
Einleitung

Gert Kadunz

Der vorliegende Band setzt die Reihe der Publikationen des GDM Arbeitskreises Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik in konsequenter Weise fort. Diese Reihe begann mit einem Themenheft des Journals für Didaktik der Mathematik im Jahr 2006 (JMD, Band 27 Heft 3/4) und setzte sich 2010 mit einer Aufsatzsammlung „Sprache und Zeichen“ (Kadunz 2010) fort. Die nun vorliegenden „Semiotischen Perspektiven“ nehmen den vierjährigen Erscheinungsrhythmus auf und zeigen vielfältige Verwendungsweisen zeichentheoretischer und linguistischer Ansätze in der Mathematikdidaktik.

Die Bedeutung der Semiotik als in der mathematikdidaktischen Forschung anerkannte theoretische Position zeigt die Anzahl einschlägiger Publikationen. Gleichzeitig wird im Rahmen internationaler mathematikdidaktischer Tagungen Semiotik nicht nur präsentiert, sondern zentrale Teile von Konferenzen organisieren Teile ihres Programmes entlang semiotischer Fragestellungen. Neben anderen Konferenzen sei auf die PME Tagungen verwiesen, wo seit etwa 10 Jahren spezielle Diskussionsgruppen zur Semiotik eingerichtet werden. Als ein zweites Beispiel sind die ICME Tagungen zu nennen. Dort wird im Rahmen der nächsten Tagung in Hamburg 2016 der Semiotik eine eigene topic study group gewidmet sein. Eine ähnliche Entwicklung zeigen die Anzahlen der Publikationen in internationalen Journalen zur Didaktik der Mathematik. Stellvertretend nenne ich die Educational Studies in Mathematics, wo in vergangenem Dezennium rund 100 Arbeiten zu semiotischen Fragen publiziert wurden.

Eine Konsequenz dieser Anzahl von Texten ist die zunehmend divergierende Verwendung des Wortes Semiotik. Denken wir an das „semiotische Bündel“, welches Ferdinando Arzarello (z. B. Arzarello 2006) in die didaktische Diskussion eingebracht hat und in einer Vielzahl von anderen Arbeiten zur Beschreibung des Lernens von Mathematik verwendet

a.o. Prof. Dr. Gert Kadunz ✉

Universität Klagenfurt, Institut für Mathematik, Universitätsstraße 65–67,

9020 Klagenfurt, Österreich

e-mail: gert.kadunz@uni-klu.ac.at

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*,

Springer-Lehrbuch Masterclass, DOI 10.1007/978-3-642-55177-2_1

wird. Denken wir an die Ausführungen von Louis Radford (z. B. Radford 2013), in denen zeichentheoretische Überlegungen mit unterschiedlichen erkenntnistheoretischen Positionen kombiniert werden. Zuletzt sei – wieder beispielhaft für andere Autoren – Adalira Sáenz-Ludlow (z. B. Sáenz-Ludlow und Presmeg 2006) genannt, die mit beispielhafter Konzentration die Semiotik des Charles S. Peirce als Werkzeug ihrer Analyse verwendet.

Wie können nun die Texte des vorliegenden Bandes eingeordnet werden? Einerseits zeigt sich Vielfalt. Allerdings bezieht sich diese Diversität weniger auf die gewählten theoretischen Zugänge als vielmehr auf die Präsentation unterschiedlicher und gleichzeitig didaktisch relevanter Fragestellungen. Die verwendeten semiotischen Ansätze konzentrieren sich auf Charles S. Peirce, dessen Überlegungen zum Diagrammgebrauch nach wie vor eine erfolgreiche Orientierung zur Beschreibung mathematikdidaktischer Fragestellungen bieten. Beispielhaft sei auf diese Verwendung in den Beiträgen von Rosch und Kadunz verwiesen. Gleichzeitig befördert die Bearbeitung erkenntnistheoretischer und historischer Fragestellungen – jeweils mit Bezug zum Lernen von Mathematik – eine Erweiterung des theoretischen Rahmens. Hier seien die Texte von Dörfler und Kvasz genannt. So erzielt Dörfler aus der Rezeption von Ludwig Wittgensteins Gedanken zur Mathematik einen didaktischen Mehrwert. Kvasz eröffnet der Mathematikdidaktik in einer sehr speziellen und gleichzeitig nachvollziehbaren Weise das Feld der Geschichte. Werfen wir einen ersten Blick auf die Texte, um danach die Autoren selbst zu Wort kommen zu lassen.

Theoriebildung: *Martin Brunner, Willi Dörfler und Ladislav Kvasz*

In „Diagrammatische Realität und Regelgebrauch“ ermöglicht Martin Brunner den Lesenden einen Blick auf das wechselvolle Verhältnis von Regelgebrauch und Regelakzeptanz beim Lernen von Mathematik. Dieses Verhältnis ist durch die Bestimmtheit der Mathematik in den Diagrammen und durch die regelhafte Transformation solcher Diagramme mitgeprägt. Akzeptieren Lernende die jeweiligen mathematischen Transformationsregeln, so kann in ihnen der Eindruck einer unausweichlichen diagrammatischen Realität entstehen, so als ob die Diagramme der Mathematik die Lernenden zu einer bestimmten Verwendungsweise drängen, um erfolgreich Mathematik zu betreiben. Diese Zusammenschau von Verwendungsweisen und visuell Wahrnehmbarem bettet Brunner in einen theoretischen Kontext ein, der durch das Sprachspiel Wittgensteins und die Peircesche Semiotik gekennzeichnet ist.

Im Beitrag „Abstrakte Objekte in der Mathematik“ bietet Willi Dörfler einen kritischen Blick auf die gerne verwendete Sprechweise, dass die Objekte der Mathematik abstrakt und nicht zeichengebunden seien. Eine solche Rede über Mathematik kann einerseits pragmatisch begründet werden, zumal sie sich im mathematischen Alltag bewährt. Andererseits finden sich keine Gründe im mathematischen Handeln, welche letztlich die Notwendigkeit dieser Abstraktheit sichern. Alleine die Praxis des Sprechens über Mathematik kann die Rede von den abstrakten mathematischen Objekten motivieren. Eine oft anklingende Metaphysik wird nicht benötigt. In der Tradition der Sprachspiele des

Philosophen Ludwig Wittgenstein bietet der Verfasser drei Positionen an, von denen aus mathematische Objekte ohne metaphysische Mystifizierung gesehen werden können.

Mit dem Text „Über die Konstitution der symbolischen Sprache der Mathematik“ eröffnet Ladislav Kvasz vor einem historischen Hintergrund die Zusammenschau von kognitiven, linguistischen und didaktischen Überlegungen. Wie können Zeichensysteme als „symbolische Werkzeuge“ für das Lernen von Mathematik genutzt werden, um das Denken zu organisieren? Kvasz bietet zur Beantwortung zuerst eine historisch-linguistische Analyse der Entwicklung solcher Werkzeuge an und erläutert die dabei aufgetretenen sprachlichen Neuerungen. Diese Neuerungen, die jeweils Ausdrucks des Überwindens spezieller Problemstellungen in der Geschichte der Mathematik darstellen, können auch als Mittel zur Beschreibung von Fragestellungen beim Lernen von Mathematik verwendet werden.

Praktische Semiotik: *Gert Kadunz, Eva Müller-Hill, Jens Rosch, Fritz Schweiger*

Die elementare Euklidische Geometrie wird seit der Antike als ein Mittel zum Lernen des mathematischen Argumentierens verwendet. Die Ausführungen in „Zum Verhältnis von geometrischen Zeichen und Argumentation“, welche Gert Kadunz vorlegt, gehen der Frage nach, wie sich diese spezielle Verwendungsweise entwickelt haben könnte. Zur Beantwortung dieser Frage werden nach einer historischen Einleitung drei Merkmale geometrischer Zeichen vorgestellt. Hier ist zuerst jenes Verhältnis zu nennen, das die Herstellungshandlung, die Konstruktion, geometrischer Zeichen und die mit diesen Zeichen intendierten geometrischen Beziehungen bestimmt. Als zweites Merkmal wird die Bedeutung von Algorithmen in der Geometrie diskutiert. Algorithmen, wie wir sie etwa aus der elementaren Algebra kennen, finden sich kaum in der Geometrie. Die Überlegungen zeigen, dass dies die explizite Verwendung geometrischer Sätze in geometrischen Fragestellungen zur Folge hat. Als dritter Punkt wird die Besonderheit geometrischer Konstruktionen vorgestellt, die ihre eigenen Konstruktionsgeschichten verdecken. Deren Rekonstruktionen benötigen eine spezielle Hermeneutik. Diese drei genannten Punkte unterstützen bzw. verlangen auf jeweils unterschiedliche Weise mathematisches Argumentieren.

Das Lernen von Geometrie steht auch bei Eva Müller-Hill im Zentrum. Die Autorin eröffnet einen Ausblick auf den Übergang von einem propädeutischen Geometrieunterricht, der von bildhaften Darstellungen geprägt ist, hin zu einem Geometrieunterricht, der sich der regelhaften Verwendung von Diagrammen verpflichtet fühlt. Es ist gerade der bisweilen abrupte Wechsel der Verwendung von geometrischen Konstruktionen vom ikonischen Abbild hin zum begriffsgeleiteten Diagramm, welcher den Lernenden Schwierigkeiten bereitet. Aus einer semiotischen Beschreibung dieser Schwierigkeiten leitet Müller-Hill Möglichkeiten zu deren Überwindung an.

Jens Rosch rekonstruiert in „Eine Fallstudie zum Verstehen von Algebra im Mathematikunterricht“ die Bemühungen von Algebra Lernenden im achten Schuljahr. Dabei versuchen sie, die Beziehung zwischen binomischer Formel und quadratischer Ergän-

zung zu verstehen. Den dabei entstehenden Bedeutungsstrukturen widmet sich Rosch und folgt dabei einem speziellen sprachphilosophischen Ansatz, welcher sich in aktuellen erkenntnistheoretischen Überlegungen findet. Es ist dies das Wechselspiel zwischen formalisierbaren Sprachhandlungen, wie wir sie beim Betreiben von Mathematik finden, und der Beschreibung der Bedingungen für deren Erfolg. Mathematikdidaktisch gesprochen, wie kann erfolgreiches Lernen beschrieben werden, falls dieses Lernen von formalen – mathematischen – Strukturen mitbestimmt ist? Die methodische Grundlage findet Rosch in der Darstellung der Geschichte Strukturierungsbemühungen der Lernenden, welche als Transformation von Semiosen gedeutet werden können.

Über die Notwendigkeit von Klammern in mathematischen Texten berichtet Fritz Schweiger in „Klammern: Notwendig und unauffällig“. An einer Reihe von Beispielen zeigt Schweiger Besonderheiten der Klammerverwendung in der Mathematik auf und grenzt so den mathematischen Text von einem allgemeinen Text oder gar von der Alltagssprache ab.

Ordnung des Sichtbaren: *Hermann Kautschitsch, Barbara Ott*

Das Ungenaue und das Genaue ist Thema im Text „Zur Rolle von Zeichnungen beim Beweisen im Mathematikunterricht“, den Hermann Kautschitsch vorlegt. Der Autor konzentriert seine didaktischen Vorschläge auf Zeichnungen, die für das Lernen von Mathematik in unterschiedlicher Weise Verwendung finden. Er beschreibt sie als kognitive, logische und didaktische Hilfsmittel. Einen wesentlichen Grund für diese Vielfalt ortet Kautschitsch im „schematischen“ Gebrauch von Zeichnungen. Dazu entwirft er ungenaue Freihandzeichnungen, um diese in Beweisaufgaben als didaktisches Mittel zu prüfen. Der Autor zeigt, dass sich die Konstruktion der logischen Ordnung eines Beweises für Lernende am Sichtbaren orientieren kann.

Diesem Vorschlag der Konstruktion der Ordnung in Beweisen stellt Barbara Ott eine zweite ebenfalls semiotisch orientierte Ordnung zur Seite. In „Qualitative Analyse grafischer Darstellungen zu Textaufgaben – eine Untersuchung von Kinderzeichnungen in der Primarstufe“ untersucht sie die grafischen Darstellungen von Grundschulkindern zu Textaufgaben. Daraus entwickelt Ott ein Instrument, um solche Darstellungen sowohl bezüglich der Abbildungen mathematischer Strukturen als auch des Grades mathematischer Allgemeinheit zu ordnen.

Lesen, Sprechen, Verstehen: *Hans M. Dietz, Wolfgang Schlöglmann, Christof Schreiber*

Hans M. Dietz widmet seinen Beitrag der Beschreibung eines Werkzeuges, das Studienanfänger beim Lernen von Mathematik unterstützt. Es ist zuerst die Leseschwäche und der damit verbundene Verständnismangel, den die Studierenden selbst bei einfachen mathematischen Ausdrücken zeigen. Zur möglichen Behebung dieses Mangels präsentiert Dietz ein formales Unterrichtskonzept, welches die Studierenden vom Sprechen mathematischer Text hin zur Fähigkeit verständigen Umgangs mit Mathematik führen soll.

Die Frage nach dem erfolgreichen erklären steht auch in Wolfgang Schlöglmanns „Warum ist es für den Mathematikunterricht wichtig, Inhalte gut zu erklären?“ im Mittelpunkt. Dabei fokussiert der Autor auf Schüler der gymnasialen Oberstufe und kommt im Einklang mit Lernenden vorerst zum Schluss, dass gelingender Mathematikunterricht, der sich in entsprechenden Leistungen zeigt, wesentlich von dem Vermögen der Lehrkraft bestimmt ist, den Lernenden Mathematik gut zu erklären. Die Semiotik dient Schlöglmann als Analyseinstrument, um diese Sicht auf das Erklären zu sichern.

Im Wesentlichen der Verwendung von Sprache geschuldet ist der Beitrag von Christof Schreiber „Sprechen über Mathematik – mit digitalen Medien mündlich darstellen“. Weniger das Schreiben von Mathematik als vielmehr die sprachliche Beschreibung mathematischen Handelns werden von Schreiber vorgestellt. Insofern ermöglicht sein Text einen Blick auf das Spannungsfeld von Schriftlichkeit und Mündlichkeit welches vom Einsatz digitaler Medien mitstrukturiert ist.

Literatur

- Arzarello, F.: Semiosis as a Multimodal Process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **9**(4), 267–299 (2006)
- Kadunz, G. (Hrsg.): *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik*. Franzbecker, Hildesheim (2010)
- Radford, L.: On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics* **85**(3), 405–422 (2013)
- Sáenz-Ludlow, A., Presmeg, N.: Guest editorial semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* **61**, 1–10 (2006)

Semiotische Perspektiven auf das Lernen von
Mathematik

Kadunz, G. (Hrsg.)

2015, XII, 245 S. 44 Abb., 19 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-642-55176-5