

# **Ritter, Voß: Erfolgreich starten ins Ingenieurstudium, Lösungen zu den Übungsaufgaben**

# Kapitel 1

## Aufgabe 1.1

a) Die schriftliche Division von 1 durch 9 liefert:

$$1 : 9 = 0.11\dots$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -9 \\ \hline \end{array}$$

..

b) Es ist  $x = 0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{25 \cdot 5}{25 \cdot 40} = \frac{5}{5 \cdot 8} = \frac{1}{8}$ . Für  $x = 0.\overline{12}$  folgt  $100 \cdot x = 12.\overline{12}$  und Subtrahieren von  $x = 0.\overline{12}$  ergibt  $99 \cdot x = 12$ . Also gilt  $x = \frac{12}{99}$ .

c) Es ist  $x_1 = \frac{7}{16} + \frac{5}{8} = \frac{7}{16} + \frac{10}{16} = \frac{17}{16}$ . Weiter ist  $x_2 = \frac{7}{16} + \frac{2}{3} = \frac{21}{48} + \frac{32}{48} = \frac{53}{48}$ . Ferner ist  $x_3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$ .

d) Es gilt  $z_1(x) = \left(\frac{x+3}{x+7}\right) : \left(\frac{x^2-9}{4}\right) = \frac{x+3}{x+7} \cdot \frac{4}{(x+3)(x-3)} = \frac{4}{(x+7)(x-3)}$  und  $z_2 = \frac{5x^2-35x}{(2x+1)(x-7)} = \frac{5x(x-7)}{(2x+1)(x-7)} = \frac{5x}{2x+1}$ .

## Aufgabe 1.2

Es ist zweckmäßig, zuerst den Bruch im Zähler mit nur einem Bruchstrich zu schreiben:

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_r A} + \frac{d-d_1}{\epsilon_0 A}} \\ &= \frac{1}{\frac{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)}{\epsilon_0 \epsilon_r A}} && \text{auf Hauptnenner bringen und addieren} \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} && \text{Kehrbruch bilden.} \end{aligned}$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{C_b}{C_a} &= \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)}}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} \\ &= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} \cdot \frac{d}{\epsilon_0 A} && \text{multiplizieren mit Kehrbruch} \\ &= \frac{\epsilon_r d}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} && \text{multiplizieren und kürzen.} \end{aligned}$$

## Aufgabe 1.3

a) Es ist  $x = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$  und  $y = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ .

- b)** Es gilt  $z(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^6}{(x+1)^{12}}} = \frac{(x^2-1)^{6/3}}{(x+1)^{12/3}} = \frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ .
- c)** Aus  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  folgt durch Quadrieren  $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$  und weiter  $l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g$ .
- d)** Es ist  $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \pi = \frac{\pi}{6}d^3$ .

### Aufgabe 1.4

- a)** Aus  $\frac{4}{3}r^3\pi > 1$  folgt  $r^3 > \frac{3}{4\pi}$  und  $r > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ .
- b)** Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:  
 Fall 1:  $x \geq 5$ : Die Ungleichung lautet  $x - 5 < 3 \Rightarrow x < 8$ , also  $\mathbb{L}_1 = \{5 \leq x < 8\}$ .  
 Fall 2:  $x < 5$ : Die Ungleichung lautet  $5 - x < 3 \Rightarrow x > 2$ , also  $\mathbb{L}_2 = \{2 < x < 5\}$ .  
 Es ist  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2 < x < 8\}$ .
- c)** Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:  
 Fall 1:  $12y + 4 \geq 0$  bzw.  $y \geq -\frac{1}{3}$ : Die Ungleichung lautet  $12y + 4 > 5 \Rightarrow y > \frac{1}{12}$ , also  $\mathbb{L}_1 = \{y > \frac{1}{12}\}$ .  
 Fall 2:  $y < -\frac{1}{3}$ : Die Ungleichung lautet  $-12y - 4 > 5 \Rightarrow 12y < -9 \Rightarrow y < -\frac{9}{12}$  bzw.  $y < -\frac{3}{4}$ , also  $\mathbb{L}_2 = \{y < -\frac{3}{4}\}$ .  
 Es ist  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{y : y > \frac{1}{12} \text{ oder } y < -\frac{3}{4}\}$ .

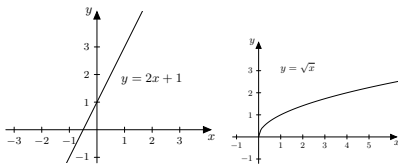
### Aufgabe 1.5

- a)** Es ist  $\log_7(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(7)} = 1.1833 \dots$
- b)** Aus  $\lg((4x)^2) = 5$  folgt  $2\lg(4x) = 5 \Rightarrow \lg(4x) = \frac{5}{2} \Rightarrow 4x = 10^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{10^{\frac{5}{2}}}{4} = 79.06$ .
- c)** Aus  $y = e^{f(x)} = x^{x^2}$  folgt durch Logarithmieren  $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ .

## Kapitel 2

### Aufgabe 2.1

- a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 4, links  
 b) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 4, rechts



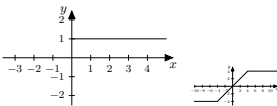
**Abb. 4** Die Funktionen aus Aufgabe 2.1 a) links und b) rechts

### Aufgabe 2.2

- a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 5, links

b) Es ist  $y = f(x) = \begin{cases} -4, & x < -4 \\ x, & -4 \leq x \leq 4 \\ 4 & x > 4 \end{cases}$

Das Schaubild finden Sie in Abbildung 5, rechts.



**Abb. 5** Die Funktionen aus Aufgabe 2.2 a) links und b) rechts

### Aufgabe 2.3

- a) Die Funktionsvorschrift lautet  $f_1(x) = 35 \cdot x$ .  $f_1(x)$  ordnet der Anzahl von Tagen  $x$  die Menge an verbrauchtem Heizöl (in Litern) zu.  
 b) Die Funktionsvorschrift lautet  $f_2(x) = 0.8 \cdot x$ .  $f_2(x)$  ordnet der Menge  $x$  an Heizöl (in Litern) die Kosten in Euro zu.  
 c) Die Verkettung von  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  lautet  $g(x) = f_1(f_2(x)) = 35 \cdot (0.8 \cdot x) = 28 \cdot x$ .  $g(x)$  ordnet der Anzahl von Tagen  $x$  die Heizkosten in Euro zu.

### Aufgabe 2.4

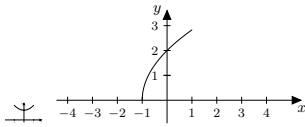
Die Verkettung der Funktionen  $y = g(x) = \frac{1+x}{1-x}$  mit  $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  und  $y = f(x) = x^2 + 2$  mit  $D(f) = \mathbb{R}$  und  $W(f) = [2, \infty)$  ist gegeben durch

$$y = h(x) := g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \frac{1 + (x^2 + 2)}{1 - (x^2 + 2)} = -\frac{3 + x^2}{1 + x^2}$$

mit  $D(h) = \mathbb{R}$  und  $W(h) = [-3, -1)$ .

**Aufgabe 2.5**

- a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 6, links. Man muss die Normalparabel  $y = x^2$  mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  multiplizieren (stauchen) und danach um  $y = 1$  nach oben verschieben.
- b) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 6, rechts. Man muss die Wurzel  $y = \sqrt{x}$  mit dem Faktor 2 multiplizieren (strecken) und danach um 1 nach links verschieben.



**Abb. 6** Die Funktionen aus Aufgabe 2.5 a) links und b) rechts

**Aufgabe 2.6**

- a) Die Funktion ist für  $x \in \mathbb{R}$  definiert, d.h.  $D = \mathbb{R}$ . Für ein beliebiges  $x \in D$  gilt

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x)^4 = x^2 + 2x^4 = f(x),$$

d.h. die Funktion  $y = f(x)$  ist in  $D$  gerade bzw. symmetrisch zur  $y$ -Achse.

- b) Der Definitionsbereich der Funktion ist durch die Werte der Variablen  $x$  bestimmt, für die keine negativen Radikanden der Wurzeln auftreten. Für  $x \in [0, 1]$  gilt  $1 + x > 0$  und  $1 - x \geq 0$ , d.h. die Radikanden sind positiv und  $D = [0, 1]$  ist der Definitionsbereich. Damit gilt für  $x \in D$

$$f(-x) = \sqrt{1 + (-x)} - \sqrt{1 - (-x)} = \sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x} = -f(x),$$

d.h. die Funktion ist ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung.

- c) Es ist  $D(f) = \mathbb{R}$ . Weiter gilt

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^7 = (-1)^5 x^5 - (-1)^7 x^7 = -(x^5 - x^7) = -f(x),$$

also ist  $f$  ungerade.

- d) Es ist  $D(f) = \mathbb{R}$ . Weiter gilt

$$f(-x) = 1 + 2(-x)^2 = 1 + 2x^2 = f(x),$$

also ist  $f$  gerade.

**Aufgabe 2.7**

- a) Das Polynom  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  hat die Nullstelle  $x_0 = 0$ . Es gilt  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x^2 - 3x + 2)$ .  $x^2 - 3x + 2$  hat die Nullstellen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$  (quadratische Gleichung). Es folgt  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ .
- b) Das Polynom  $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2$  besitzt die Nullstellen  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$ . Polynomdivision  $\frac{P_4(x)}{(x-1) \cdot (x+1)}$  liefert  $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ . Wegen  $x^2 + 2 > 0$  gibt es keine weiteren Nullstellen.
- c) Das Polynom  $P_4(x) = x^4 - 1$  besitzt die Nullstellen  $x_0 = 1$  und  $x_1 = -1$ . Die Polynomdivision  $\frac{P_4(x)}{(x-1) \cdot (x+1)}$  liefert  $P_4(x) = x^4 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$ . Wegen  $x^2 + 1 > 0$  gibt es keine weiteren Nullstellen.

**Aufgabe 2.8**

- a) Für  $R(x) = \frac{x+2}{x \cdot (x-2)}$  sind die Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 2$  Polstellen, jeweils mit Vorzeichenwechsel.
- b) Für  $R(x) = \frac{x+2}{2x^2+4x}$  sind die Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = -2$  kritisch. Wegen  $R(x) = \frac{x+2}{2x^2+4x} = \frac{x+2}{2x \cdot (x+2)} = \frac{1}{2x}$  ist  $x_0 = 0$  eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und  $x_1 = -2$  ist eine Lückenstelle. Setzt man  $R(-2) := -\frac{1}{4}$ , kann man die Lücke schließen.

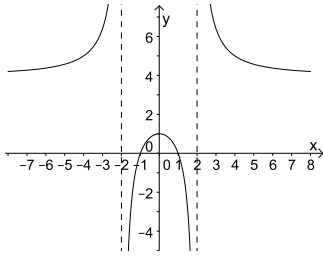
**Aufgabe 2.9**

Die Bedingung für die Nullstelle liefert die Gleichung  $b \cdot 1^2 - 4 \doteq 0 \Rightarrow b = 4$ . Mit der Zerlegung des Nenners  $x^2 - a = (x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a})$  und der Bedingung für den Pol in  $x = 2$  folgt für  $a$  die Gleichung  $2 - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$ , d.h.  $a = 4$ .

Wir erhalten

$$R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}.$$

Durch die Faktorisierung des Zählers (Polynomdivision)  $4x^2 - 4 : (x - 1) = 4x + 4$  folgt eine weitere Nullstelle bei  $x = -1$ . Mit der Faktorisierung des Nenners  $(x + 2) \cdot (x - 2)$  erhalten wir einen weiteren Pol bei  $x = -2$  (Abb. 7).



**Abb. 7** Die Funktion  $R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}$  aus Aufgabe 2.9

### Aufgabe 2.10

- a)** Es gilt  $T(t) = (T_0 - T_u) e^{k \cdot t} + T_u$  mit  $T_0 < T_u$ .
- b)** Die Funktion der Biertemperatur lautet  $T(t) = (20 - 4) e^{-0.014 \cdot t} + 4$ . Es ist  $T(t_0) = 6 \Leftrightarrow 6 \doteq 16e^{-0.014t_0} + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \doteq e^{-0.014t_0} \Leftrightarrow t_0 = -\frac{1}{0.014} \ln\left(\frac{1}{8}\right) = 148.54$ . Man muss das Bier ca. 2 Stunden und 30 Minuten vor dem Spiel in den Kühlschrank legen.

### Aufgabe 2.11

Mit den Additionstheoremen des Sinus  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$  und Kosinus  $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$  sowie mit dem trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  erhält man:

**a)**

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (1 - 2\sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) \cdot \sin(x) = \cos(x) - 4\sin^2(x)\cos(x) \\ &= \cos(x) - 4(1 - \cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

### Aufgabe 2.12

- a)** Für  $y = f(x) = 3\sin(4x - 2) = 3\sin(4(x - \frac{1}{2}))$  ist die Amplitude  $a = 3$ , die Periode  $p = \frac{\pi}{2}$ , die Verschiebung (Nulldurchgang)  $x_0 = \frac{1}{2}$  und die Phase  $\varphi = -2$ .
- b)** Für  $y = f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$  ist die Amplitude  $a = \frac{1}{2}$ , die Periode  $p = \pi$ , die Verschiebung (Nulldurchgang)  $x_0 = 0$  und die Phase  $\varphi = 0$ .

**Aufgabe 2.13**

a) Mit  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  und  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} \left( (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1.\end{aligned}$$

b) Das Additionstheorem für den Hyperbelsinus lautet:

$$\begin{aligned}\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.14**

Aus  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  folgt mit  $w = e^x$  die Gleichung  $2y = w - w^{-1}$  und Multiplikation mit  $w > 0$  liefert die quadratische Gleichung  $w^2 - 2wy - 1 = 0$  mit der Lösung

$$w_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Wegen  $w > 0$  und  $\sqrt{y^2 + 1} > y$  scheidet das Minuszeichen aus. Also gilt:

$$w = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Die Auflösung nach  $x$  liefert  $x = \ln \left( y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$  und Umbenennen ergibt:

$$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

**Aufgabe 2.15**

Für die Funktion  $y = f(x) = |x + 3| - |x - 2|$  gilt:

i)  $x < -3$ : Hier sind in beiden Beträgen die Argumente negativ und es gilt:

$$y = f(x) = |x + 3| - |x - 2| = -(x + 3) - (-1) \cdot (x - 2) = -5$$

ii)  $-3 \leq x \leq 2$ : hier ist das Argument in  $|x - 2|$  negativ (oder 0) und das Argument in  $|x + 3|$  ist positiv (oder 0). Es gilt:

$$y = f(x) = |x + 3| - |x - 2| = (x + 3) - (-1) \cdot (x - 2) = 2x + 1$$

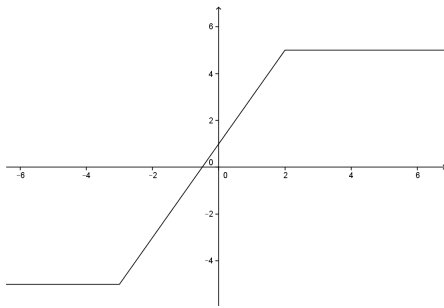


iii)  $x > 2$ : Hier sind in beiden Beträgen die Argumente positiv und es gilt:

$$y = f(x) = |x + 3| - |x - 2| = (x + 3) - (x - 2) = 5$$

Wir erhalten also (vgl. Abb. 8):

$$y = f(x) = \begin{cases} -5, & x < -3 \\ 2x + 1, & -3 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$



**Abb. 8** Die Funktion  $y = f(x) = |x+3| - |x-2|$  aus Aufgabe 2.15

## Kapitel 3

### Aufgabe 3.1

- a)  $x^2 - 6x + 4 = 0$  ist eine quadratische Gleichung. Die  $p/q$ -Formel liefert  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$ .
- b)  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$  ist eine biquadratische Gleichung. Substitution  $z = x^2$  liefert die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z - 8 = 0$  mit den Lösungen  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = 4, -2$ . Da  $z = x^2 \geq 0$  ist scheidet  $-2$  aus. Für  $z = x^2 = 4$  ergeben sich die Lösungen  $x_{1,2} = \pm 2$ .
- c)  $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$ . Wir raten die Lösung  $x_0 = 1$ :  $1 - 2 + 3 - 2 = 0$ . Polynomdivision ergibt  $(x^3 - 2x^2 + 3x - 2) : (x - 1) = x^2 - x + 2$ . Wegen  $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$  ist  $x_0 = 1$  die einzige Lösung.
- d)  $\frac{x^2+2x}{x-1} = 5x$ . Die Gleichung gilt nur für  $x \neq 1$ . Multiplikation mit  $x - 1$  liefert  $x^2 + 2x = 5x^2 - 5x$  bzw.  $x \cdot (4x - 7) = 0$  mit den Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \frac{7}{4}$ .

### Aufgabe 3.2

Wir formen um:

$$\begin{aligned}
 (1-p)R_1 &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & | \cdot (R_1 + R_2) \\
 (1-p)R_1(R_1 + R_2) &= R_1 R_2 & \text{links ausmultiplizieren} \\
 (1-p)R_1^2 + (1-p)R_1 R_2 &= R_1 R_2 & | - R_1 R_2 - (1-p)R_1^2 \\
 -pR_1 R_2 &= -(1-p)R_1^2 & | : (-pR_1) \\
 R_2 &= \frac{(1-p)}{p} R_1
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3.3

- a)  $\sqrt{x+1} = x$ . Da  $\sqrt{\dots} \geq 0$  ist, muss  $x \geq 0$  sein. Quadrieren ergibt  $x+1 = x^2$  bzw.  $x^2 - x - 1 = 0$ . Die  $p/q$ -Formel liefert  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Wegen  $x \geq 0$  folgt  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
- b)  $x-2 = \sqrt{x}$ . Da  $\sqrt{\dots} \geq 0$  ist, muss  $x \geq 2$  sein. Quadrieren ergibt  $x^2 - 4x + 4 = x$  bzw.  $x^2 - 5x + 4 = 0$ . Die  $p/q$ -Formel liefert  $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{2} = 4, 1$ . Wegen  $x \geq 2$  scheidet  $x = 1$  aus und es verbleibt  $x = 4$  als Lösung.

- c)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = 2$ . Quadrieren ergibt  $x-1+x+1+2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 4$  bzw.  $2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 4-2x$  oder nach Kürzen  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} = 2-x$ . Nochmals Quadrieren ergibt  $(x-1) \cdot (x+1) = 4-4x+x^2$  bzw.  $x^2-1 = 4-4x+x^2$  oder  $4x = 5$ , also  $x = \frac{5}{4}$ . Durch Einsetzen bestätigt man die Lösung.

### Aufgabe 3.4

- a)  $\log_{10}(x) = \frac{3}{2}$  bedeutet  $10^{3/2} = x$ , also  $x = 31.623 \dots$   
 b)  $3^x = 15$ . Anwendung des  $\ln$  auf beiden Seiten liefert  $\ln(3^x) = \ln(15) \Rightarrow x \cdot \ln(3) = \ln(15)$  also  $x = \frac{\ln(15)}{\ln(3)} = 2.465 \dots$   
 c)  $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ . Substitution  $z = e^x$  liefert die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z - 3 = 0$  mit den Lösungen  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = 3, -1$ . Wegen  $z = e^x \geq 0$  scheidet  $-1$  aus. Also  $z = e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3) = 1.0986 \dots$   
 d) Für große  $t$  strebt  $e^{-\frac{t}{2}}$  gegen 0 und  $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$  strebt gegen 1. Die zu lösende Gleichung lautet  $1 - e^{-\frac{t}{2}} = 0.63$  bzw.  $e^{-\frac{t}{2}} = 0.37$ . Logarithmieren liefert  $-\frac{t}{2} = \ln(0.37)$  bzw.  $t = -2 \cdot \ln(0.37) = 1.989 \dots$

### Aufgabe 3.5

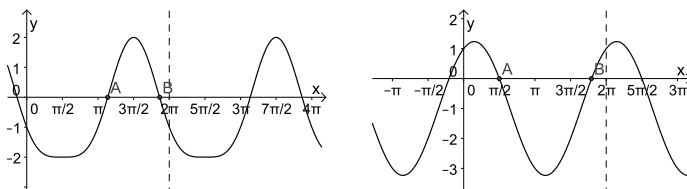
- a) Wegen  $e^{\dots} > 0$  sind die Nullstellen von  $y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin(2t) = 0$  bestimmt durch  $\sin(2t) = 0$ . Wegen  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x_k = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ , folgt  $t_k = \frac{k}{2} \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ .  
 b)  $\sin^2(x) - 2\sin(x) - 1 = 0$ . Substitution  $z = \sin(x)$  liefert die quadratische Gleichung  $z^2 - 2z - 1 = 0$  mit den Lösungen  $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$ . Wegen  $z = \sin(x)$  gilt  $|z| \leq 1$  und somit  $z = 1 - \sqrt{2}$ . Es folgt  $x = \arcsin(1 - \sqrt{2})$  und wegen der Mehrdeutigkeit erhalten wir die Lösungen  $x_{1,k} = \arcsin(1 - \sqrt{2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ . Aus Symmetriegründen sind auch die  $x_{2,k} = \pi - x_{1,k}, \quad k \in \mathbb{Z}$ , Lösungen der Gleichung.  
 Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der  $2\pi$ -Periode reicht jeweils ein Wert:  $\sin^2(x_{1,0}) - 2\sin(x_{1,0}) - 1 = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{1,k}$  tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt  $\sin^2(x_{2,0}) - 2\sin(x_{2,0}) - 1 = \sin^2(3.5687) - 2\sin(3.5687) - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{2,k}$  ebenfalls Lösungen. Abbildung 9, links, zeigt die Lösungen im Intervall  $[0, 2\pi]$ : Der Punkt A entspricht  $x_{2,0} = \pi - x_{1,0}$  und B entspricht  $x_{1,1}$ .  
 c) Die Vereinheitlichung von  $\sin(x) + 2\cos(x) = 1$  zu  $\sin(x)$  liefert  $\sin(x) + 2\sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1$  bzw.  $\sin(x) - 1 = -2\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ . Quadrieren ergibt  $\sin^2(x) - 2\sin(x) + 1 = 4(1 - \sin^2(x))$  bzw.  $5\sin^2(x) - 2\sin(x) - 3 = 0$

oder normiert  $\sin^2(x) - \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{3}{5} = 0$ . Substitution  $z = \sin(x)$  ergibt die quadratische Gleichung  $z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{3}{5} = 0$  mit der Lösung  $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{15}{25}}$  bzw.  $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = 1, -\frac{3}{5}$ . Aus  $z_1 = 1$  folgt  $x_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$  und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen  $x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Aus  $z_2 = -\frac{3}{5}$  folgt  $x_2 = \arcsin(-\frac{3}{5})$  und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen  $x_{2,k} = \arcsin(-\frac{3}{5}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Aus Symmetriegründen sind auch  $x_{3,k} = \pi - x_{2,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , potenzielle Lösungen der Gleichung.

Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der  $2\pi$ -Periode reicht jeweils ein Wert:  $\sin(x_{1,0}) + 2\cos(x_{1,0}) - 1 = 0$ . Also sind die  $x_{1,k}$  tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt  $\sin(x_{2,0}) + 2\cos(x_{2,0}) - 1 = -\frac{3}{5} + 2\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 0$ , also sind die  $x_{2,k}$  ebenfalls Lösungen. Einsetzen von  $x_{3,1} = 3.7851$  zeigt, dass  $x_{3,1}$  die Gleichung nicht löst, d.h. die  $x_{3,k}$  sind keine Lösungen der Gleichung.

Abbildung 9, rechts, zeigt die Lösungen im Intervall  $[0, 2\pi]$ : Der Punkt A entspricht  $x_{1,1}$  und B entspricht  $x_{2,1}$ .

Alternativ: Die Vereinheitlichung von  $\sin(x) + 2\cos(x) = 1$  auf  $\cos(x)$  liefert  $\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 2\cos(x) = 1$  bzw.  $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = 1 - 2\cos(x)$ . Quadrieren ergibt  $1 - \cos^2(x) = 1 - 4\cos(x) + 4\cos^2(x)$  bzw.  $5\cos^2(x) = 4\cos(x)$ . Für den Fall  $\cos(x) = 0$  folgen die Lösungen  $x_{1,k} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Beim Test durch Einsetzen bleiben nur die  $x_{1,k}$  mit geradem  $k$  als Lösungen übrig. Für den Fall  $\cos(x) \neq 0$  folgt die Gleichung  $\cos(x) = \frac{4}{5}$  mit den Lösungen  $x_{2,k} = \arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sowie aus Symmetriegründen  $x_{3,k} = -\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Beim Test durch Einsetzen erweisen sich die  $x_{2,k}$  als Scheinlösungen, d.h. sie erfüllen die Ausgangsgleichung nicht. Die  $x_{3,k}$  sind Lösungen der Ausgangsgleichung.



**Abb. 9** Die Funktionen aus Aufgabe 3.5 b) links und c) rechts

## Kapitel 4

### Aufgabe 4.1

- a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4)} = \frac{1}{9 - 4} = \frac{1}{5}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x \cdot (3 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x + 1} = 1$

### Aufgabe 4.2

- a) Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$$

Für  $x \neq 0$  ist  $y = f(x)$  durch die Funktionsgleichung erklärt. Setzt man  $f(0) := 2$ , so ist die Funktion für alle  $x$  stetig.

- b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für  $x \neq 0$  ist  $y = f(x)$  durch die Funktionsgleichung erklärt. Setzt man  $f(0) := \frac{1}{2}$ , so ist die Funktion für alle  $x$  stetig.

- c)  $y = f(x)$  ist zusammengesetzt aus stetigen Funktionen. Daher ist nur die Nahtstelle  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  zu untersuchen. Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (a - x^2) = a - \frac{\pi^2}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0$$

Wir wählen nun  $a$  so, dass  $a - \frac{\pi^2}{4} \doteq 0$ , d.h.  $a = \frac{\pi^2}{4}$ . Dann stimmen links- und rechtsseitiger Funktionenlimes an der Nahtstelle überein und die Funktion ist stetig.

### Aufgabe 4.3

- a)  $\left( \sin(x) + x^{\frac{1}{2}} \right)' = \cos(x) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

- b)  $(2e^x - \cosh(x) + x^2)' = 2e^x - \sinh(x) + 2x$   
 c)  $(4x^2 - 7x^{\frac{2}{3}} + 3)' = 8x - \frac{14}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

#### Aufgabe 4.4

- a)  $(\sin(x) \cdot \cos(x))' = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$   
 b)  $(2x \cdot e^x)' = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1 + x)$   
 c)  $(e^{2x} \cdot \sin(x))' = 2e^{2x} \cdot \sin(x) + e^{2x} \cdot \cos(x) = e^{2x}(2\sin(x) + \cos(x))$   
 d)  $(\sin(x) \cdot \cos(2x))' = \cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x)$   
 e)  $(6x \cdot e^{2x})' = 6e^{2x} + 12x \cdot e^{2x} = 6e^{2x}(1 + 2x)$   
 f)  $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$   
 g)  $\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$   
 h)  $\left(\frac{e^x}{\sin(x)}\right)' = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{\sin^2(x)}$   
 i)  $\left(\frac{\sin(2x)}{3x^2}\right)' = \frac{2\cos(2x) \cdot 3x^2 - 6x \sin(2x)}{9x^4} = \frac{2x \cos(2x) - 2\sin(2x)}{3x^3}$   
 j)  $\left(\frac{x-1}{\sin(2x)}\right)' = \frac{\sin(2x) - 2(x-1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

#### Aufgabe 4.5

- a) Die Ableitung von  $y = f(x) = x^x$  erhält man mit der Darstellung  $x^x = e^{x \ln(x)}$  über die Kettenregel:

$$(x^x)' = (e^{x \ln(x)})' = e^{x \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

- b)  $(\sin(x^4))' = \cos(x^4) \cdot 4x^3$   
 c)  $((x^2 - 1)^4)' = 4(x^2 - 1)^3 \cdot 2x = 8x \cdot (x^2 - 1)^3$   
 d)  $(\ln(x^2 + 2))' = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 2}$   
 e)  $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$   
 f)  $(\cos(x^3))' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3)$   
 g)  $(\cos(x)^3)' = 3\cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) = -3\sin(x) \cos^2(x)$

**Aufgabe 4.6**

- a) Für die Funktion  $y = f(x) = x^3 + x^2$  gilt  $f'(x) = 3x^2 + 2x = x \cdot (3x + 2)$  und  $f''(x) = 6x + 2$ . Es ist  $f'(x) = x \cdot (3x + 2) = 0$  für  $x_1 = -\frac{2}{3}$  und für  $x_2 = 0$ , dort besitzt der Graph eine horizontale Tangente. Weiter gilt  $f''(x_1) = 6 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2 = -2 < 0$  und deshalb ist  $x_1$  ein lokales Maximum. Aus  $f''(x_2) = 2 > 0$  folgt, dass  $x_2$  ein lokales Minimum ist.
- b) Für  $f(x) = (2x+1) \cdot e^{1-x}$  folgt  $f'(x) = 2e^{1-x} - (2x+1)e^{1-x} = e^{1-x}(1-2x)$  und  $f''(x) = -2e^{1-x} - e^{1-x}(1-2x) = -e^{1-x}(3-2x)$ . Aus  $f'(x) = 0$  folgt  $x_0 = \frac{1}{2}$  und mit  $f''(\frac{1}{2}) = -e^{1-\frac{1}{2}}(-1+3) < 0$  erweist sich  $(x_0, f(x_0)) = (\frac{1}{2}, 2\sqrt{e})$  als lokales Maximum.
- c) Für  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  folgt  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$  und  $f''(x) = 6x - 12$ . Aus  $f'(x) = 0$  bzw.  $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$  folgt  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 3, 1$ . Wegen  $f''(3) = 6 > 0$  erweist sich  $(3, -2)$  als lokales Minimum. Wegen  $f''(1) = -6 < 0$  handelt es sich bei  $(1, 2)$  um ein lokales Maximum.
- d) Für  $f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$  folgt  $f'(x) = e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)$  und  $f''(x) = e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)^2 + e^{x \ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$ . Aus  $f'(x) = 0$  bzw.  $e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = 0$  folgt wegen  $e^{\dots} > 0$  die Bedingung  $\ln(x) + 1 = 0$ , also  $x_0 = \frac{1}{e}$ . Wegen  $f''(\frac{1}{e}) = 0 + e^{-\frac{1}{e}} \cdot e > 0$  erweist sich  $(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{e}})$  als lokales Minimum.

**Aufgabe 4.7**

- a) Der Flächeninhalt ergibt sich aus  $F(x) = 2x \cdot (16 - x^2) = 32x - 2x^3$ . Weiter folgt  $F'(x) = 32 - 6x^2$  und aus  $F'(x) \stackrel{!}{=} 0$  folgen die kritischen Stellen  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{32}{6}} = \pm \sqrt{\frac{16}{3}} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$ . Mit  $F''(x) = -12x$  folgt  $F''(x_1) < 0$ , d.h.  $x_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$  ist ein Maximum. Es ergibt sich  $F(\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{256}{3\sqrt{3}} = 49.2672 \dots$ . Das Rechteck hat die Länge  $\frac{8}{\sqrt{3}}$  und die Höhe  $16 - \frac{4^2}{3} = \frac{32}{3}$ .
- b) Aus  $x + y = 72$  und der Bedingung  $x^3 \cdot y \stackrel{!}{=} \max$  erhalten wir die Funktion  $f(x) = x^3 \cdot (72 - x)$  deren Maximum wir suchen. Aus  $f'(x) = 216x^2 - 4x^3 \stackrel{!}{=} 0$  folgen die kritischen Stellen  $x_1 = 0$  (uninteressant) und  $x_2 = 54$ . Wegen  $f''(x_2) = -11664 < 0$  ist  $x_2$  tatsächlich ein Maximum von  $f(x)$ . Also ist  $x = 54$  und  $y = 18$ .
- c) Für das Volumen des Schüttgutbehälters gilt  $V = V_{\text{Zyl}} + V_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r^2 \cdot 5 + \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot l$ . Aus der Angabe der Seitenlinie des Kegels berechnet man mit dem Satz von Pythagoras  $r^2 + l^2 = 15^2$ , also  $r^2 = 225 - l^2$ . Somit folgt

$$V(l) = 5\pi \cdot (225 - l^2) + \frac{1}{3}\pi \cdot (225 - l^2) \cdot l$$

mit  $V'(l) = -10\pi \cdot l + 75\pi - \pi \cdot l^2$  und  $V''(l) = -10\pi - 2\pi \cdot l$ . Aus der Bedingung  $V'(l) = 0$  bzw.  $l^2 + 10l - 75 = 0$  mit den Lösungen  $l_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 75} =$

$-5 \pm 10 = -15$ ; 5 folgt  $l_1 = 5$  m. Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ergibt keinen Sinn. Mit  $V''(5) = -20\pi < 0$  wird das Volumen für die Wahl von  $l_1 = 5$  m maximal. Mit  $r = \sqrt{225 - 25} = \sqrt{200} = 14.142$  m ist das maximale Volumen des Behälters  $V_{\max} = V(5) = \frac{4000}{3}\pi = 4188.8$  m<sup>3</sup>.

#### Aufgabe 4.8

- a) Für  $f(x) = \sqrt{3 + e^x}$ ,  $x \in [0, \infty)$  ist  $f(0) = \sqrt{3 + e^0} = 2$ . Mit der Kettenregel berechnen wir die 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{3 + e^x}} \quad \text{sowie} \quad f'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{1}{4}.$$

Mit der Quotientenregel folgt:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x \sqrt{3 + e^x} - e^x \cdot \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{3 + e^x}}}{(\sqrt{3 + e^x})^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2e^x(3 + e^x) - e^{2x}}{(\sqrt{3 + e^x})^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2x} + 6e^x}{(\sqrt{3 + e^x})^3}.$$

Die Taylor'sche Formel erster Ordnung um  $x_0 = 0$  mit dem Restglied von Lagrange lautet:

$$f(x) = \sqrt{3 + e^x} = 2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \frac{e^{2\xi} + 6e^\xi}{(\sqrt{3 + e^\xi})^3} \cdot x^2, \quad 0 \leq x < \infty$$

Falls  $0 < x < \infty$  ist, gilt für die Zwischenstelle  $0 < \xi < x$ .

- b) Es ist  $f(x) = e^{\sin(2x)}$ ,  $f'(x) = 2e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x)$ ,  $f''(x) = 4e^{\sin(2x)} \cdot (\cos^2(2x) - \sin(2x))$ . Mit  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  und  $f''(0) = 4$  ergibt sich

$$p_2(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 = 1 + 2x + 2x^2.$$

- c) Für die Funktion  $f(x) = \tan(x)$  lauten die 1. und 2. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad f''(x) = \frac{-2\cos(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^4(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}.$$

Mit dem Taylor'schen Polynom 1. Ordnung, dem Restglied in der Form von Lagrange sowie dem Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  erhält man:

$$\tan(x) = \tan(0) + \frac{1}{\cos^2(0)} \cdot x + \frac{2\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)} \cdot \frac{x^2}{2} = x + \frac{2\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)} \cdot \frac{x^2}{2}, \quad 0 < \xi < x \leq \frac{\pi}{4}$$

Da im Intervall  $[0, \frac{\pi}{4}]$  der Sinus monoton steigt und der Kosinus monoton fällt, erhalten wir die Abschätzung

$$|\tan(x) - x| \leq \left| x^2 \cdot \frac{\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)} \right| = x^2 \cdot \frac{\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)} \leq x^2 \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos^3(\frac{\pi}{4})} = x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}$$

und eine gesuchte Konstante  $C$  ist gegeben durch  $C = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = 2$ .



**Aufgabe 4.9**

a) Mit der Regel von l'Hospital (Typ  $\frac{0}{0}$ ) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{1} = 3.$$

b) Die mehrmalige Anwendung der Regel von l'Hospital (Typ  $\frac{0}{0}$ ) liefert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sinh(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cosh(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

c) Die Regel von l'Hospital (Typ  $\frac{0}{0}$ ) und Kürzen liefern:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^9 + 1}{x^7 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^8}{7x^6} = \frac{9}{7}$$

d) Hier liegt zunächst der Fall  $\frac{\infty}{\infty}$  vor:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \frac{1}{\cos^2(3x)}}{5 \frac{1}{\cos^2(5x)}} = \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(5x)}{\cos^2(3x)}$$

Nun haben wir einen Grenzwert vom Typ  $\frac{0}{0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(5x)}{\cos^2(3x)} &= \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(5x) \cdot (-\sin(5x)) \cdot 5}{2 \cos(3x) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(5x) \cdot \sin(5x)}{\cos(3x) \cdot \sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \cdot \sin^2(5x) + 5 \cdot \cos^2(5x)}{-3 \cdot \sin^2(3x) + 3 \cdot \cos^2(3x)} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(5x) - \cos^2(5x)}{\sin^2(3x) - \cos^2(3x)} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

e) Vor Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel formen wir die Funktion um:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = 0,$$

d.h. es liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel vor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1}$$

Erneut liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel vor, denn es ist  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} (xe^x + e^x - 1) = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2} \text{ und damit}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

f) Es liegt ein unbestimmter Ausdruck der Form  $1^\infty$  vor. Umformen ergibt

$$(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2(x)}} = e^{\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \ln(\sin(x))}.$$

Für den Exponenten  $\frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos^2(x) = 0$ . Demzufolge sind die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel erfüllt:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{-2 \cos(x) \cdot \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-2 \sin^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir damit den gesuchten Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos^2(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \ln(\sin(x)) \right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

## Kapitel 5

### Aufgabe 5.1

- a)**  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$   
**b)**  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$   
**c)**  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$   
**d)**  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$   
**e)**  $\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$

### Aufgabe 5.2

Zunächst beschreiben wir den Spannungsverlauf mithilfe einer Funktionsgleichung. Es handelt sich um eine Gerade, die die  $u$ -Achse bei  $\frac{\hat{u}}{2}$  schneidet und die Steigung  $\frac{\hat{u}}{2T}$  hat:

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}}{2}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Damit ist nach der 1. binomischen Formel:

$$u^2(t) = \left( \frac{\hat{u}}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}}{2} \right)^2 = \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot t^2 + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}^2}{4}$$

Für  $\int_0^T u^2(t) dt$  erhält man:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T u^2(t) dt &= \int_0^T \left( \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot t^2 + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}^2}{4} \right) dt \\
 &= \left[ \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{\hat{u}^2}{4} \cdot t \right]_0^T && \text{Stammfunktionen} \\
 &= \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot \frac{T^3}{3} + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{\hat{u}^2}{4} \cdot T && \text{Grenzen einsetzen} \\
 &= \frac{7}{12} \hat{u}^2 \cdot T && \text{zusammenfassen.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Damit ist } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{7}{12} \cdot \hat{u}^2 \cdot T} = \sqrt{\frac{7}{12}} \hat{u} \approx 0.764 \hat{u}.$$

### Aufgabe 5.3

Mit der 2. binomischen Formel folgt:

$$u^2(t) = \left( U e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0 \right)^2 = U^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} + 2U U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T u^2(t) dt &= \int_0^T \left( U^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} + 2UU_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2 \right) dt \\
 &= \left[ U^2 \cdot \left( \frac{-\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} + 2UU_0 \cdot (-\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2 \cdot t \right]_0^T \\
 &= -\frac{U^2 \cdot \tau}{2} \cdot \left( e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1 \right) - 2UU_0 \cdot \tau \cdot \left( e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right) + U_0^2 \cdot T \\
 &= \frac{U^2 \cdot \tau}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right) + 2UU_0 \cdot \tau \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) + U_0^2 \cdot T
 \end{aligned}$$

Weiter folgt  $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{U^2 \cdot \tau}{2T} \left( 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right) + \frac{2UU_0 \cdot \tau}{T} \left( 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \right) + U_0^2}.$

#### Aufgabe 5.4

**a)** Die partielle Integration mit  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = \sin(3x)$  und  $u'(x) = 1$ ,  $v(x) = -\frac{\cos(3x)}{3}$  liefert

$$\int x \cdot \sin(3x) dx = \frac{1}{9} \sin(3x) - \frac{1}{3} x \cos(3x) + c.$$

**b)** Die partielle Integration mit  $u(y) = y$ ,  $v'(y) = \cos(y)$  und  $u'(y) = 1$ ,  $v(y) = \sin(y)$  liefert

$$\int y \cdot \cos(y) dy = \cos(y) + y \sin(y) + c.$$

**c)** Die partielle Integration mit  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = e^{2x}$  und  $u'(x) = 1$ ,  $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$  liefert

$$\int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{4} (-1 + 2x) e^{2x} + c.$$

**d)** Die partielle Integration mit  $u(t) = t^2$ ,  $v'(t) = e^t$  und  $u'(t) = 2t$ ,  $v(t) = e^t$  liefert  $\int t^2 \cdot e^t dt = t^2 e^t - 2 \int t \cdot e^t dt$ . Eine weitere partielle Integration mit  $u(t) = t$ ,  $v'(t) = e^t$  und  $u'(t) = 1$ ,  $v(t) = e^t$  liefert schließlich

$$\int t^2 \cdot e^t dt = (2 - 2t + t^2) \cdot e^t + c.$$

#### Aufgabe 5.5

**a)** Die Substitution  $u(x) = 2x + 1$ ,  $du = 2dx$  liefert

$$\int (2x + 1)^3 dx = \int \frac{u^3}{2} du = \frac{u^4}{8} + c = \frac{1}{8} (1 + 2x)^4 + c.$$

**b)** Die Substitution  $u(t) = t^2 + 1$ ,  $du = 2t \, dt$  liefert

$$\int t \cdot \cos(t^2 + 1) \, dt = \int \frac{1}{2} \cos(u) \, du = \frac{1}{2} \sin(u) + c = \frac{1}{2} \sin(t^2 + 1) + c.$$

**c)** Die Substitution  $u(t) = t^3$ ,  $du = 3t^2 \, dt$  liefert zunächst unbestimmt

$$\int t^2 \cdot e^{t^3} \, dt = \int \frac{1}{3} e^u \, du = \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{t^3} + c,$$

und Einsetzen der Grenzen ergibt

$$\int_0^2 t^2 \cdot e^{t^3} \, dt = \frac{e^8}{3} - \frac{1}{3}.$$

**d)** Die Substitution  $u(x) = \sin(x)$ ,  $du = \cos(x) \, dx$  liefert

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2(x) + c.$$

**e)** Die Substitution  $u(x) = \sin(x)$ ,  $du = \cos(x) \, dx$  liefert

$$\int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \, dx = \int e^u \, du = e^u + c = e^{\sin(x)} + c.$$

**f)** Die Substitution  $u(x) = \ln(x)$ ,  $du = \frac{1}{x} \, dx$  liefert

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} \ln^2(x) + c.$$

**g)** Die Substitution  $u(x) = x^2 + 1$ ,  $du = 2x \, dx$  liefert

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln(u) + c = \ln(x^2 + 1) + c.$$

**h)** Die Substitution  $u(x) = \cos(x)$ ,  $du = -\sin(x) \, dx$  liefert

$$\int \tan(x) \, dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = \int \frac{-1}{u} \, du = -\ln(u) + c = -\ln|\cos(x)| + c.$$

### Aufgabe 5.6

**a)** Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 1} \, dx = \int \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) \, dx = \frac{5}{2} \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + c.$$

**b)** Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{(x - 3) \cdot (x^2 - 1)} \, dx &= \int \left( -1 \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} \right) \, dx \\ &= -\ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x - 3| + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + c. \end{aligned}$$

c) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)} dx = \int \left( \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x-2| + \ln|x+2| + c = \ln|x^2-4| + c.$$

d) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx &= \int \left( 1 + \frac{2}{x^2-1} \right) dx = x + \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

e) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+1}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} dx &= \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - 5 \ln|x-1| + \frac{9}{2} \ln|x-2| + c. \end{aligned}$$

### Aufgabe 5.7

a)  $\int x^2 \cdot \ln(x) dx$ . Die partielle Integration  $u(x) = \ln(x)$ ,  $v'(x) = x^2$  mit  $u'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $v(x) = \frac{x^3}{3}$  liefert  $\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \frac{x^3}{9} + c$ .

b)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$ . Die Substitution  $z = e^x + 1$ ,  $dz = e^x dx$  liefert  $\int \frac{z-1}{\sqrt{z}} dz = \int \left( \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz = \frac{2}{3} z^{3/2} - 2z^{1/2} + c = \frac{2}{3} (e^x + 1)^{3/2} - 2(e^x + 1)^{1/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{e^x+1} \cdot (e^x - 2) + c$ .

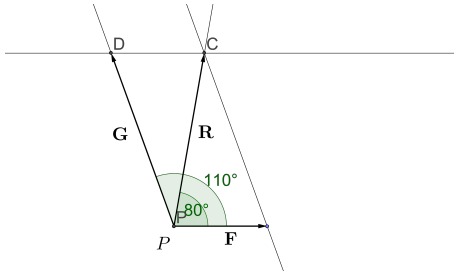
c)  $\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx$ . Die partielle Integration  $u(x) = e^{3x}$ ,  $v'(x) = \sin(x)$  mit  $u'(x) = 3e^{3x}$ ,  $v(x) = -\cos(x)$  liefert  $\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx = -e^{3x} \cdot \cos(x) + 3 \int e^{3x} \cdot \cos(x) dx$ . Eine weitere partielle Integration mit  $u(x) = e^{3x}$ ,  $v'(x) = \cos(x)$  mit  $u'(x) = 3e^{3x}$ ,  $v(x) = \sin(x)$  liefert  $\int e^{3x} \cdot \cos(x) dx = e^{3x} \cdot \sin(x) - 3 \int e^{3x} \cdot \sin(x) dx$ . Insgesamt ergibt sich:

$$\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx = -e^{3x} \cdot \cos(x) + 3 \left( e^{3x} \cdot \sin(x) - 3 \int e^{3x} \cdot \sin(x) dx \right) \text{ bzw.}$$

$$10 \int e^{3x} \cdot \sin(x) dx = -e^{3x} \cdot \cos(x) + 3e^{3x} \cdot \sin(x) + c \text{ oder}$$

$$\int e^{3x} \cdot \sin(x) dx = -\frac{1}{10} e^{3x} \cdot \cos(x) + \frac{3}{10} e^{3x} \cdot \sin(x) + c$$

**d)**  $\int \frac{x+2}{x(x+4)} dx$ . Die Partialbruchzerlegung liefert  $\frac{x+2}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$  mit  $A = B = \frac{1}{2}$ . Somit folgt  $\int \frac{x+2}{x(x+4)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{2} (\ln(|x|) + \ln(|x+4|)) + c$ .



**Abb. 10** Kräftezerlegung aus Aufgabe 6.1

## Kapitel 6

### Aufgabe 6.1

Im Endpunkt von  $\mathbf{F}$  wird eine zu  $\mathbf{G}$  parallele Gerade eingezeichnet und mit der Richtung von  $\mathbf{R}$  geschnitten. Dadurch ergibt sich die Länge von  $\mathbf{R}$ . Dann wird eine zu  $\mathbf{F}$  parallele Gerade durch den Endpunkt von  $\mathbf{R}$  gezeichnet und mit der Richtung von  $\mathbf{G}$  geschnitten. Dadurch ergibt sich die Länge von  $\mathbf{G}$ . Ausmessen ergibt  $|\mathbf{G}| = 9.85 \text{ N}$ ,  $|\mathbf{R}| = 9.40 \text{ N}$  (vgl. Abb. 10).

### Aufgabe 6.2

Es ist  $\mathbf{x} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

### Aufgabe 6.3

a) Sei  $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 64 + 1.2^2}$ . Der Vektor

$$\frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{74,44}} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

hat die Länge 1 und zeigt in Richtung von  $\mathbf{a}$ . Daher hat

$$\mathbf{b} = 12 \cdot \frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{12}{\sqrt{74,44}} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.17 \\ 11.13 \\ 1.67 \end{pmatrix}$$

die gewünschte Länge von 12 und die Richtung von  $\mathbf{a}$ .

b) Berechnet man die Länge von  $\mathbf{b}$ , erhält man  $b = \sqrt{144} = 12$ .



**Aufgabe 6.4**

**a)**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

**b)**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow 3 + 2 \cdot (1 + \lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow 7 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{2}$

**Aufgabe 6.5**

$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{z}, \mathbf{z} \perp \mathbf{a}.$

Bildung des Skalarprodukts mit  $\mathbf{a}$  liefert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}}_{=0} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = 2\mathbf{a} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6.6**

**a)**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}, \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}: \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0.$  Daraus folgt  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  oder  $\lambda = 0$  bzw.  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Mindestens einer der beiden Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ist der Nullvektor.

**b)**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\vartheta)$  und  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin(\vartheta)|$ . Aus der Bedingung  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  folgt  $\cos(\vartheta) = |\sin(\vartheta)|$  und damit  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ , oder einer der beiden Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ist der Nullvektor.

**c)**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\vartheta)$ . Aus der Forderung  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$  folgt  $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \cos^2(\vartheta) = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ , also  $\cos^2(\vartheta) = 1$  und somit  $\cos(\vartheta) = \pm 1$  bzw.  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$ .  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  zeigen in dieselbe oder in entgegengesetzte Richtung, oder einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.

**Aufgabe 6.7**

**a)**  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Also ist  $\mathbf{v} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

**b)**  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$  liefert die Bedingung  $6 + 3p - q = 0$  und  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$  liefert die Bedingung  $3 + 4q = 0$ . Die Lösung des Gleichungssystems ist  $p = -\frac{9}{4}, q = -\frac{3}{4}$ .

**Aufgabe 6.8**

Aus  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{b}$  und  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a}$  folgt  $\lambda \mathbf{b} + \mathbf{y} = \mathbf{a}.$

Bildung des Skalarprodukts mit  $\mathbf{b}$  und Beachtung von  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} = 0$  liefert:

$$\lambda \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = -\frac{1}{14}.$$

Wir erhalten  $\mathbf{x} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \frac{1}{14} \mathbf{b} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 \\ -25 \\ 43 \end{pmatrix}$

## Kapitel 7

### Aufgabe 7.1

a) Es ist  $\left[ \begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{-4 \cdot (II)} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 14 & -16 \\ 1 & -3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{:14} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 1 & -3 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{+3 \cdot (I)} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 1 & 0 & \frac{11}{7} \end{array} \right].$  Die Lösung lautet  $x_1 = \frac{11}{7}$  und  $x_2 = -\frac{8}{7}$ .

b) Es ist  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{-4 \cdot (II)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{+2 \cdot (III)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{-(III)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{:(-7)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \cdot (I)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{+(I)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{24}{7} \end{array} \right].$   
Die Lösung lautet  $x_1 = -\frac{6}{7}$ ,  $x_2 = \frac{24}{7}$  und  $x_3 = -\frac{4}{7}$ .

### Aufgabe 7.2

Es ist  $\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2 \cdot (II)} \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 3+2\alpha & 2 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{array} \right].$  Für  $3+2\alpha \neq 0$  bzw.  $\alpha \neq -\frac{3}{2}$

besitzt das LGS eine eindeutige Lösung und zwar  $y = \frac{2}{3+2\alpha}$  und  $x = 1 + \alpha y = \frac{3+4\alpha}{3+2\alpha}$ .

Für  $\alpha = -\frac{3}{2}$  lautet die erste Zeile im zweiten Schema  $0 \cdot y = 2$ . Dies ist für kein  $y$  erfüllbar. Deshalb existiert keine Lösung. Jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist einem der beiden Fälle (eindeutige Lösung oder keine Lösung) zugeordnet. Daher kann der Fall mit unendlich vielen Lösungen nicht eintreten.

### Aufgabe 7.3

a) Es ist  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  und

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ 6 & 16 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist  $C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$  und

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

- c) Bei  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$  stimmt die Anzahl der Spalten der ersten Matrix (d.h. 2) nicht überein mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix (d.h. 1).

d) Hier folgt  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}.$

#### Aufgabe 7.4

Aus der Formel (7.2) für die Inverse einer  $2 \times 2$ -Matrix liest man direkt ab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 7.5

Es ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$  mit  $\det(A) = -5 - 6 = -11$  und  $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$  mit

$\det(A_1) = -20 - 6 = -26$  sowie  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  mit  $\det(A_2) = 2 - 8 = -6$ .

Wegen  $\det(A) = -11 \neq 0$  liefert die Cramer'sche Regel  $x = \frac{26}{11}$  und  $y = \frac{6}{11}$ .

## Kapitel 8

### Aufgabe 8.1

Für  $z_1 = 2 + j$  und  $z_2 = 1 + 3j$  folgt:

- a)  $z_1 + z_2 = 3 + 4j$
- b)  $z_1 - z_2 = 1 - 2j$
- c)  $z_1 \cdot z_2 = -1 + 7j$
- d)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+j}{1+3j} \cdot \frac{1-3j}{1-3j} = \frac{5-5j}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$
- e)  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+3j}{2+j} \cdot \frac{2-j}{2-j} = \frac{5+5j}{5} = 1 + j$
- f)  $z_2^* \cdot z_1 = (1 - 3j) \cdot (2 + j) = 5 - 5j$
- g)  $z_2 \cdot z_2^* = (1 + 3j) \cdot (1 - 3j) = 10$

### Aufgabe 8.2

- a)  $\frac{2+z}{4j} = 7j \Rightarrow z = 7j \cdot 4j - 2 = -30$
- b)  $\frac{1}{z} + \frac{1}{j} = 3 \Rightarrow \frac{1}{z} = 3 - \frac{1}{j} = 3 + j \Rightarrow z = \frac{1}{3+j} \cdot \frac{3-j}{3-j} = \frac{3-j}{10}$
- c)  $\frac{3z}{4z+2} = 4j \Rightarrow 3z = 16zj + 8j \Rightarrow (3-16j)z = 8j \Rightarrow z = \frac{8j}{3-16j} \cdot \frac{3+16j}{3+16j} = \frac{-128+24j}{265}$
- d)  $z + 2z^* = 25 + 3j \Rightarrow (x + jy) + 2(x - jy) = 25 + 3j \Rightarrow 3x - jy = 25 + 3j \Rightarrow x = \frac{25}{3}, y = -3, \text{ also } z = \frac{25}{3} - 3j$

### Aufgabe 8.3

Es folgt:

- a)  $z_1 = \frac{4-3j}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j} = \frac{1-7j}{2}$
- b)  $z_2 = (1 + j) \cdot (3 - j) = 4 + 2j$
- c)  $z_3 = \sqrt{2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - j \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - j$
- d)  $z_4 = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}j}}{1+j} = \frac{2e^{\frac{\pi}{4}j}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}} = \sqrt{2}$

### Aufgabe 8.4

- a)  $z_1 = 2 + 3j, r = \sqrt{13}, \varphi = \arctan(\frac{3}{2}), z_1 = \sqrt{13} \cdot e^{j \arctan(\frac{3}{2})}, z_2 = -2 - 4j, r = \sqrt{20}, \varphi = \arctan(2) + \pi, z_2 = \sqrt{20} \cdot e^{j(\arctan(2) + \pi)}$  und  $z_3 = -7 = 7 \cdot e^{j\pi}$
- b) Mit  $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}$  und  $z_2 = 5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}$  folgt:
 
$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j} \cdot 5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j} = 10 \cdot e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})j} = 10 \cdot e^{\pi j} = -10$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}}{5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}} = \frac{2}{5} \cdot e^{(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})j} = \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}j} = -\frac{2}{5}j$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}}{2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j}} = \frac{5}{2} \cdot e^{(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})j} = \frac{5}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}j} = \frac{5}{2}j$$

$$z_1^3 = (2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}j})^3 = 2^3 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j} = 8 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j}$$

$$z_2^7 = (5 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}j})^7 = 5^7 \cdot e^{\frac{21\pi}{4}j} = 5^7 \cdot e^{\frac{5\pi}{4}j}$$

**Aufgabe 8.5**

Beide Seiten müssen in derselben Darstellungsform vorliegen. Hier bietet es sich an, die linke Seite in die kartesische Form zu bringen:

$$(x + yj)^2 = x^2 + 2jxy - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyj$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2xy = 4$$

Aus der zweiten Beziehung ergibt sich  $y = \frac{2}{x}$ . Eingesetzt in die erste Beziehung erhält man  $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$ , woraus man  $x$  bestimmen kann:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 && \text{ist eine biquadratische Gleichung} \\ u^2 - 3u - 4 &= 0 && \text{nach Substitution } x^2 = u \\ u_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also gibt es zwei Möglichkeiten für  $u$ , nämlich  $u_1 = 4$  und  $u_2 = -1$ . Das ergibt vier mögliche Lösungen für  $x$ :  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = j$ ,  $x_4 = -j$ . Zu jeder Lösung für  $x$  bestimmt man den passenden  $y$ -Wert  $y = \frac{2}{x}$ :  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = \frac{2}{j} = -2j$ ,  $y_4 = -\frac{2}{j} = 2j$ . Da aber  $x, y \in \mathbb{R}$  gesucht sind, sind die Paare  $x_3, y_3$  und  $x_4, y_4$  keine Lösungen der Aufgabe.

**Aufgabe 8.6**

$\underline{Y}$  muss in kartesische Darstellung gebracht werden, damit man den Imaginärteil ablesen kann. Dazu muss der Nenner des Bruchs reell gemacht werden:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} + j\omega C && \text{konjugiert komplex erweitern} \\ &= \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C && \text{ausmultiplizieren} \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C && \text{aufteilen in Real- und Imaginärteil} \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) && \text{sortieren} \end{aligned}$$

Es ist also

$$\text{Im}(\underline{Y}) = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Nullsetzen und Auflösen nach  $\omega$  ergibt:

$$\begin{aligned}\omega \left( C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) &= 0 && \omega \text{ ausklammern} \\ \omega \left( C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) &= 0 && | : \omega \text{ da nur } \omega \neq 0 \text{ sinnvoll ist} \\ C &= \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} && \text{auflösen nach } \omega^2 \\ \omega^2 L^2 C + CR^2 &= L \\ \omega^2 &= \frac{L - CR^2}{L^2 C} && \text{Wurzel ziehen} \\ \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} && \text{nur } \omega > 0 \text{ sinnvoll}\end{aligned}$$

### Aufgabe 8.7

Es gilt:

$$\begin{aligned}y_1(t) - y_2(t) &= \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t) - (\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)) \\ &= 2j \sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir  $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(y_1(t) - y_2(t)) = -\frac{j}{2}(y_1(t) - y_2(t))$ . Weiter folgt:

$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot \sin(\omega_0 t) = -\frac{j}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 t} \cdot (y_1(t) - y_2(t))$$

## Kapitel 9

### Aufgabe 9.1

Es gilt:

$$u'_C(t) = \frac{KU_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{KU_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_0}{RC} \left(1 - K e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = \frac{U_0}{RC}$$

Weiter ist  $u_C(0) = U_0(1 - K) \doteq 0 \Rightarrow K = 1$ .

### Aufgabe 9.2

Es handelt sich um eine Differenzialgleichung 1. Ordnung. Sie hat konstante Koeffizienten, ist linear und homogen. Man kann den Exponentialansatz  $I(t) = e^{\lambda t}$  verwenden:

$$L\lambda e^{\lambda t} + R e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}$$

$$L\lambda + R = 0 \text{ charakteristische Gleichung}$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

Also ist die allgemeine Lösung

$$I(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \quad K \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

In dieser allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung muss die Konstante  $K$  nun noch so bestimmt werden, dass die Anfangsbedingung  $I(0) = I_0$  erfüllt ist. Es ist

$$I(0) = K e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = I_0 \quad \Rightarrow \quad K = I_0.$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

### Aufgabe 9.3

a) Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung liefert:

$$(t^2 + t) \frac{dy}{dt} = 2y + 1 \Rightarrow \frac{dy}{2y + 1} = \frac{dt}{t^2 + t} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2y + 1) = \int \frac{dt}{t^2 + t} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(2y + 1) = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t + 1} dt = \ln |t| - \ln |t + 1| + C = \ln \left( \frac{t}{t + 1} \right) + C$$

Weitere Umformung ergibt:

$$\ln(2y + 1) = \ln \left( \frac{t^2}{(t + 1)^2} \right) + C \Rightarrow 2y + 1 = C \cdot \frac{t^2}{(t + 1)^2} \text{ bzw. } y(t) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{C \cdot t^2}{(t + 1)^2} - \frac{1}{2}$$



**b)** Trennung der Variablen liefert:

$$\frac{dy}{dx} = (2y + 1) \cdot \cot x \Rightarrow \frac{dy}{2y + 1} = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |2y + 1| = \ln |\sin(x)| + C$$

Die Anfangsbedingung ergibt:

$$\frac{1}{2} \ln(2) = \ln(\sin(\frac{\pi}{4})) + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) = \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(2) = -\frac{1}{2} \ln(2) + C \Rightarrow C = \ln(2)$$

Weiter folgt:

$$\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = \ln |\sin(x)| + \ln(2) \mid \exp(\cdot) \Rightarrow 2y + 1 = \sin^2(x) \cdot 4 \Rightarrow y(x) = 2 \sin^2(x) - \frac{1}{2}$$

$$\text{Alternativ: } y(x) = -\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

#### Aufgabe 9.4

**a)** Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

homogene DGL:  $y'(t) - 7 \cdot y(t) = 0$ , es folgt  $y_h(t) = Ce^{7t}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

inhomogene DGL:  $y'(t) - 7 \cdot y(t) = t + 1 - 2 \sin(7t)$

Ansatz vom Typ der Störung:  $y_s(t) = A \cdot t + B + C \sin(7t) + D \cos(7t)$

Ableiten  $y'_s(t) = A + 7C \cos(7t) - 7D \sin(7t)$  und Einsetzen in die DGL liefert:

$$(7C - 7D) \cos(7t) + (-7C - 7D) \sin(7t) + A - 7At - 7B \doteq t + 1 - 2 \sin(7t) \Rightarrow$$

$$C = D, \quad C = \frac{1}{7}, \quad A = -\frac{1}{7}, \quad B = -\frac{8}{49}$$

$$\text{Also: } y_s(t) = -\frac{1}{7}t - \frac{8}{49} + \frac{1}{7} \sin(7t) + \frac{1}{7} \cos(7t)$$

$$\text{allgemeine Lösung: } y(t) = Ce^{7t} - \frac{1}{7}t - \frac{8}{49} + \frac{1}{7} \sin(7t) + \frac{1}{7} \cos(7t), \quad C \in \mathbb{R}$$

**b)** lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

homogene DGL:  $y'(x) - 5 \cdot y(x) = 0$ . Es folgt  $y_h(x) = Ce^{5x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

inhomogene DGL:  $y'(x) - 5 \cdot y(x) = x + e^{2x}$

Ansatz vom Typ der Störung:  $y_s(x) = A + Bx + Ce^{2x}$

Ableiten  $y'_s(x) = B + 2Ce^{2x}$  und Einsetzen in die DGL liefert:

$$B + 2Ce^{2x} - 5A - 5Bx - 5Ce^{2x} \doteq x + e^{2x} \Rightarrow$$

$$(B - 5A) - 5B \cdot x - 3C \cdot e^{2x} \doteq x + e^{2x} \Rightarrow$$

$$C = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad B - 5A = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{25}$$

$$\text{Also: } y_s(x) = -\frac{1}{25} - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}e^{2x}$$

$$\text{allgemeine Lösung: } y(x) = Ce^{5x} - \frac{1}{25} - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Aufgabe 9.5**

a) Bei der homogenen Differenzialgleichung

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

liefert der Exponentialansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

mit den reellen Wurzeln  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = -1$ .

Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Für die homogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Das Fundamentalsystem lautet

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{-2t}$$

und für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung folgt

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 9.6**

Für die homogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = 0$$

liefert der Exponentialansatz die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$  mit den Lösungen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -1$ . Es folgt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $y_h(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-t}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für die inhomogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = 1$$

ist die rechte Seite  $b(t) = 1$  eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung. Hier ist der Ansatz

$$y_s(t) = t \cdot \alpha_0$$

zu wählen, denn nach Einsetzen in die linke Seite der Differenzialgleichung muss noch eine Konstante übrig bleiben. Die Rechnung liefert  $y'_s(t) = \alpha_0$ ,  $y''_s(t) = 0$  und nach Einsetzen in die Differenzialgleichung  $\alpha_0 = 1$ . Also ist  $y_s(t) = t$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung lautet

$$y(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-t} + t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### Aufgabe 9.7

homogene DGL:  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$ . Der Exponentialansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -2; -1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

inhomogene DGL: Der Ansatz vom Typ der Störung lautet:  $y_s(t) = A + Bt + Cte^{-t}$  (Resonanz!), mit den Ableitungen  $y'_s(t) = B + Ce^{-t} - Cte^{-t}$ ,  $y''_s(t) = -2Ce^{-t} + Cte^{-t}$ .

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:

$$Ce^{-t} + 2Bt + 3B + 2A \doteq 10t - e^{-t} \Rightarrow C = -1, \quad B = 5, \quad A = -\frac{15}{2}$$

Die Lösung ist  $y(t) = y_h(t) + y_s(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-t} - \frac{15}{2} + 5t - te^{-t}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 9.8

homogene DGL:  $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 0$ . Der Exponentialansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 3} = 1 \pm \sqrt{2}j \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot e^t \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \cdot e^t \sin(\sqrt{2}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

inhomogene DGL: Der Ansatz vom Typ der Störung lautet:  $y_s(t) = A + Bt + Ce^t$ , mit den Ableitungen  $y'_s(t) = B + Ce^t$ ,  $y''_s(t) = Ce^t$ .

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:

$$2Ce^t + 3Bt + 3A - 2B \doteq 10t + e^t \Rightarrow C = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{10}{3}, \quad A = \frac{20}{9}.$$

Die Lösung ist  $y(t) = y_h(t) + y_s(t) = C_1 \cdot e^t \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \cdot e^t \sin(\sqrt{2}t) + \frac{20}{9} + \frac{10}{3}t + \frac{1}{2}e^t$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Erfolgreich Starten ins Ingenieurstudium  
Grundlagen der Mathematik anwendungsorientiert  
erklärt

Ritter, S.; Voß, U.

2015, VIII, 299 S. 130 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-54940-3