**Bild 6.18** Mechanisches Gesamtnetzwerk des Lautsprechers.

zu b) Für die Geschwindigkeits-Übertragungsfunktion  $\underline{B}_{u,v}$  folgt aus Bild 6.18

$$\underline{B}_{u,v} = \frac{v}{u} = \frac{v}{v_0} \cdot \frac{v_0}{u} = \frac{v}{v_0} \cdot \frac{1}{B_0 l}. \quad (6.3)$$

Die parallelgeschalteten Bauelemente werden zur Admittanz  $\underline{h}_{\text{ers}}$

$$\underline{h}_{\text{ers}} = \frac{1}{j\omega(m_W + m_a) + \frac{1}{j\omega n_W} + r_W + \frac{1}{h_a}}$$

zusammengefasst. Die Induktivität ist vernachlässigbar klein. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_0} &= \frac{\underline{h}_{\text{ers}}}{\underline{h}_{\text{ers}} + h_{\text{el}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{h}_{\text{ers}} \cdot r_{\text{el}}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_W}{(Bl)^2} \cdot \left( j\omega(m_W + m_a) + \frac{1}{j\omega n_W} + r_W + \frac{1}{h_a} \right)} \\ &= \frac{(Bl)^2}{R_W} \cdot \frac{j\omega n_W}{j\omega n_W \cdot \frac{(Bl)^2}{R_W} - \omega^2 n_W(m_W + m_a) + 1 + j\omega n_W \left( r_W + \frac{1}{h_a} \right)}. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Kenngrößen  $\omega_0$  und  $Q$  vereinfacht sich die Beziehung in

$$\frac{v}{v_0} = \frac{(Bl)^2}{R_W} \cdot \frac{j\omega n_W}{1 - \underbrace{\omega^2 n_W(m_W + m_a)}_{1/\omega_0^2} + j\omega n_W \underbrace{\left( \frac{(Bl)^2}{R_W} + r_W + \frac{1}{h_a} \right)}_{1/\omega_0 Q}}.$$

Setzt man nun diese Beziehung in Gln. (6.3) ein, so erhält man einen überschaubaren Ausdruck für die gesuchte Übertragungsfunktion:

$$\underline{B}_{u,v} = \frac{v}{u} = \frac{Bl}{R_W} \cdot \frac{j \omega n_W}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}$$

mit den Kenngrößen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{n_W (m_W + m_a)}} \rightarrow f_0 = 20,29 \text{ Hz} \quad (6.4)$$

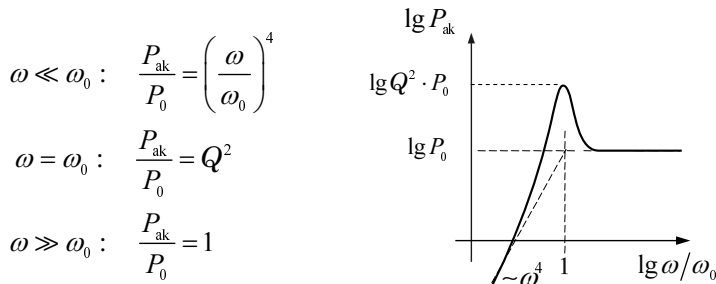
$$r_W = \frac{2\pi f_W \cdot m_W}{Q_W} = 2,875 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$$

$$Q(\omega_0) = \frac{1}{2\pi f_0 \cdot n_W \left( \frac{(Bl)^2}{R_W} + r_W + \frac{1}{h_a} \right)} = 0,223. \quad (6.5)$$

zu c) Die abgestrahlte Schallleistung  $P_{\text{ak}}$  ist die Leistung, die im Realteil der akustischen Impedanz mit  $P_{\text{ak}} = Z_{\text{a,L}} \cdot \tilde{q}^2$  bzw. in  $r_a$  mit  $P_{\text{ak}} = r_a \cdot \tilde{v}^2$  umgewandelt wird. Somit ist:

$$\begin{aligned} P_{\text{ak}} &= \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{u}^2} \cdot \tilde{u}^2 \cdot r_a = |\underline{G}|^2 \cdot \tilde{u}^2 \cdot A^2 \cdot Z_{\text{a,L}} \\ &= \left( \frac{Bl}{R_W} \right)^2 \cdot \frac{(\omega n_W)^2}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \right)^2} \cdot \tilde{u}^2 \cdot A^2 \cdot Z_{\text{a,L}} \\ P_{\text{ak}} &= \underbrace{\left( \frac{Bl \cdot n_W \cdot a^2 \cdot \omega_0^2}{R_W} \right)^2}_{P_0 = 2,1 \text{ mW} (\tilde{u} = 1 \text{ V})} \cdot \frac{\pi \rho_0}{2 c_0} \cdot \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \right)^2} \end{aligned}$$

Bei  $f = 500 \text{ Hz}$  ist  $P_{\text{ak}} = 2,03 \text{ mW}$ . Bild 6.19 zeigt den Verlauf der Leistung. Der Verlauf wird dabei in den drei Frequenzbereichen abgeschätzt.



**Bild 6.19** Verlauf der abgestrahlten Schallleistung des Lautsprechers.

zu d) In der akustischen Ebene behindert das Volumen der Box den Schallfluss mit  $N_a = V_0 / (\kappa \cdot p_o) = 3,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^5/\text{N}$ , wie in Bild 6.20 gezeigt. Die Transformation der akustischen Nachgiebigkeit  $N_{a,V}$  in die mechanische Ebene verkleinert die Gesamtnachgiebigkeit des Aufbaus auf:

$$n = n_W \parallel n_a = n_W \parallel \frac{N_{a,L}}{A^2} = 1,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{N}}.$$

Durch die Verringerung der wirkenden Nachgiebigkeit von  $n_W$  auf  $n$  erhöht sich mit Gln. (6.4) die Resonanzfrequenz auf  $f_0^* = 55,8 \text{ Hz}$ . Die Güte nimmt nach Gln. (6.5) durch die Verringerung der Nachgiebigkeit geringfügig auf  $Q_0^* = 0,61$  zu.

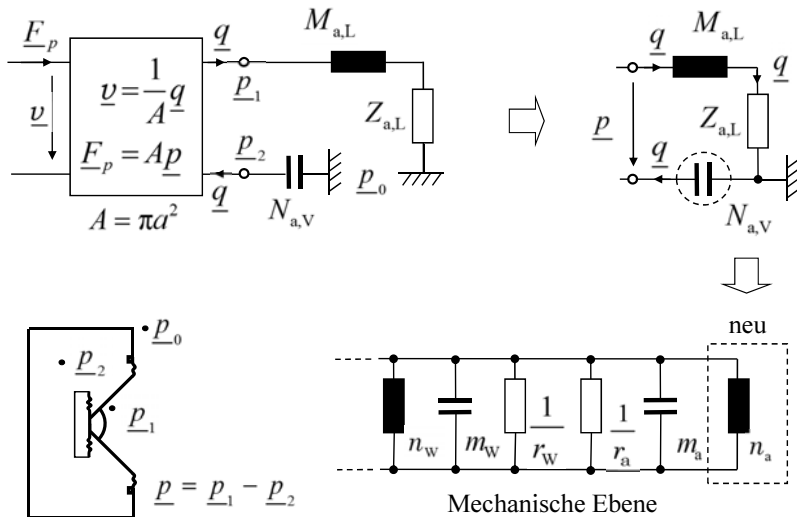


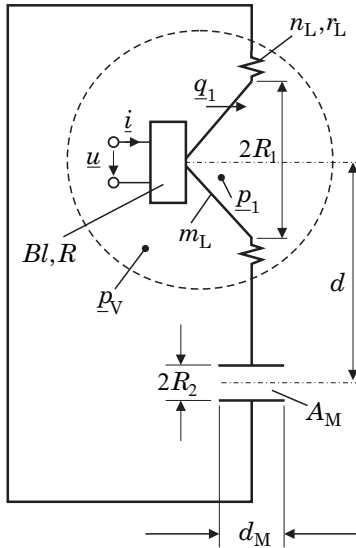
Bild 6.20 Netzwerk des Lautsprechers im geschlossenen Gehäuse.

## Aufgabe 6.5 Übertragungsverhalten einer Bassreflexbox

Der Einbau eines Lautsprechers in eine Schallwand oder eine Kompaktbox ist notwendig, um einen akustischen Kurzschluss zu verhindern. Als akustischen Kurzschluss bezeichnet man eine Luftströmung unmittelbar um den Lautsprecherrand herum, die Druckunterschiede vor und hinter der Box ausgleicht. Der Schall kann dadurch bei tiefen Frequenzen nicht abgestrahlt werden.

Im Vergleich zu einer unendlich ausgedehnten Schallwand muss die Luft in einer Box durch die Membran mit komprimiert werden. Dadurch wirkt die Box als akustische Nachgiebigkeit, die die Abstrahlung tiefer Frequenzen deutlich verringert, wie in Aufgabe 6.4 analysiert. Diese Wirkung der Box kann durch den Einbau

eines HELMHOLTZ-Resonators teilweise ausgeglichen werden (siehe Aufgabe 3.5). Zu diesem Zweck erhält die Box eine Öffnung, die in ein Rohr mündet [3]. Bild 6.21 zeigt die Prinzipdarstellung einer solchen Bassreflexbox.



**Bild 6.21** Prinzipdarstellung einer Bassreflexbox mit elektrodynamischen Lautsprecher und Druckausgleichsöffnung.

Lautsprecher  $m_L = 12,4 \text{ g}$   
 $f_0 = 54 \text{ Hz}$   
 $R_1 = 10 \text{ cm}$   
 $Q = 0,5$

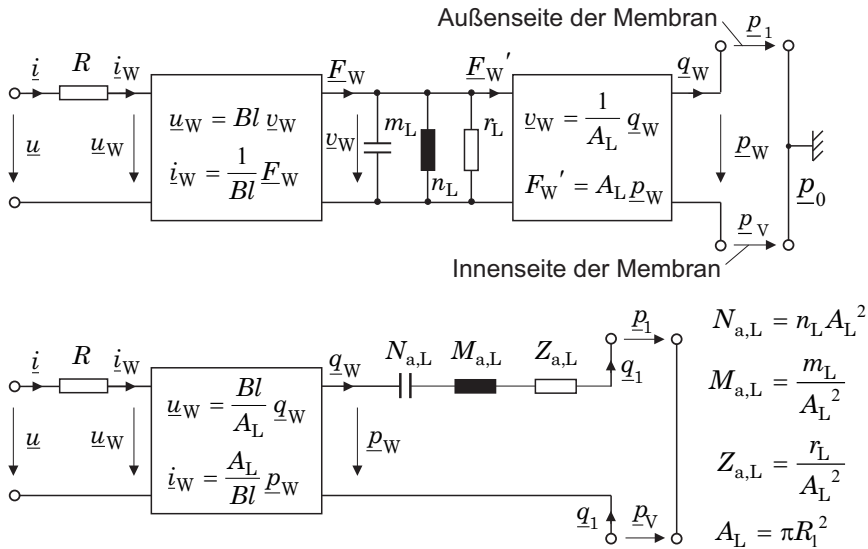
Box:  $V = 160 \text{ l}$   
 $d_M = 2,0 \text{ cm}$  oder  $4,0 \text{ cm}$   
 $R_2 = 3,4 \text{ cm}$   
 $d = 25 \text{ cm}$   
 $(f_V = 32,6 \text{ Hz})$   
 $N_a = \frac{V}{\rho c^2}$   
 $M_a = \rho \left( d_M + \frac{\pi}{2} R_2 \right) \frac{1}{A_M}$   
 $A_M = \pi R_2^2$

### Teilaufgaben:

- Geben Sie eine elektroakustische Schaltung für den Lautsprecher an. Transformieren Sie dazu die mechanischen Elemente auf die akustische Seite und fassen Sie den elektromechanischen und den mechanoakustischen Wandler zusammen.
- Vervollständigen Sie das akustische System, indem die akustische Nachgiebigkeit des Boxvolumens und die akustische Masse des Rohres mit einbezogen werden. Beschreiben Sie das Schallfeld zwischen der Membran und der Öffnung des Rohres mit dem T-Modell aus Aufgabe 3.13.
- Transformieren Sie die elektrischen Elemente in die akustische Ebene und zeichnen Sie das rein akustische Netzwerk des Bassreflex-Lautsprechers.
- Simulieren Sie den Frequenzgang der abgestrahlten akustischen Leistung des Lautsprechers mit den angegebenen Daten mit SPICE unter verschiedenen Einbaubedingungen:
  - Bassreflexbox  $d_M = 2 \text{ cm}$ ,  $V = 160 \text{ l}$ ,
  - Bassreflexbox,  $d_M = 4 \text{ cm}$ ,  $V = 160 \text{ l}$ ,
  - unendliche Schallwand,  $Q = 0,5$ ,
  - geschlossenes Gehäuse,  $V = 160 \text{ l}$ ,  $Q = 0,5$ .

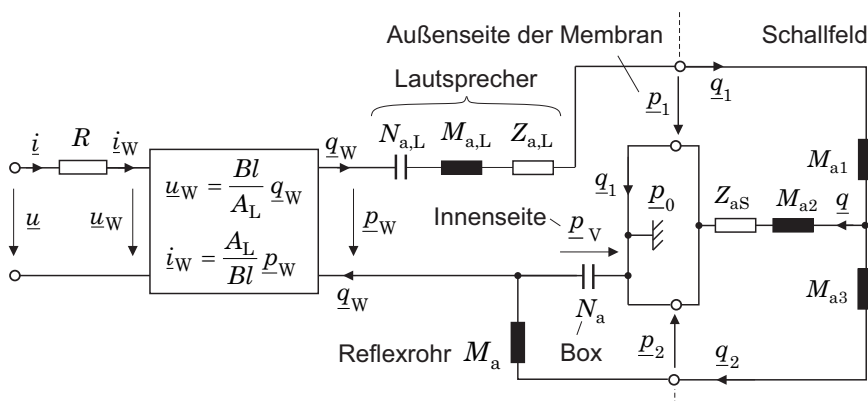
## Lösung

zu a) Die Schaltung des Lautsprechers ist in Bild 6.22 dargestellt.



**Bild 6.22** Schaltungsdarstellung des elektrodynamischen Lautsprechers und Transformation der mechanischen Bauelemente auf die akustische Seite.

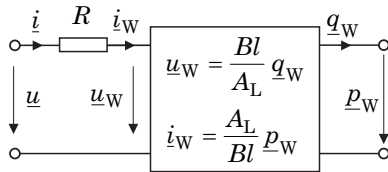
zu b) In Bild 6.23 wird die Schaltung des Lautsprechers aus Bild 6.22 durch die Berücksichtigung der akustischen Bauelemente der Box und das angekoppelte Schallfeld (siehe Aufgabe 6.4) erweitert.



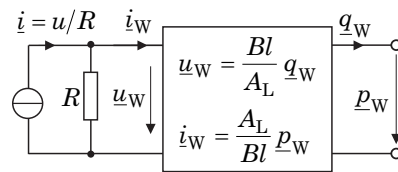
**Bild 6.23** Berücksichtigung der akustischen Bauelemente der Bassreflexbox und des Schallfeldes in der Lautsprecherschaltung.

zu c) Zur Darstellung des vollständigen akustischen Netzwerkes des Bassreflexbox-Lautsprechers wird im ersten Schritt in Bild 6.24 das elektrische Netzwerk auf die akustische Seite transformiert. Hierzu wird zur Vereinfachung der Transformation die elektrische Spannungsquelle durch eine Stromquelle ersetzt.

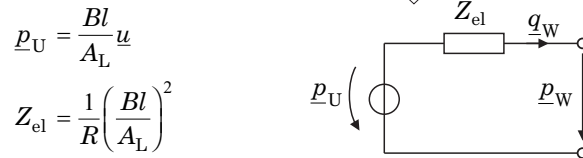
Elektroakustischer Wandler:



mit Stromquelle:

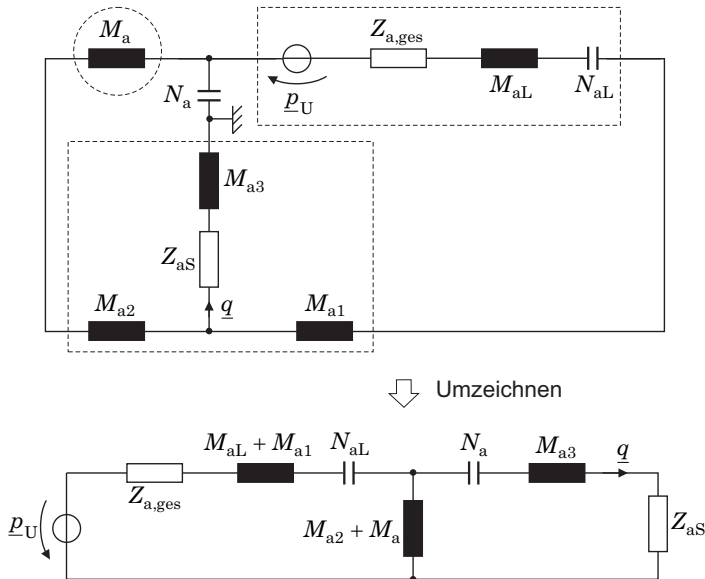


Transformation:



**Bild 6.24** Transformation der elektrischen Seite des Lautsprechers auf die akustische Seite.

Im zweiten Schritt werden die akustischen Bauelemente aus Bild 6.23 eingefügt. Die elektrisch bedingte Reibung und die Luftreibung werden zu  $Z_{a,ges}$  zusammengefasst. Damit ergibt sich die Schaltung nach Bild 6.25 und durch geschicktes Umzeichnen schließlich die überschaubare Darstellung des akustischen Netzwerkes des Bassreflexbox-Lautsprechers.



**Bild 6.25** Akustische Gesamtschaltung des Bassreflexbox-Lautsprechers.

zu d) Die transformierten Lautsprecherparameter  $N_{a,L} = 6,91 \cdot 10^{-7} \text{ m}^5 \text{ N}^{-1}$ ,  $M_{a,L} = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4}$  und  $Z_{a,L} = 8,52 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}$  erhalten wir mit den Gleichungen in Bild 6.22. Mit den Gleichungen in Bild 6.21 ist  $M_a = 6,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4}$  für  $d_M = 2 \text{ cm}$  und  $M_a = 13,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-4}$  für  $d_M = 4 \text{ cm}$ .  $N_a$  beträgt  $1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^5 \text{ N}^{-1}$ .

In Aufgabe 3.13 sind die Gleichungen für die T-Ersatzschaltung des Schallfeldes zwischen Membran-Öffnung und Reflexrohr-Öffnung angegeben:

$$M_{a1} = \rho \frac{8}{3\pi^2} \frac{1}{R_1} \left( 1 - \frac{3\pi R_1}{16 d} \right) = 2,48 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

$$M_{a2} = \rho \frac{8}{3\pi^2} \frac{1}{R_2} \left( 1 - \frac{3\pi R_2}{16 d} \right) = 8,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

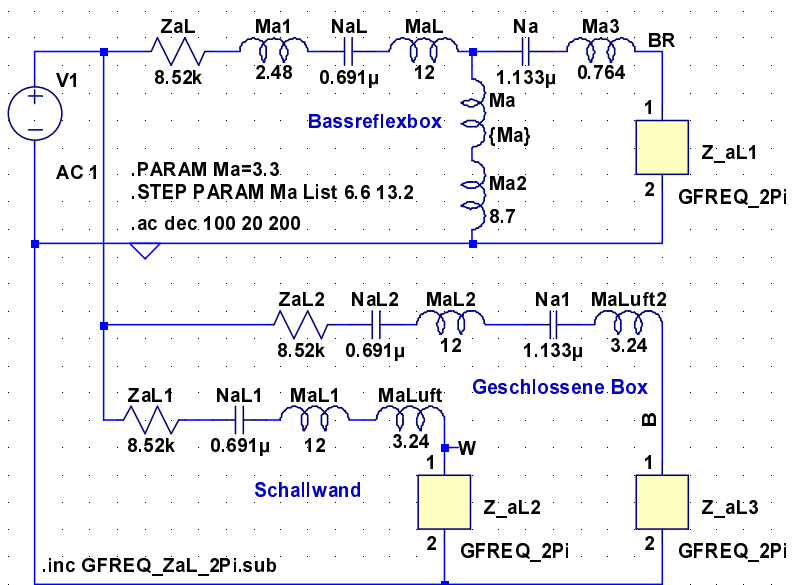
$$M_{a3} = \frac{\rho}{2\pi d} = 0,764 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}.$$

Die Impedanz der Luft vor der geschlossenen Box und der Schallwand

$$Z_{a,\text{Luft}} = Z_{a,\text{Luft}} + j\omega M_{a,\text{Luft}}$$

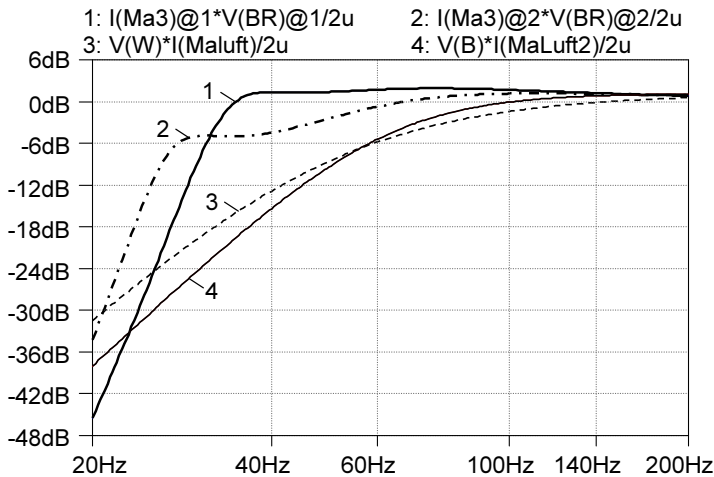
$$Z_{a,\text{Luft}} = \frac{\rho_L}{c_L} \cdot 2\pi \cdot f^2, \quad M_{a,\text{Luft}} = \frac{8}{3} \frac{\rho_L}{\pi a^2} = 3,24 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

wird wie in Aufgabe 3.12 jedoch mit dem Unterschied einer höheren Auflösung zwischen 1 Hz und 200 Hz berechnet. Tabellarisch ist  $Z_{a,\text{Luft}}$  im Element GFREQ\_2Pi gespeichert. Wie in Bild 6.26 gezeigt, können die Varianten (1) bis (4) in drei Modellen in SPICE gemeinsam modelliert und von einer idealen Druckquelle ge-



**Bild 6.26** SPICE-Simulationsmodelle für die verschiedenen Einbaubedingungen.

meinsam angeregt werden. Die Simulation ergibt die Frequenzgänge der abgestrahlten akustischen Leistung des Lautsprechers unter den verschiedenen Einbaubedingungen. Die Frequenzgänge wurden auf die Leistung bei 200Hz normiert (/2u). Variante (1) bringt den gewünschten Verlauf, der die untere Grenzfrequenz des Systems verringert und sonst möglichst konstant ist.



**Bild 6.27** Amplitudenfrequenzgänge der abgestrahlten akustischen Leistung des Bassreflexbox-Lautsprechers für unterschiedliche Einbaubedingungen.

## 6.2 Piezomagnetische Wandler

### 6.2.1 Grundbeziehungen zur Berechnung piezomagnetischer Wandler

Als Wandlungseffekt wird beim piezomagnetischen Wandler der *magnetostriktive* Effekt genutzt: Einige ferromagnetische Stoffe (Metalle und Keramiken) weisen eine ausgeprägte quadratische Verknüpfung zwischen den mechanischen und magnetischen Feldgrößen

$$S \sim H^2 \quad \text{für} \quad T = 0$$

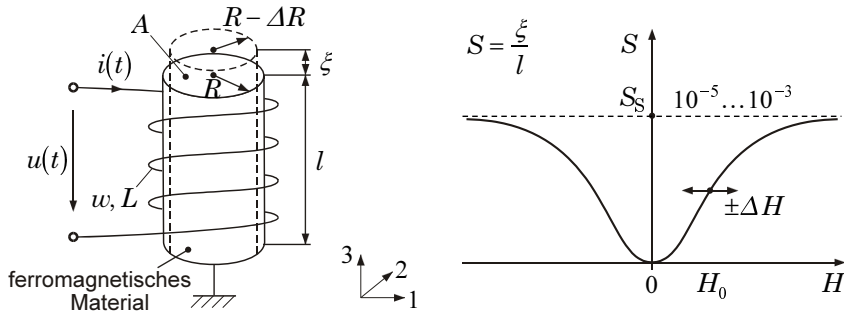
und

$$B^2 \sim T \quad \text{für} \quad H = 0$$

auf.

In Bild 6.28 ist qualitativ der Verlauf der Formänderung dieser Werkstoffe als Dehnungsmagnetostriktion  $S$  in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke  $H$  angegeben. Für hohe magnetische Feldstärken tritt Sättigung auf, die als *Sättigungsmagnetostriktion*  $S_S$  bezeichnet wird.

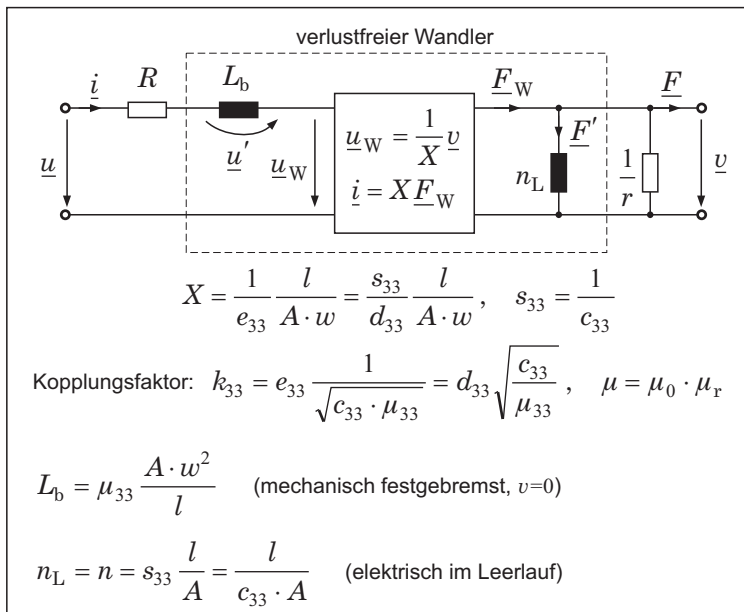




**Bild 6.28** Magnetostraktion bei ferromagnetischen Werkstoffen.

Beim *piezomagnetischen Wandler* erfolgt eine Arbeitspunkteinstellung auf der Kennlinie in Bild 6.28 entweder durch einen magnetischen Gleichfluss  $\Phi_0$ , einen Gleichruhestrom  $I_0$  oder eine mechanischen Vorspannung  $T_0$ . Die Aussteuerung des Wandlers erfolgt dann um den Arbeitspunkt näherungsweise linear.

Das Schaltbild des piezomagnetischen Wandlers wird im Lehrbuch [1], Abschnitt 8.3, abgeleitet. Es ist in Bild 6.29 angegeben. Im Lehrbuch findet man auch für ausgewählte Werkstoffe deren magnetische Konstanten (Tabellen 8.9 und 8.10) und deren piezomagnetische Konstante  $d_{33}$ .



**Bild 6.29** Schaltungsdarstellung des piezomagnetischen Wandlers.

## 6.2.2 Anwendungsbeispiele zum piezomagnetischen Wandler

Zur Vorbereitung der Aufgaben zum piezomagnetischen Wandler werden zunächst drei Aufgaben zur elektromagnetischen Wandlung in Zylinder- und Flachspulen behandelt.

### Aufgabe 6.6 Zylinderspule

Auf einem Ferritkern mit der relativen Permeabilität von  $\mu_r = 5000$  und einem Durchmesser von 3 mm ist auf einer Länge von 10 mm eine Spule mit  $N = 200$  Windungen angeordnet.

**Aufgabe:** Gesucht sind die Netzwerkdarstellungen der Zylinderspule entweder mit der magnetischen Reluktanz des Ferritkerns oder mit der Induktivität.

**Hinweis** Eine lange und dünne ( $r \ll l$ ) Zylinderspule — Solenoid — mit dem Radius  $r$  und der Länge  $l$  ist ein idealer elektromechanischer Wandler, der die magnetische Feldstärke  $\underline{H} = N/l \cdot \underline{i}$  nahezu homogen und vollständig im Innern konzentriert, während sie außerhalb verschwindet. Ein magnetischer Wechselfluss  $\underline{\Phi} = A \cdot \underline{B}$  induziert die elektrische Spannung  $\underline{u} = j\omega \cdot A \cdot N \cdot \underline{B}$ . Der Übergang zur magnetischen Spannung  $\underline{V}_m = l \cdot \underline{H}$  und magnetischen Flussrate  $\underline{I}_m = d\Phi/dt$  führt zum elektromagnetischen Wandlermodell des Solenoids mit der Windungszahl  $N$  als Wandlerfaktor. Die Windungszahl verknüpft die magnetischen und elektrischen Koordinaten gyratorisch, d.h. die Flussgrößen werden zu Differenzgrößen und umgekehrt.

### Lösung

Die Materialbeziehung des Kerns  $B = \mu \cdot H$  wird in magnetischen Koordinaten zu

$$\underline{I}_m = j\omega \frac{\mu \cdot A}{l} \underline{V}_m = \frac{j\omega}{R_m} \underline{V}_m.$$

Durch die Analogie zur elektrischen Kapazität wird für die Reluktanz das Kapazitätssymbol verwendet und es ergibt sich Schaltung 6.30 b). Die magnetische Reluktanz des Ferritkerns beträgt mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ :

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{10 \text{ mm}}{\mu_0 \cdot 5000 \cdot \pi (1,5 \text{ mm})^2} = 2.252 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Wb}}.$$

Eine Transformation der magnetischen Reluktanz auf die elektrische Seite über das Quadrat des Wandlerfaktors ergibt die Induktivität

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{\mu \cdot A}{l} \cdot N^2 = 178 \text{ mH}.$$

Sie ist in Reihe zum Wandler geschaltet, wie in Bild 6.30 a) dargestellt.

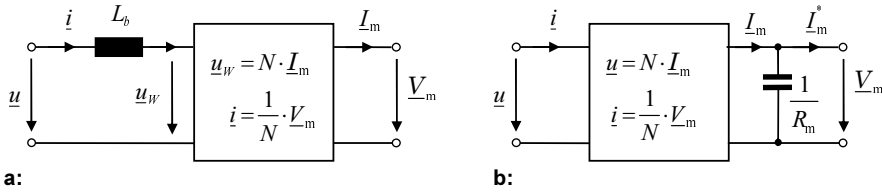


Bild 6.30 Netzwerkvarianten des elektromagnetischen Wandlers.

## Aufgabe 6.7 Flachspule auf dicker magnetischer Schicht

Eine runde Flachspule mit 10 Windungen,  $r_i = 1 \text{ mm}$  und  $r_a = 4 \text{ mm}$  befindet sich auf einer dicken magnetischen Schicht mit einer relativen Permeabilität  $\mu_r = 200$ , wie in Bild 6.31 im Querschnitt dargestellt.

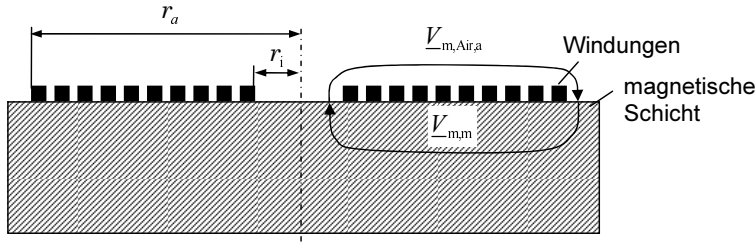


Bild 6.31 Flachspule auf einer dicken magnetischen Schicht.

Die Induktivität einer Planarspule  $L$  auf einem unendlich dicken magnetischen Substrat mit der relativen Permeabilität  $\mu_r$  ohne Luftspalt hat maximal den zweifachen Wert der Induktivität der Planarspule ohne Substrat bzw. Luftspalte  $L_0$ :

$$L = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} L_0, \quad L_0 = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{4 \cdot \pi} \cdot d \cdot g\left(\frac{h}{d}\right), \quad (6.6)$$

$$g\left(\frac{h}{d}\right) = \exp\left[3,2 - 2,3 \cdot \frac{h}{d} + 1,1 \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^2\right].$$

Dabei ist  $h$  die Wicklungsbreite, die sich aus der Windungszahl  $N$ , der Leitbahnbreite  $b$  und dem Leitbahnabstand  $d_w$ , und dem mittleren Wicklungsdurchmesser  $d$  in Bild 6.32 ergibt.

Aufgabe: Gesucht ist das Netzwerkmodell mit den Induktivitäten der in die elektrische Ebene transformierten magnetischen Reluktanzen.

## Lösung

Aus dem Durchflutungsgesetz folgt Gl. (6.7). Die MMK  $= I \cdot N$  wird an der Materialgrenze zwischen Luft und magnetischer Schicht geteilt.

$$\oint H \cdot ds = \int_{\text{Luft}} H \cdot ds + \int_{\text{Schicht}} H \cdot ds = V_{m,\text{Air}} + V_{m,m} = \sum_N I = N \cdot I. \quad (6.7)$$

Aufgaben und Lösungen zur Schaltungsdarstellung und  
Simulation elektromechanischer Systeme

In Mikrotechnik und Mechatronik

Marschner, U.; Werthschützky, R.

2015, XVI, 424 S. 450 Abb. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-55168-0