



---

Dieter Jungnickel

# Optimierungsmethoden

Eine Einführung

3., neu bearbeitete Auflage

Dieter Jungnickel  
Lehrstuhl für Diskrete Mathematik  
Optimierung und Operations Research  
Universität Augsburg  
Augsburg  
Deutschland

Mathematics Subject Classification (2010): 49–01, 90–01, 52–01

ISBN 978-3-642-54820-8

ISBN 978-3-642-54821-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-54821-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999, 2008, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

---

## Vorwort zur dritten Auflage

Die dritte Auflage dieses Buches ist nochmals gründlich überarbeitet worden. Insbesondere ist die Reihenfolge des (insgesamt weitgehend unverändert gebliebenen) Materials so umgestellt worden, daß man bereits im ersten Semester eines Optimierungszyklus nicht nur die wichtigsten theoretischen Grundlagen – also konvexe Mengen und Polyeder sowie notwendige Optimalitätsbedingungen für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen – behandeln kann, sondern auch noch zum Simplexverfahren kommt. Allerdings wird man die etwas weitergehenden Fragestellungen zum Simplexverfahren – also Stalling, das duale Simplexverfahren sowie Postoptimierung und parametrische Analyse – wahrscheinlich erst im zweiten Teil des Zyklus bewältigen können. Ich habe aber weiterhin an meinem Prinzip festgehalten, die Grundlagen der linearen wie der nichtlinearen Optimierung so weit möglich gemeinsam zu behandeln: Zuerst kommen also in Kap. 2 konvexe Mengen, und erst danach werden im Kap. 3 spezielle Eigenschaften von Polyedern (sowie der Zusammenhang zur linearen Optimierung) untersucht.

Die eben beschriebene Umstellung des Materials ist insbesondere dann hilfreich, wenn man das Buch für eine lediglich einsemestrige Einführung in die Optimierung verwenden will oder aber etliche Teilnehmer nur den ersten Teil eines Optimierungszyklus hören – was in Augsburg beispielsweise auf viele Lehramtsstudenten zutrifft. Zudem vermeidet man auf diese Weise eine – zumindest von manchen Studierenden so empfundene – theoretische Überfrachtung des ersten Teils des Zyklus.

Abgesehen vom neuen Aufbau des Buches ist der gesamte Text nochmals gründlich durchgesehen worden. Wie sich im Vorlesungsbetrieb herausgestellt hat, enthielt die zweite Auflage doch deutlich mehr Druckfehler (teilweise leider auch in Formeln) als ich gedacht bzw. gehofft hatte. Dementsprechend sind zahlreiche kleinere Korrekturen vorgenommen worden. Außerdem habe ich die Darstellung etlicher Beweise und Beispiele nochmals überarbeitet und ganz generell den Text „poliert“; zudem sind viele Abbildungen neu erstellt worden.

Auch diesmal möchte ich wieder meinen Studenten diverser Jahrgänge für ihre aufmerksame Mitarbeit sowie meinen Mitarbeitern und Hilfskräften danken, die im laufenden Übungsbetrieb einen unverzichtbaren Beitrag zur Bewältigung des Vorlesungsstoffes geleistet haben, insbesondere den Herren Doktoren Matthias Tinkl und Markus Göhl. Dabei

danke ich Herrn Tinkl ganz speziell auch für die Erstellung der geänderten Abbildungen. Dank gebührt schließlich noch meinem Kollegen Herrn Prof. Dr. Dirk Hachenberger für etliche hilfreiche Kommentare und Verbesserungsvorschläge. Die eventuell immer noch verbliebenen Fehler gehen natürlich zu meinen Lasten.

Augsburg, im Februar 2014

Dieter Jungnickel

---

## Vorwort zur zweiten Auflage

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Büchleins haben sich die deutschen Universitäten stark verändert, insbesondere auch durch den Übergang von Diplom- zu Bachelor/Master-Studiengängen. Die Augsburger Wirtschaftsmathematik hat diesen Übergang ziemlich früh vollzogen, mit nicht unbeträchtlichen Auswirkungen auf den Aufbau des Studiums.

Es gibt zwar nach wie vor einen viersemestrigen Zyklus, dessen Thema Optimierungsmethoden und Operations Research sind und der eines der beiden Kernstücke des anwendungsorientierten Augsburger Studienganges in Wirtschaftsmathematik ist. Dieser zerfällt aber nun viel deutlicher als zuvor in zwei Teile: Die beiden Vorlesungen *Optimierung I* und *Optimierung II* gehören zur Bachelor-Ausbildung, während die beiden daran anschließenden Vorlesungen *Optimierung III* und *Optimierung IV* Teil des Master-Studiums geworden sind.

Somit hören alle diejenigen Studierenden, die die Universität bereits nach dem Bachelor-Abschluß verlassen, nur noch die ersten beiden Vorlesungen des ursprünglich auf vier Semester konzipierten Zyklus. Das hat uns zu inhaltlichen Änderungen im Studienaufbau veranlasst, da es sicherzustellen galt, daß alle Augsburger Absolventen – egal ob Bachelor oder Master – neben einer gründlichen Kenntnis der linearen Optimierung zumindest auch Grundkenntnisse über die Theorie der nichtlinearen Optimierung sowie über kombinatorische Optimierung besitzen.

In Anbetracht dieser Situation werden in Zukunft in der zweiten Hälfte der Vorlesung *Optimierung II* die wichtigsten Grundbegriffe über algorithmische Graphentheorie und Netzwerke zur Verfügung gestellt, also etwa kürzeste Wege, minimale aufspannende Bäume, bipartites Matching und Flüsse auf Netzwerken einführend behandelt. Um die notwendige Zeit dafür zu gewinnen, wird in der Bachelor-Ausbildung auf die Algorithmen der nichtlinearen Optimierung verzichtet; diese werden später im Master-Studium im Rahmen der Vorlesungen *Numerische Verfahren der Wirtschaftsmathematik I* und *II* behandelt. In den beiden Vorlesungen *Optimierung III* und *Optimierung IV* erfolgt dann ein vertieftes Studium von Verfahren der kombinatorischen und ganzzahligen Optimierung; ergänzend können auch Themen wie Spieltheorie oder Matroide behandelt werden.

Bei der Überarbeitung des Textes der ersten Auflage habe ich die eben beschriebenen Veränderungen im Studienablauf in Augsburg berücksichtigt und zwei Kapitel sowie einen Anhang hinzugefügt. Abgesehen von diesem zusätzlichen Material, das gleich noch kurz beschrieben werden soll, habe ich den schon vorliegenden Teil gründlich überarbeitet. Insbesondere sind etliche Druckfehler und kleinere Ungenauigkeiten korrigiert worden; daneben wurden aber auch einige Beweise völlig umgeschrieben und weitere Beispiele sowie ein Exkurs über den Satz von Helly hinzugefügt. Am prinzipiellen Aufbau und Inhalt der ersten vier Kapitel hat sich aber gegenüber der Beschreibung im Vorwort zur ersten Auflage nichts geändert.

Im neuen Kap. 5 werden lineare Programme näher untersucht. Dazu gehen wir zunächst auf die theoretischen Grundlagen ein, wobei wir wegen ihrer enormen Wichtigkeit die fundamentalen Ergebnisse über Dualität und Komplementarität nochmals direkt – also ohne Verwendung der KKT-Theorie aus der nichtlinearen Optimierung – beweisen. Danach folgen weitere wichtige theoretische Ergebnisse, insbesondere algebraische Charakterisierungen von Ecken und freien Richtungen für diejenigen Polytope, die zu linearen Programmen in Standardform gehören. Den Hauptteil des Kapitels bildet dann das detaillierte Studium der immer noch wichtigsten Methode zur Lösung linearer Programme, nämlich des Simplexverfahrens. Allerdings kann dieser praktisch eminent nützliche Algorithmus für ungünstige Problemklassen exponentiell viele Iterationen benötigen, weswegen wir auch noch ein ganz anders geartetes Verfahren vorstellen werden, das lineare Programme stets in polynomial vielen Schritten löst und in seiner Konzeption auf den sogenannten Barriereverfahren aus der nichtlinearen Optimierung beruht; man benötigt aber keine Resultate aus diesem Gebiet, um die Korrektheit des Verfahrens zu beweisen.

Somit werden die Algorithmen der nichtlinearen Optimierung doch noch kurz angesprochen, wenn auch in der Anwendung auf lineare Programme. Wir werden aber so bereits ein Phänomen kennenlernen, das durchaus typisch für nichtlineare Algorithmen ist: Meist erreicht man keine (lokal) optimale Lösung, sondern konstruiert bestenfalls eine Folge approximativer Punkte, für die jeder Häufungspunkt ein lokales Optimum ist. Im Spezialfall linearer Programme kann man dieses Problem noch gut in den Griff bekommen und mithilfe der Geometrie der zugrundeliegenden Polyeder ein endliches – und sogar polynomial – Verfahren erhalten. Im allgemeinen Fall ist dies aber nicht möglich; damit treten zwangsläufig immer wieder Konvergenzbeweise auf, weswegen es sich lohnt, eine Konvergenztheorie für „algorithmische Abbildungen“ zu entwickeln. Mit diesem Thema werden wir uns im neuen Kap. 6 als Abschluß unserer Einführung in die Grundlagen der Optimierung beschäftigen.

In einigen Vorlesungszyklen hat sich herausgestellt, daß man heutzutage in der linearen Algebra häufig keinerlei Geometrie mehr betreibt – mit dem traurigen Ergebnis, daß die Studierenden nichts über Begriffe wie *affine Abhängigkeit* oder *affine Unterräume* wissen, die man nun einmal in der Optimierung benötigt. Zumindest gilt diese Erfahrung für Augsburg; ich vermute aber, daß es auch anderswo nicht viel besser aussehen wird. Daher stellen wir noch in einem Anhang die wichtigsten Grundbegriffe aus der affinen Geome-

trie zusammen, soweit sie eben für uns von Nutzen sind. Für weiterführende Ergebnisse müssen wir allerdings auf einschlägige Lehrbücher der Geometrie verweisen.

Auch diesmal möchte ich wieder meinen Studenten diverser Jahrgänge danken, deren Mitarbeit und kritische Fragen vielerlei Anregungen geliefert haben und die die kleinen wie auch die gelegentlichen größeren Probleme der jeweiligen Versionen mit mehr oder weniger Fassung ertragen haben. Dank gilt natürlich wieder ebenso meinen Assistenten und Hilfskräften, die im laufenden Übungsbetrieb einen unverzichtbaren Beitrag zur Bewältigung des Vorlesungsstoffes geleistet haben, sowie diesmal auch denjenigen Lesern der ersten Auflage, die mich mit Anmerkungen und Anregungen kontaktiert haben; dabei möchte ich insbesondere Herrn Prof. Dr. Hanfried Lenz für seine detaillierten Kommentare danken, die an etlichen Stellen zu einer Verbesserung der Darstellung geführt haben. Wie immer gehen die noch verbliebenen – kaum vermeidbaren, aber hoffentlich eher unbedeutenden – Fehler natürlich zu meinen Lasten.

Augsburg, im Juni 2008

Dieter Jungnickel



---

## Vorwort zur ersten Auflage

Die Vorlesungen Optimierungsmethoden I und II sowie Operations Research I und II bilden einen viersemestrigen Zyklus, der eines der beiden Kernstücke des Augsburger Diplomstudienganges in Wirtschaftsmathematik ist. In vielen Anwendungen in der Wirtschaft, Technik und Verwaltung muß man Entscheidungen treffen, die in einem gewissen Sinne optimal sind; Optimierung und Operations Research sollen diese Aufgabe mit quantitativen, mathematisch präzisen Methoden unterstützen.

Wir können in unserem Vorlesungszyklus nicht näher darauf eingehen, wie man in der Praxis auftretende Probleme mathematisch modelliert; vielmehr müssen wir uns mit einigen einführenden (nicht sehr realistischen) Beispielen begnügen, die hoffentlich trotzdem zur Motivation beitragen. Die Modellbildung ist natürlich eine äußerst wichtige (und keineswegs triviale) Aufgabe, die der Anwender bewältigen muß, bevor eines der mathematischen Lösungsverfahren, die wir kennenlernen werden, zum Einsatz kommen kann. Wir verweisen für dieses Thema auf einschlägige Monographien, etwa Williams [32] oder Ciriani und Leachmann [10]; sehr interessant ist auch der von Bachem, Jünger und Schrader herausgegebene Sammelband mit praktischen Fallstudien zur Anwendung mathematischer Methoden (nicht nur aus der Optimierung) in Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin [1]. Je nach Aufgabenstellung wird man auf verschiedenartige mathematische Probleme geführt; man unterscheidet in der Optimierung insbesondere zwischen linearer, nichtlinearer, ganzzahliger und kombinatorischer Optimierung. (Eine Abgrenzung dieser Begriffe werden wir im einführenden Kap. 1 vornehmen.) Es sei noch erwähnt, daß wir auch auf einen zweiten, praktisch unverzichtbaren Problemkreis ebenfalls nur sehr wenig eingehen können, nämlich auf Fragen der numerischen Umsetzung der von uns behandelten Algorithmen; hierzu empfehlen wir die Bücher von Gill, Murray und Wright [14, 15] oder Spellucci [29].

Die Vorlesungen Optimierungsmethoden I und II behandeln traditionell die lineare und die nichtlineare Optimierung, und zwar in dieser Reihenfolge. Dies kann – auch in Anbetracht der nicht gerade glücklichen Namensgebung – den Eindruck erwecken, daß es sich hier um zwei mehr oder weniger disjunkte Teilgebiete der Optimierung handelt. Dies ist aber keineswegs der Fall, denn zumindest vom theoretischen Standpunkt her ist die lineare Optimierung nur der einfachste Spezialfall der sogenannten nichtlinearen Optimierung.

Bei den Algorithmen gibt es weitaus größere Unterschiede, aber selbst hier weisen neuere Entwicklungen lange ungeahnte Verwandtschaften auf. Es wäre also viel besser, wenn man genauer von *nicht notwendig linearer* Optimierung sprechen würde! Natürlich ist diese Bezeichnung zu umständlich, und es wird bei der etablierten, irreführenden Terminologie bleiben.

Der von mir gewählte Aufbau der Vorlesungen Optimierungsmethoden I und II trägt den eben genannten Tatsachen Rechnung und weicht damit von der fast überall üblichen Darstellung ab: In der ersten dieser beiden Vorlesungen – die vom vorliegenden, auf der im Wintersemester 1997/98 gehaltenen Vorlesung beruhenden Skript abgedeckt wird – behandeln wir in aller Ausführlichkeit die theoretischen Grundlagen der nichtlinearen Optimierung und spezialisieren diese Ergebnisse jeweils für den linearen Fall. Im einführenden ersten Kapitel werden zunächst anhand einiger Beispiele etliche Klassen von Optimierungsproblemen beschrieben und dann die wichtigsten Ergebnisse der „klassischen“ Optimierung ins Gedächtnis gerufen; hier geht es um die Minimierung reellwertiger Funktionen über den ganzen Raum  $\mathbb{R}^n$ , womit es sich einfach um einen Teil der Analysis handelt. In den Kap. 2 und 3 werden dann die Grundlagen der konvexen Optimierung behandelt, nämlich die Geometrie konvexer Mengen im  $\mathbb{R}^n$  sowie das Verhalten konvexer Funktionen. Das ist sinnvoll, da die konvexe Optimierung nicht nur einen besonders nützlichen Spezialfall der nichtlinearen Optimierung darstellt, sondern auch im allgemeinen Fall gewisse (gegebenenfalls abgeschwächte) Konvexitätseigenschaften eine wichtige Rolle spielen. Wie sich zeigen wird, kann man das Studium konvexer Mengen als eine geometrische Formulierung des Studiums von (im allgemeinen unendlichen) Systemen linearer Ungleichungen ansehen; daher können viele Resultate und Begriffsbildungen am besten als Verallgemeinerungen wohlbekannter Konzepte aus der linearen Algebra verstanden werden, wobei zudem die geometrische Anschauung hilfreich sein sollte. Um nur ein konkretes Beispiel anzudeuten: Wir werden Aussagen darüber, wie man zwei konvexe Mengen im  $\mathbb{R}^n$  „trennen“ kann, dazu verwenden, auf elegante Weise Sätze über die alternative Lösbarkeit von gewissen Paaren von Ungleichungssystemen herzuleiten. Diese „Alternativsätze“ werden dann ihrerseits wichtige Anwendungen in Kap. 4 haben, in dem notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz (lokaler bzw. globaler) Optima für allgemeine nichtlineare Probleme untersucht werden. Wie bereits gesagt, werden wir unsere allgemeinen Ergebnisse auf den linearen Fall spezialisieren; wir schränken dann bspw. das Studium beliebiger konvexer Mengen auf die Untersuchung von Polyedern ein, und aus der allgemeinen Existenztheorie wird sich der berühmte, auch praktisch sehr wichtige Dualitätssatz über lineare Programme ergeben.

Im (Skript zum) zweiten Teil des Zyklus werden dann algorithmische Fragen, also Verfahren zur tatsächlichen (zumindest näherungsweisen) Bestimmung lokaler oder globaler Optima, im Vordergrund stehen. Obwohl also der Aufbau dieser beiden Vorlesungen und der zugehörigen Skripten etwas unkonventionell ist, will und kann ich kein besonderes Maß an Originalität dafür in Anspruch nehmen; bei einem so klassischen Stoff wie der Optimierung wäre eine allzu originelle Darstellung vielleicht auch eher gefährlich als nützlich. Ich habe für die Vorbereitung viele Quellen verwendet, von denen hier hinsichtlich

der konvexen und nichtlinearen Optimierung insbesondere die Bücher von Hiriart-Urruty und Lemaréchal [19], Bazaraa, Sheraly und Shetty [3] und Luenberger [22] genannt seien; für die lineare Optimierung und Polytope waren mir die beiden Bücher von Bazaraa, Jarvis und Sherali [2] bzw. Schrijver [28] besonders nützlich. Daneben habe ich natürlich auch die Augsburger Vorlesungsskripten bzw. Notizen [8, 16, 17] meiner Kollegen Borgwardt und Grötschel konsultiert. Schließlich seien noch stellvertretend von vielen anderen drei weitere Bücher erwähnt, in die man mit Gewinn schauen wird: Chvátal [11], Stoer und Bulirsch [31] sowie Ziegler [33].

Abschließend möchte ich es nicht versäumen, meinen Studenten diverser Jahrgänge zu danken, deren Mitarbeit und kritische Fragen vielerlei Anregungen geliefert haben und die die unvermeidbaren Irrtümer der jeweiligen Versionen mit Fassung ertragen haben. Entsprechendes gilt natürlich auch für meine jeweiligen Assistenten und Hilfskräfte, die im laufenden Übungsbetrieb einen unverzichtbaren Beitrag zum schließlichen Verständnis des Vorlesungsstoffes geleistet haben. Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Sekretärin, Frau Margit Brandt, die mir bei der Erstellung der Druckvorlagen für das vorliegende Skript eine große Hilfe war (eine Aufgabe, die zweifellos durch die bekannt schwierige Dechiffrierung meiner Handschrift nicht gerade erleichtert wurde), sowie Herrn Dr. Andreas Enge, der das vorliegende Skript gründlich Korrektur gelesen und mich auf einige Probleme hingewiesen hat; die sicherlich immer noch vorhandenen (hoffentlich kleinen) Fehler gehen natürlich zu meinen Lasten.

Augsburg, im April 1998

Dieter Jungnickel

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	1
1.1	Ein erstes Beispiel	1
1.2	Nichtlineare Optimierungsprobleme	9
1.3	Einige Spezialfälle	12
1.4	Optimalitätskriterien im klassischen Fall	16
<b>2</b>	<b>Konvexe Mengen</b>	23
2.1	Grundlagen	23
2.2	Topologische Eigenschaften konvexer Mengen	28
2.3	Projektionen und Trennungssätze	33
2.4	Alternativsätze	38
2.5	Extrempunkte und Seitenflächen	45
2.6	Rezessions- und Polarkegel	48
2.7	Tangential- und Normalkegel	52
2.8	Der Tangentialkegel bei Ungleichungsrestriktionen	57
2.9	Notwendige Optimalitätsbedingungen bei Ungleichungsrestriktionen	60
<b>3</b>	<b>Polyeder und Lineare Programme</b>	71
3.1	Seitenflächen von Polyedern	71
3.2	Primitive Polyeder	75
3.3	Darstellungen von Polyedern	78
3.4	Exkurs: Der Satz von Helly	85
3.5	Spitze Polyeder	87
3.6	Lineare Programme: Dualität und Komplementarität	89
3.7	Die explizite Beschreibung von Ecken und extremalen freien Richtungen	97
<b>4</b>	<b>Das Simplexverfahren</b>	105
4.1	Die Grundform des Simplexverfahrens	105
4.2	Initialisierung: Die Phase I	119
4.3	Kreiseln und Auswahlregeln	132
4.4	Stalling	140

---

4.5	Das duale Simplexverfahren .....	146
4.6	Postoptimierung .....	155
4.7	Parametrische lineare Programme .....	162
4.8	Ausblick .....	172
<b>5</b>	<b>Konvexe Funktionen</b> .....	<b>175</b>
5.1	Grundlagen .....	175
5.2	Konvexe Funktionen und Differenzierbarkeit .....	183
5.3	Optima konvexer Funktionen .....	187
5.4	Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe .....	194
<b>6</b>	<b>Optimalitätskriterien</b> .....	<b>203</b>
6.1	Ungleichungsrestriktionen .....	204
6.2	Gleichungsrestriktionen .....	208
6.3	Der allgemeine Fall .....	215
6.4	Kriterien zweiter Ordnung .....	220
6.5	Lagrange-Dualität .....	227
<b>7</b>	<b>Ausblick: Allgemeine Algorithmen</b> .....	<b>237</b>
7.1	Ein polynomialer Algorithmus für Lineare Programme .....	238
7.2	Der globale Konvergenzsatz .....	249
7.3	Zusammengesetzte algorithmische Abbildungen .....	254
7.4	Ausblick .....	260
	<b>Anhang: Affine Geometrie</b> .....	<b>263</b>
	<b>Literatur</b> .....	<b>273</b>
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	<b>275</b>



<http://www.springer.com/978-3-642-54820-8>

Optimierungsmethoden

Eine Einführung

Jungnickel, D.

2015, XVI, 279 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-54820-8