lambda_i/\mu_i = \alpha$. Da dabei auch $\sum_{j=1}^m (\lambda_j - \alpha \mu_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_j - \alpha \cdot 0 = 1$ gilt, haben wir somit die gesuchte Konvexkombination gefunden. \square

Korollar 2.1.10 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist jedes Element in $\text{conv } S$ eine Konvexkombination von höchstens $n+1$ Punkten aus S . \square

Die (nicht sehr schweren) Beweise der restlichen Resultate dieses Abschnitts seien dem Leser als Übungsaufgaben überlassen.

Lemma 2.1.11 Wenn $S_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ und $S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen sind, ist auch $S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ konvex. \square

Lemma 2.1.12 Sei $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ affin, also von der Form $f: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann sind Bilder und Urbilder konvexer Mengen unter f wieder konvex. \square

Korollar 2.1.13 Seien S und T zwei konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann sind auch alle Mengen der Form $\alpha S_1 + \beta S_2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvex; insbesondere sind also $S+T$, $-S$ und $S-T$ konvex. \square

Korollar 2.1.14 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ konvex. Dann sind die Mengen

$$S(\mathbf{y}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S\} \quad (\text{der Schnitt von } S \text{ entlang } \mathbf{y})$$

für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ konvex. Ferner ist auch

$$S_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S \text{ für ein } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\} \quad (\text{der Schatten von } S)$$

konvex. \square

Satz 2.1.15 (Satz von Carathéodory für konvexe Kegel) Sei S eine k -dimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann ist jeder Punkt in $\text{cone } S$ eine konische Kombination von höchstens k Punkten aus S . \square

2.2 Topologische Eigenschaften konvexer Mengen

In diesem Abschnitt wollen wir das Innere, den Rand und den Abschluß konvexer Mengen untersuchen. Zur Erinnerung wiederholen wir kurz die notwendigen topologischen Begriffe:

Definition 2.2.1 Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\mathbf{x} \in S$ ein *innerer Punkt*, wenn es eine Kugel

$$B(\mathbf{x}, \delta) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta\}$$

mit $B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S$ gibt. Die Menge aller inneren Punkte von S heißt das *Innere* von S und wird mit $\text{int } S$ bezeichnet. Der (topologische) *Abschluß* \bar{S} von S besteht aus allen *Häufungspunkten* von S , also aus allen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$B(\mathbf{x}, \delta) \cap S \neq \emptyset \quad \text{für alle } \delta > 0;$$

äquivalent dazu kann \bar{S} auch als die Menge aller derjenigen Punkten erklärt werden, die als Grenzwert einer Folge (\mathbf{x}_n) mit $\mathbf{x}_n \in S$ erhalten werden können. Die Menge $\partial S := \bar{S} \setminus \text{int } S$ heißt der *Rand* von S ; sie enthält also genau diejenigen Punkte \mathbf{x} , für die für alle $\delta > 0$ weder $B(\mathbf{x}, \delta) \cap S$ noch $B(\mathbf{x}, \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S)$ leer sind. Die Menge S heißt *offen*, falls $S = \text{int } S$ gilt, und *abgeschlossen*, falls $S = \bar{S}$ gilt. Schließlich ist die *abgeschlossene konvexe Hülle* von S als $\overline{\text{conv } S}$ erklärt. \square

Lemma 2.2.2 Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\overline{\text{conv } S}$ der Durchschnitt aller S umfassenden abgeschlossenen konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n . \square

Übung 2.2.3 Man führe den Beweis von Lemma 2.2.2 durch und zeige, daß im allgemeinen $\overline{\text{conv } S} \neq \text{conv } \bar{S}$ gilt. \square

Auch der Beweis des folgenden Satzes sei dem Leser als Übung überlassen.

Satz 2.2.4 Wenn $S \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, so ist auch $\text{conv } S$ beschränkt. Wenn S kompakt ist, ist auch $\text{conv } S$ kompakt. Insbesondere gilt für beschränkte Mengen $\overline{\text{conv } S} = \text{conv } \bar{S}$. \square

Die oben eingeführten üblichen topologischen Begriffe sind nicht völlig befriedigend, da sie von der Einbettung der betrachteten Punktmenge S in einen Raum \mathbb{R}^n abhängen; zumindest für die Zwecke der Optimierung ist das oft nicht angebracht. Beispielsweise hat eine Hyperebene H im \mathbb{R}^n nach Definition 2.2.1 ein leeres Inneres; wenn wir H aber nicht als im \mathbb{R}^n eingebettet betrachten, sondern als den $n - 1$ -dimensionalen Raum \mathbb{R}^{n-1} auffassen, würde natürlich $\text{int } H = H$ gelten. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 2.2.5 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Das *relative Innere* $\text{rint } S$ von S ist als

$$\text{rint } S := \{\mathbf{x} \in S: \text{aff } S \cap B(\mathbf{x}, \delta) \subseteq S \text{ für ein } \delta > 0\}$$

erklärt. Damit hängt also das relative Innere zwar von der affinen Hülle von S , nicht aber von der Einbettung von $\text{aff } S$ in einen (im allgemeinen höherdimensionalen) Raum \mathbb{R}^n ab. In ähnlicher Weise erklären wir den *relativen Rand* $\text{r}\partial S$ von S als $\text{r}\partial S := \bar{S} \setminus \text{rint } S$; damit gilt also

$$\text{r}\partial S = \{\mathbf{x} \in \text{aff } S: B(\mathbf{x}, \delta) \cap S \neq \emptyset \neq B(\mathbf{x}, \delta) \cap (\text{aff } S \setminus S) \text{ für alle } \delta > 0\}.$$

Man beachte, daß man keinen „relativen Abschluß“ benötigt, da \bar{S} nicht von der Einbettung von $\text{aff } S$ in einen Raum \mathbb{R}^n abhängt; das liegt daran, daß $\text{aff } S$ abgeschlossen ist. \square

Beispiel 2.2.6 Hier sind einige Beispiele zu den eben eingeführten Begriffen:

- Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\dim S = n$ stimmen $\text{int } S$ und $\text{rint } S$ überein.
- Das relative Innere einer einelementigen Menge S ist S selbst; natürlich ist das keine sonderlich interessante Situation.
- Für $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ ist $\text{rint } S = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \{\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}: \alpha \in (0, 1)\}$.
- Wir betrachten eine Kugel $B := B(\mathbf{x}, \delta)$ im \mathbb{R}^3 . Dann ist das Innere von B die in Definition 1.2.3 erklärte offene Kugel $U(\mathbf{x}, \delta)$, und der Rand von B ist die *Sphäre* $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \delta\}$, also – anschaulich gesprochen – die Oberfläche der Kugel B . Sei jetzt E eine Ebene, die den Mittelpunkt \mathbf{x} von B enthält. Dann ist $S := B \cap E$ eine in den \mathbb{R}^3 eingebettete Kreisscheibe, die natürlich im \mathbb{R}^3 ein leeres Inneres hat; dagegen ist $\text{rint } S$ die zugehörige offene Kreisscheibe $U(\mathbf{x}, \delta) \cap E$. Zudem ist S sein eigener Rand im \mathbb{R}^3 , während $\text{r}\partial S$ die Kreislinie $\partial B \cap E$ ist.
- Wir betrachten die Menge S der acht Punkte des \mathbb{R}^3 mit Koordinaten aus $\{1, -1\}$. Dann ist $W := \text{conv } S$ offenbar ein Würfel mit Seitenlänge 2 und Mittelpunkt $\mathbf{0}$. Alle Punkte von W , die auf keiner der sechs Seitenflächen⁵ liegen, bilden das Innere von W ; der Rand von W besteht genau aus den Punkten dieser Seitenflächen. Jede der 6 Flächen hat ein leeres Inneres, wogegen alle Punkte einer Seitenfläche, die auf keiner der 12 Kanten des Würfels liegen, im relativen Inneren der Fläche sind. Analog sind alle Punkte einer Kante, die nicht zur Eckenmenge S des Würfels gehören, im relativen Inneren der Kante.
- Für das Simplex

$$\Sigma_n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_1 + \cdots + x_n = 1, x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

gilt $\text{int } \Sigma_n = \emptyset$, aber

$$\text{rint } \Sigma_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_1 + \cdots + x_n = 1, x_i > 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\},$$

⁵ Wir verwenden die Begriffe *Seitenfläche*, *Kante* und *Ecke* hier ganz anschaulich; eine formale Definition wird in § 2.5 erfolgen.

wie die bisherigen Beispiele vermuten lassen und wie wir im Beweis des nächsten Satzes zeigen werden. \square

Wir zeigen nun, daß die eben betrachteten Beispiele typisch für konvexe Mengen sind:

Satz 2.2.7 *Sei S eine nichtleere konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n . Dann gilt*

$$\dim S = \dim \operatorname{rint} S; \quad (2.2)$$

insbesondere ist $\operatorname{rint} S \neq \emptyset$.

Beweis Sei $\dim S = k - 1$. Da das relative Innere einer einelementigen Menge diese Menge selbst ist, können wir dabei $k \geq 2$ annehmen. Wir wählen nun k affin unabhängige Elemente $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ in S und betrachten das Simplex $\Delta := \operatorname{conv} \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$. Wegen $\dim \Delta = \dim S = k - 1$ gilt trivialerweise $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} \Delta$. Wir wollen

$$\operatorname{rint} \Delta = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i : \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_i > 0 \text{ für } i = 1, \dots, k \right\} \quad (2.3)$$

zeigen; damit folgt dann die Behauptung. Sei also $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i$ ein derartiger Punkt. Die Punkte in $\operatorname{aff} \Delta$ lassen sich in der Form

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{mit } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$$

schreiben. Dann erfüllt $\mathbf{y} := \mathbf{z} - \mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mu_i \mathbf{x}_i \quad \text{mit } \mu_1 + \dots + \mu_k = 0,$$

wobei $\mu_i = \lambda_i - \alpha_i$ gilt (für alle i). Wir betrachten nun die dadurch definierte Abbildung $\mu: \operatorname{aff} \Delta - \mathbf{x} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\mu: \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x} \mapsto (\mu_1, \dots, \mu_k);$$

offenbar ist μ linear und somit stetig. Man setze nun

$$\alpha := \min \{\alpha_i : i = 1, \dots, k\} > 0.$$

Wegen $\mu(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gibt es also ein $\delta > 0$, so daß aus $\|\mathbf{y}\| < \delta$ stets $|\mu_i(\mathbf{y})| < \alpha$ folgt (für $i = 1, \dots, k$). Somit gilt stets

$$\mu_i(\mathbf{y}) + \alpha_i = \lambda_i(\mathbf{y}) \geq 0, \quad \text{also } \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \Delta \text{ für alle } \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \operatorname{aff} \Delta.$$

Daher liegt \mathbf{x} in $\operatorname{rint} \Delta$, das somit die in (2.3) definierte Menge umfaßt. Man beachte, daß bereits aus dieser Inklusion die Behauptung des Satzes folgt. Natürlich ist es trotzdem von Interesse, sogar Gleichheit in (2.3) nachzuweisen; die umgekehrte Inklusion ist aber wesentlich einfacher und sei daher dem Leser als Übung überlassen. \square

Lemma 2.2.8 Sei S eine nichtleere konvexe Menge. Dann gilt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \operatorname{rint} S \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \bar{S} \text{ und alle } \mathbf{y} \in \operatorname{rint} S,$$

wobei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} : 0 \leq \alpha < 1\}$ sei.

Beweis Ohne Einschränkung sei $\operatorname{aff} S = \mathbb{R}^n$, also $\operatorname{rint} S = \operatorname{int} S$. Sei \mathbf{z} ein beliebiger Punkt der Form $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}$ mit $\alpha \in (0, 1)$. Wegen $\mathbf{x} \in \bar{S}$ gilt dann $B(\mathbf{x}, \delta) \cap S \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$. Das läßt sich als $\mathbf{x} \in S + B(\mathbf{0}, \delta)$ für alle $\delta > 0$ schreiben. Damit folgt $\alpha \mathbf{x} \in \alpha S + \alpha B(\mathbf{0}, \delta)$ und daher — mit $\alpha B(\mathbf{0}, \delta) + B(\mathbf{0}, \delta) = (1 + \alpha)B(\mathbf{0}, \delta)$ —

$$\begin{aligned} B(\mathbf{z}, \delta) &= \mathbf{z} + B(\mathbf{0}, \delta) = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} + B(\mathbf{0}, \delta) \\ &\subseteq \alpha S + (1 - \alpha) \mathbf{y} + (1 + \alpha) B(\mathbf{0}, \delta) \\ &= \alpha S + (1 - \alpha) \left(\mathbf{y} + B\left(\mathbf{0}, \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \delta\right) \right). \end{aligned}$$

Da $\mathbf{y} \in \operatorname{int} S$ gilt, kann δ so klein gewählt werden, daß $B\left(\mathbf{y}, \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \delta\right) \subseteq S$ gilt. Dann folgt

$$B(\mathbf{z}, \delta) \subseteq \alpha S + (1 - \alpha) S = S$$

(da S konvex ist), also $\mathbf{z} \in \operatorname{int} S$. □

Der Leser möge sich als Übung von der Gültigkeit des folgenden Korollars überzeugen:

Korollar 2.2.9 Wenn S konvex ist, sind auch $\operatorname{rint} S$ und \bar{S} konvex. □

Satz 2.2.10 Sei S eine nichtleere konvexe Menge. Dann haben die drei Mengen $\operatorname{rint} S$, S und \bar{S} dieselbe affine Hülle (also dieselbe Dimension), dasselbe relative Innere, und denselben Abschluß.

Beweis Wie wir bereits im Beweis von Satz 2.2.7 gesehen haben, gilt die Aussage über die Dimension, also über die affine Hülle.

Als nächstes zeigen wir $\bar{S} = \overline{\operatorname{rint} S}$. Offensichtlich gilt $\bar{S} \supseteq \overline{\operatorname{rint} S}$. Sei also $\mathbf{x} \in \bar{S}$ gegeben. Wegen Satz 2.2.7 gibt es ein $\mathbf{y} \in \operatorname{rint} S$, und mit Lemma 2.2.8 folgt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \operatorname{rint} S$. Daher ist \mathbf{x} offenbar ein Häufungspunkt von $\operatorname{rint} S$; das zeigt die umgekehrte Inklusion. Damit haben wir die Behauptung über den Abschluß bewiesen, da trivialerweise $\bar{\bar{S}} = \bar{S}$ gilt.

Es bleibt noch, $\operatorname{rint} \bar{S} = \operatorname{rint} S$ zu zeigen. Die Inklusion $\operatorname{rint} \bar{S} \supseteq \operatorname{rint} S$ gilt trivialerweise. Sei nun $\mathbf{x} \in \operatorname{rint} \bar{S}$; somit gibt es also eine Kugel $B(\mathbf{x}, \delta)$ mit $B(\mathbf{x}, \delta) \cap \operatorname{aff} \bar{S} \subseteq \bar{S}$. Wir wählen ein $\mathbf{y} \in \operatorname{rint} S$ (nach Satz 2.2.7) und setzen $\mathbf{z} := (1 + \Delta) \mathbf{x} - \Delta \mathbf{y}$ mit $\Delta := \delta / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Man beachte, daß $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{S}$ und daher $\mathbf{z} \in \operatorname{aff} \bar{S} = \operatorname{aff} S$ gilt. Es folgt

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \Delta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \delta, \quad \text{also } \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap \operatorname{aff} \bar{S},$$

d. h., $\mathbf{z} \in \bar{S}$. Mit Lemma 2.2.8 ergibt sich $(\mathbf{z}, \mathbf{y}] \subseteq \operatorname{rint} S$, und wegen

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1 + \Delta} \mathbf{z} + \left(1 - \frac{1}{1 + \Delta}\right) \mathbf{y} \quad \text{mit } \frac{1}{1 + \Delta} \in (0, 1)$$

folgt wie gewünscht $\mathbf{x} \in \operatorname{rint} S$. □

Korollar 2.2.11 Seien S_1 und S_2 konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n . Aus $\overline{S_1} = \overline{S_2}$ folgt dann $\text{rint } S_1 = \text{rint } S_2$. \square

Satz 2.2.12 Seien S_1 und S_2 konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n , die die Bedingung $\text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2 \neq \emptyset$ erfüllen. Dann gelten die beiden folgenden Identitäten:

$$\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \quad (2.4)$$

$$\text{rint}(S_1 \cap S_2) = \text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2. \quad (2.5)$$

Beweis Offensichtlich gilt stets $\overline{S_1 \cap S_2} \subseteq \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. Sei nun $\mathbf{x} \in \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. Nach Voraussetzung gibt es einen Punkt $\mathbf{y} \in \text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2$. Nach Lemma 2.2.8 folgt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2 \subseteq S_1 \cap S_2$$

und daher $\mathbf{x} \in \overline{S_1 \cap S_2}$.

Um auch die Aussage (2.5) zu beweisen, wenden wir zunächst (2.4) auf die relativen Inneren $\text{rint } S_i$ sowie die Mengen S_i selbst an und erhalten unter Berücksichtigung von Satz 2.2.10

$$\overline{S_1 \cap S_2} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} = \overline{\text{rint } S_1} \cap \overline{\text{rint } S_2} = \overline{\text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2}.$$

Mit Korollar 2.2.11 folgt hieraus sofort

$$\text{rint}(S_1 \cap S_2) = \text{rint}(\text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2) \subseteq \text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2.$$

Umgekehrt sei nun $\mathbf{y} \in \text{rint } S_1 \cap \text{rint } S_2$. Wegen Lemma 2.2.8 gilt für jedes $\mathbf{x}_1 \in S_1$ die Bedingung $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}] \subseteq \text{aff } S_1 \cap \text{rint } S_1$; nach Definition des relativen Inneren kann $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}]$ über \mathbf{y} hinaus verlängert werden, etwa bis \mathbf{z}_1 , so daß immer noch $(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_1] \subseteq S_1$ gilt. Analoges gilt für $\mathbf{x}_2 \in S_2$. Wir wählen nun

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \text{rint}(S_1 \cap S_2) \quad \text{mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.^6$$

Also gibt es ein $\mathbf{z} \in S_1 \cap S_2$ mit $(\mathbf{x}, \mathbf{z}] \subseteq S_1 \cap S_2$ und $\mathbf{y} \in (\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Aus Lemma 2.2.2 folgt aber $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \subseteq \text{rint}(S_1 \cap S_2)$ und somit $\mathbf{y} \in \text{rint}(S_1 \cap S_2)$. \square

Auch der Beweis des nächsten Satzes sei dem Leser als Übung überlassen, die diesmal allerdings nicht ganz einfach ist.

Satz 2.2.13 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung, und seien $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $T \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex. Dann gelten:

$$\text{rint } f(S) = f(\text{rint } S); \quad (2.6)$$

$$\text{rint } f^{-1}(T) = f^{-1}(\text{rint } T), \quad \text{falls } f^{-1}(\text{rint } T) \neq \emptyset \text{ gilt.} \quad (2.7)$$

⁶ Falls solch ein \mathbf{x} nicht existiert, sind wir bereits fertig, wie sich der Leser überlegen möge.



<http://www.springer.com/978-3-642-54820-8>

Optimierungsmethoden

Eine Einführung

Jungnickel, D.

2015, XVI, 279 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-54820-8