

2 Π -Theorem

Das Π -Theorem beschreibt die Äquivalenz zwischen der ursprünglichen Fragestellung nach der Zielgröße

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.1)$$

in Abhängigkeit von den dimensionsbehafteten Einflussgrößen und der zugeordneten Darstellung

$$y = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N} \cdot G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p) \quad (2.2)$$

die als Präsentanz des Problems die dimensionsbehafteten Größen in Form eines Potenzproduktes $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N}$ mit der Dimension der Zielgröße multiplikativ mit der dimensionslosen Funktion $G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p)$ verknüpft. Dabei sind die zugehörigen Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ reelle Zahlen und die mit den dimensionsbehafteten Einflussgrößen darstellbaren Argumente $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$ die linear unabhängigen Potenzprodukte (Kennzahlen) des Problems.

Der wesentliche Sinn der Darstellung (2.2) liegt in der Reduzierung der N dimensionsbehafteten Einflussgrößen auf $p = N - r < N$ dimensionsfreie Argumente, die zugleich die Kennzahlen des zu untersuchenden Problems sind. Dabei ist r der Rang der zugehörigen Dimensionsmatrix, der mit der Anzahl der Grundgrößen des gewählten Maßsystems im Zusammenhang steht.

Die geschilderte Äquivalenz kann auch implizit

$$F(y, x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{p=N-r}) = 0 \quad (2.3)$$

formuliert werden.

Die Darstellung (2.3) ist Abbild der Grundeigenschaften und der Messbarkeit unserer Welt. Der Beweis des Π -Theorems kann allein mit Mitteln der Linearen Algebra geführt und in entsprechenden Büchern über Dimensionsanalyse [1, 2, 3, 4] nachgelesen werden, so dass wir hier auf eine Wiederholung der Beweisführung verzichten können, zumal sich für konkrete Probleme die Präsentanz eines Problems mit etwas Übung stets ohne spezielles fachliches Wissen und ohne Kenntnis der Beweistechnik direkt anschreiben lässt.

2.1 Systematische und heuristische Beschaffung der Π-Produkte

Unter der Voraussetzung der universellen Gültigkeit des Π-Theorems wird zur Einführung ein elementares Beispiel behandelt, um die hierbei im Umgang mit dem Π-Theorem gewonnenen Erfahrungen später auch bei der praktischen heuristischen Vorgehensweise ohne detaillierte Berechnungen anwenden zu können.

Es wird eine mit einem newtonschen Fluid der Dichte ρ und der dynamischen Zähigkeit η tangential angeströmte Platte (Bild 2.1) der Breite b und der Länge l betrachtet.

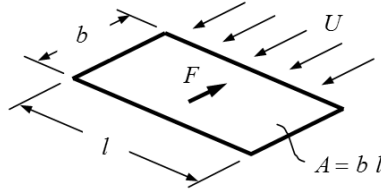


Bild 2.1 Tangential angeströmte Platte

Gesucht ist der Zusammenhang $f(y=F, x_1=U, x_2=\rho, x_3=\eta, x_4=l, x_5=b)=0$, der explizit aufgelöst nach der Zielgröße y die Frage nach der erforderlichen Haltekraft F in universeller Weise beantwortet. Dies ist der Fall, wenn wir die Präsenzanz des Problems gefunden haben.

Zum Erreichen dieses Ziels schreiben wir zur expliziten Berechnung die zugehörigen dimensionslosen Produkte

$$\Pi_i = F^{K_0} \cdot U^{K_1} \cdot \rho^{K_2} \cdot \eta^{K_3} \cdot l^{K_4} \cdot b^{K_5} \quad (2.4)$$

an, die aufgrund der Dimensionshomogenität nur Potenzprodukte von der Zielgröße $y = F$ und den Einflussgrößen $X = \{U, \rho, \eta, l, b\}$ sein können.

Aus der Dimensionsfreiheit $\dim \Pi_i = [\Pi_i] = 1$ dieser Produkte

$$[\Pi_i] = [F]^{K_0} [U]^{K_1} [\rho]^{K_2} [\eta]^{K_3} [l]^{K_4} [b]^{K_5} = 1 \quad (2.5)$$

folgt unter Beachtung der Dimensionen L, M, T für die Zielgröße F und die Einflussgrößen U, ρ, η, l, b

$$[F] = L M T^{-2}, [U] = L T^{-1}, [\rho] = L^{-3} M, [\eta] = L^{-1} M T^{-1}, [l] = L, [b] = L \quad (2.6)$$

die Gleichung

$$[\Pi_i] = L^{K_0 + K_1 - 3K_2 - K_3 + K_4 + K_5} \cdot M^{K_0 + K_2 + K_3} \cdot T^{-2K_0 - K_1 - K_3} = 1 \quad (2.7)$$

aus der sich mit dem Verschwinden der Dimensionsexponenten drei Gleichungen für die sechs Koeffizienten $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$

$$\begin{aligned} K_0 + K_1 - 3K_2 - K_3 + K_4 + K_5 &= 0 \\ K_0 + K_2 + K_3 &= 0 \\ -2K_0 - K_1 - K_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ablesen lassen. Das Gleichungssystem (2.8) zur Bestimmung der sechs Koeffizienten ist somit unterbestimmt.

Bevor wir unsere Wahl für die drei zunächst noch unbestimmten Koeffizienten treffen, schreiben wir das Gleichungssystem (2.8) in die Form

$$\begin{aligned} K_0 &= - (K_3 + K_4 + K_5) / 2 \\ K_1 &= K_4 + K_5 \\ K_2 &= - (K_3 - K_4 - K_5) / 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

um und erkennen, dass mit der Wahl der Koeffizienten K_3, K_4, K_5 auch die Koeffizienten K_0, K_1, K_2 bestimmt sind.

Die Koeffizienten K_3, K_4, K_5 werden jetzt so gewählt, dass alle linear unabhängige Potenzprodukte Π_i in Erscheinung treten können. Dieses ist der Fall, wenn die Koeffizienten K_3, K_4, K_5 selbst linear unabhängig voneinander sind. Wir wählen deshalb die linear unabhängigen Kombinationen

$$\begin{aligned} i=0 & \quad K_3=1 \quad K_4=0 \quad K_5=0 \\ i=1 & \quad K_3=0 \quad K_4=1 \quad K_5=0 \\ i=2 & \quad K_3=0 \quad K_4=0 \quad K_5=1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

deren zugehörige Matrix mit drei von Null verschiedenen Zeilen

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (2.11)$$

die lineare Unabhängigkeit bestätigt.

Setzt man die so gewählten drei Kombinationen K_3, K_4, K_5 der Reihe nach in die Bestimmungsgleichungen (2.9) ein, erhält man die restlichen Koeffizienten K_0, K_1, K_2 in der Zuordnung nach (2.12):

i	K_3	K_4	K_5	K_0	K_1	K_2
0	1	0	0	-1/2	0	-1/2
1	0	1	0	-1/2	1	1/2
2	0	0	1	-1/2	1	1/2

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{gewählt}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{errechnet}}$

(2.12)

Damit stehen drei Kombinationen für die Koeffizienten $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ bereit, die durch Einsetzen in die Gleichung für die Potenzprodukte (2.4) schließlich auf drei linear unabhängige dimensionsfreie Produkte Π_0, Π_1, Π_2 führen.

i	F K_0	U K_1	ρ K_2	η K_3	l K_4	b K_5	
0	-1/2	0	-1/2	1	0	0	$\Pi_0 = \frac{\eta}{F^{1/2} \rho^{1/2}}$
1	-1/2	1	1/2	0	1	0	$\Pi_1 = \frac{U \rho^{1/2} l}{F^{1/2}}$
2	-1/2	1	1/2	0	0	1	$\Pi_2 = \frac{U \rho^{1/2} b}{F^{1/2}}$

(2.13)

Die gefundenen Π -Produkte sind nicht die üblicherweise in der Strömungsmechanik verwendeten Kennzahlen. Ursache hierfür ist die willkürliche Wahl der Koeffizienten K_3, K_4, K_5 . Die gewählte willkürliche Zuordnung entsprechend der Elemente der Einheitsmatrix (2.11) bedeutet aber keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ein Π -Datensatz kann stets durch Potenzproduktbildung der willkürlich gefundenen Π -Produkte in übliche Kennzahlen überführt werden. Die hier gegebene Freiheit gestattet stets die Gestaltung der Π -Produkte, die ganz speziell auf die besonderen Belange eines Problems zugeschnitten sind. Auch die einfache Messbarkeit von Einflussgrößen kann für eine sinnvolle Wahl der Π -Produkte bedeutend sein.

In unserem Beispiel lassen sich die drei gefundenen Π -Produkte mit den Potenzproduktbildungen nach (2.14) in die in der Strömungsmechanik üblichen Kennzahlen umschreiben:

$$\begin{aligned}\Pi_0^* &= \Pi_1^{-1} \cdot \Pi_2^{-1} = \frac{F}{\rho U^2 b l} \\ \Pi_1^* &= \Pi_1 \cdot \Pi_0^{-1} = \frac{U b}{\eta / \rho} = \text{Re} \\ \Pi_2^* &= \Pi_1 \cdot \Pi_2^{-1} = \frac{b}{l}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Durch Anwendung des Π -Theorems ist die Reduzierung von $N = 5$ dimensionsbehafteten auf $p = 2$ dimensionsfreie Einflussgrößen Π_1^*, Π_2^* gelungen.

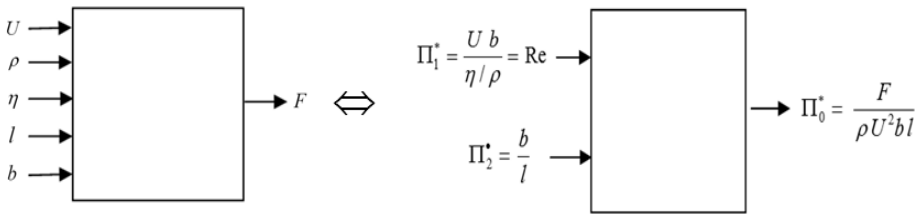


Bild 2.2 Reduzierung der Daten durch dimensionsfreie Darstellung

Mit dem so gewonnenen Ergebnis $\Pi_0^* = G(\Pi_1^*, \Pi_2^*)$ kann die Zielgröße $y = F$ als Präsenz des Problems explizit durch

$$y = F = \rho U^2 b l \cdot G(\text{Re}, b/l)\tag{2.15}$$

dargestellt werden, die sich insbesondere für schlanke Platten mit $b/l \ll 1$ auf die alleinige Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re reduziert

$$y = F = \rho U^2 b l \cdot \tilde{G}(Re) \quad (2.16)$$

die durch Reihenentwicklung um $b/l \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F &= \rho U^2 b l \cdot G(Re, b/l) = \rho U^2 b l \left[G(Re, 0) + G'(Re, 0) \frac{b}{l} + \dots \right] \\ &= \rho U^2 b l \cdot G(Re, 0) = \rho U^2 b l \cdot \tilde{G}(Re) \end{aligned} \quad (2.17)$$

gefunden wird.

Mit Hilfe des Π -Theorems und der Beschränkung auf schlanke Platten kann die gesuchte Haltekraft $F = f(U, \rho, \eta, l, b)$ allein durch die experimentelle Bestimmung einer einzigen Funktion $\tilde{G}$ in Abhängigkeit von der Reynoldszahl bestimmt werden. Es genügt eine einzige Messreihe unter Verwendung eines beliebigen newtonschen Fluids, um die in Bild 2.3 dargestellte Funktion $F / (\rho U^2 b l) = \tilde{G}(Re)$ aufzeichnen zu können.

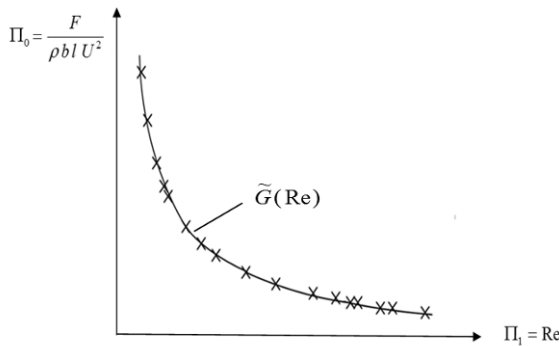


Bild 2.3 Universelle Darstellung des Haltekraftexperiments

Die Π -Produkte lassen sich auch mit weniger Aufwand heuristisch durch die unmittelbare Nutzung der Dimensionsmatrix (2.18) beschaffen, die mit Kenntnis des Datensatzes $f(y=F, x_1=U, x_2=\rho, x_3=\eta, x_4=l, x_5=b) = 0$ unmittelbar angeschrieben werden kann

		$N + 1 = 6$					
		F	U	ρ	η	l	b
$m = 3$	L	1	1	-3	-1	1	1
	M	1	0	1	1	0	0
	T	-2	-1	0	-1	0	0

(2.18)

die mit der zum Gleichungssystem (2.8) zugehörigen Matrix (2.19) identisch ist und die heuristische Vorgehensweise mit Hilfe der Dimensionsmatrix legitimiert

K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1	1	-3	-1	1	1
1	0	1	1	0	0
-2	-1	0	-1	0	0

(2.19)

deren Eigenschaften sich direkt konstruktiv zur Entdimensionierung nutzen lassen. Für die Längen steht die umströmte Länge $b = b^*$ der Platte (Bild 2.1) zur Verfügung, so dass sich für $\Pi_2 = 1$ und $\Pi_3 = l/b$ ergibt. Die Haltekraft F kann mit $F^* = \rho U^2 \cdot bl$ und die Anströmgeschwindigkeit U mit $U^* = (\eta / \rho)/b$ entdimensioniert werden. Dabei ist das Produkt ρU^2 ein Maß für den Staudruck der Strömung, das mit der Fläche der Platte bl zu multiplizieren ist. Bleibt noch der Einfluss der Zähigkeit η des Fluids, der sich nur mit dem Verhältnis η / ρ multipliziert mit der reziproken charakteristischen Länge b im Kontext mit der Dimensionsmatrix finden lässt. Da der Experimentator nach der Wahl eines Testfluids die Stoffeigenschaften Dichte ρ und dynamische Zähigkeit η nicht mehr verändern kann, sind diese beiden Größen keine direkten Einflussgrößen und treten deshalb (Bild 2.4) nur noch in den repräsentativen Größen zur Entdimensionierung in Erscheinung und sind deshalb als dem System innewohnende Eigenschaften im Inneren des Systembilds (Bild 2.4) eingezeichnet.

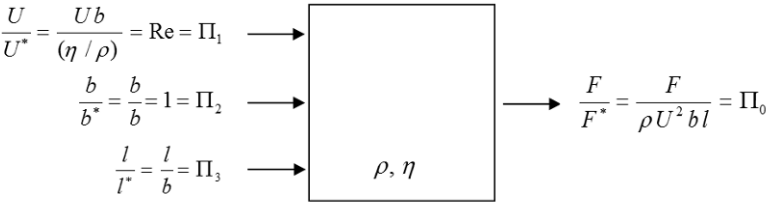


Bild 2.4 Entdimensionierung mit Hilfe der Dimensionmatrix

Das so heuristische allein im Kontext mit der Dimensionsmatrix gefundene Ergebnis

$$\Pi_0 = \frac{F}{\rho U^2 b l} = G(\Pi_1 = \text{Re}, \Pi_2 = 1, \Pi_3 = b/l) = \hat{G}(\text{Re}, b/l) \quad (2.20)$$

entspricht dem der systematischen Herleitung (2.15).

Mit der Entdimensionierung des Umströmungsproblems einer tangential angeströmten schlanken Platte ist eine Reduzierung von $N+1=6$ dimensionbehafteten Größen F, U, ρ, η, l, b (Anzahl der Spalten der Dimensionsmatrix) auf $p+1=3$ dimensionsfreie Größen Π_0, Π_1, Π_3 erreicht worden:

$$N+1=6 \quad \Leftrightarrow \quad p+1=3 \quad \rightarrow \quad r = N - p = 3$$

Diese Reduktion um $r=3$ ist gleich der Anzahl $m=3$ der Dimensionen oder Grundgrößen des gewählten Maßsystems (Anzahl der Zeilen der Dimensionsmatrix) und entspricht auch dem Rang der zugehörigen Dimensionsmatrix (2.18).

Dass der Rang der Dimensionsmatrix (2.18) tatsächlich $r=m=3$ ist, lässt sich durch Elementarumformungen auf die zugehörige Diagonal- bzw. Einheitsmatrix

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Bild 2.5 Elementarumformung auf Einheitsmatrix

zeigen. Der Rang r der Diagonalmatrix ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente. In unserem Beispiel ist also in der Tat der Rang $r=3$ der Dimensionsmatrix gleich der Anzahl der Zeilen, die wiederum der Anzahl $m=3$ der Dimensionen oder Grundgrößen des verwendeten (L, M, T) -Maßsystems entspricht. Dies ist immer der Fall, wenn die Dimensionsmatrix regulär bleibt, keine linearen Abhängigkeiten auftreten.

Insbesondere für schlanke Platten reduziert sich die Darstellung (2.20) auf

$$\Pi_0 = \frac{F}{\rho U^2 b l} = G(\Pi_1 = \text{Re}) = \tilde{G}(\text{Re}) \quad (2.21)$$

die explizit aufgelöst nach Haltekraft

$$F = \rho U^2 b l \cdot \tilde{G}(\text{Re} = U b / (\eta / \rho)) \quad (2.22)$$

zeigt, dass alle im Datensatz U, ρ, η, l, b enthaltenen Einflussgrößen zur Beschreibung der Haltekraft genutzt werden. Das Ergebnis ist in der Tat die Präsenz des Problems, der verwendete Datensatz offensichtlich vollständig. Mit der Ausnutzung der Schlankheit konnte die Reduktion von $N + 1 = 6$ auf $p + 1 = 2$ verbessert werden.

2.2 Industrielle Nutzung

Mit dem nun vorliegenden Kenntnisstand lassen sich die dimensionsfreien Π -Potenzprodukte problemlos ohne große Rechnung bestimmen, wenn nur der vollständige Datensatz vorliegt. Wir demonstrieren dies anhand des nächsten Beispiels, das charakteristisch einen Materialverschleiß (Bild 2.6) beschreibt, und zeigen zugleich die Möglichkeiten der industriellen Nutzung.



Bild 2.6 Materialverschleiß-Experiment

Beim Gleiten des mit der Kraft F auf eine harte Unterlage gepressten Stiftes mit der Druckfestigkeit σ_{DF} entsteht längs des Gleitwegs ΔL ein Verschleiß des Stiftmaterials um das Volumen ΔV .

Für die gesuchte Zielgröße ΔV kann somit unmittelbar (Bild 2.7) mit den Einflussgrößen $\Delta L, F, A, \sigma_{DF}$

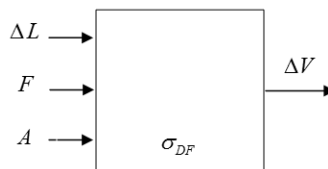


Bild 2.7 Dimensionsbehafte systemtechnische Darstellung

die Beziehung

$$\Delta V = f(\Delta L, F, A, \sigma_{DF}) \quad (2.23)$$

und die zugehörige Dimensionsmatrix zur Kennzahlenbestimmung

		$N + 1 = 5$				
		ΔV	ΔL	F	A	σ_{DF}
$m = 3$	L	3	1	1	2	-1
	M	0	0	1	0	1
	T	0	0	-2	0	-2

(2.24)

angeschrieben werden.

Als repräsentative Länge steht allein der Gleitweg $\Delta L^* = \Delta L$ zur Verfügung, der sowohl zu Entdimensionierung der Länge ΔL als auch der Fläche A genutzt werden kann. Durch die Entdimensionierung der Kraft mit $F^* = \sigma_{DF} A$ wird die Druckfestigkeit σ_{DF} des Materials ins Spiel gebracht.

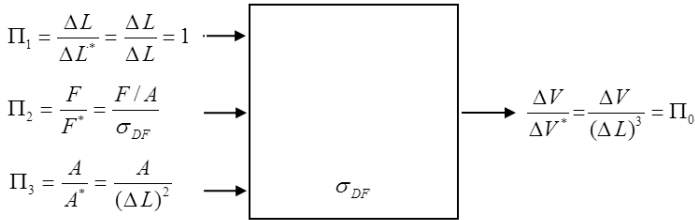


Bild 2.8 Dimensionsfreie systemtechnische Darstellung

Das allein im Kontext mit der Dimensionsmatrix gefundene Ergebnis

$$\Pi_0 = \frac{\Delta V}{(\Delta L)^3} = G(\Pi_1 = 1, \Pi_2 = \frac{F / A}{\sigma_{DF}}, \Pi_3 = \frac{A}{(\Delta L)^2}) = \tilde{G}(\frac{F / A}{\sigma_{DF}}, \frac{A}{(\Delta L)^2}) \quad (2.25)$$

Dimensionshomogenität

Erkenntnis ohne Wissen?

Unger, J.; Leyer, S.

2015, XVIII, 189 S. 126 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05411-3