

---

# Lösungen und Hinweise

---

## Übungen für Kapitel 2

**Lösung zu Übung 2-10**  $a_n = 2^{n-2}$  für  $n \geq 2$ . Induktionsanfang:  $a_2 = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$ .  
Induktionsschritt:  $a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n + a_n = 2a_n \stackrel{I.V.}{=} 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$

---

## Übungen für Kapitel 4

### Lösung zu Übung 4-3

- (1) Durch  $(a, b, c) \mapsto \{a, b, c\}$  ist eine Bijektion von  $M_1$  auf die Menge der dreielementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gegeben, da sich jede solche Teilmenge in eindeutiger Weise geordnet, d. h. als  $\{a < b < c\}$  aufschreiben lässt. Daher folgt  $\#M_1 = \binom{n}{3}$ .
- (2) Durch  $(a, b, c) \mapsto \{a, b+1, c+2\}$  ist eine Bijektion von  $M_2$  auf die Menge der dreielementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n+2\}$  gegeben (Umkehrung:  $\{\alpha < \beta < \gamma\} \mapsto (\alpha, \beta-1, \gamma-2)$ ). Daher folgt  $\#M_2 = \binom{n+2}{3}$ . Alternativ: Fallunterscheidung nach Gleichheiten: Für  $a < b < c$  gibt es nach (1)  $\binom{n}{3}$  Möglichkeiten, für  $a < b = c$  und  $a = b < c$  gibt es je  $\binom{n}{2}$  Möglichkeiten, und für  $a = b = c$  gibt es  $n$  Möglichkeiten. Also  $\#M_2 = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2} + n$ .
- (3) Zu jedem Paar  $(A, B)$  mit  $A \subset B \subset \{1, \dots, n\}$  assoziieren wir ein  $n$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in \{1, 2, 3\}$  für alle  $i$ : Setze  $a_i = 1$ , falls  $i \in A$ , setze  $a_i = 2$ , falls  $i \in B \setminus A$ , und setze  $a_i = 3$ , falls  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus B$ . Man sieht sofort, dass dies eine Bijektion  $M_3 \rightarrow \{1, 2, 3\}^n$  definiert. Also folgt  $\#M_3 = 3^n$ . Alternativ: Fallunterscheidung nach  $k = \#B$ : Es gibt  $\binom{n}{k}$  solche  $B$ , und für jedes davon gibt es  $2^k$  mögliche Mengen  $A$ . Also folgt  $\#M_3 = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ . NB: Dies ist gleich  $(2+1)^n = 3^n$  nach dem binomischen Lehrsatz.

**Lösung zu Übung 4-4** Definiere  $h : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ ,  $A \mapsto \begin{cases} A \cup \{n\} & \text{falls } n \notin A \\ A \setminus \{n\} & \text{falls } n \in A \end{cases}$ . Offenbar gilt  $h \circ h = \text{id}$ , also ist  $h$  sein eigenes Inverses, also insbesondere bijektiv. Außerdem ist offenbar  $h : \mathcal{P}_g(M) = \mathcal{P}_u(M)$ . Also ist  $h$  die gesuchte Bijektion.

**Lösung zu Übung 4-5** Die Formel für  $\sum_{m=1}^n m^2$  folgt aus  $\sum_{m=1}^n \binom{m}{2} = \binom{n+1}{3}$  und  $\sum_{m=1}^n \binom{m}{1} = \binom{n+1}{2}$ , siehe Übung 4-2. Es ist  $m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$ , also folgt  $\sum_{m=1}^n m^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$ .

**Lösung zu Übung 4-6** Multipliziert man  $(1+x)^n(1+x)^m = \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots\right)\left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots\right)$  aus und sortiert nach Potenzen von  $x$ , so ist der Koeffizient von  $x^0$  gleich 1, der Koeffizient von  $x^1$  gleich  $\binom{n}{0}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}$ , der Koeffizient von  $x^2$  gleich  $\binom{n}{0}\binom{m}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{0}$ , allgemein der Koeffizient von  $x^k$  gleich  $\sum_{l=0}^k \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}$ . Andererseits ist der Koeffizient von  $x^k$  in  $(1+x)^{n+m}$  gleich  $\binom{n+m}{k}$ , und die Formel folgt durch Koeffizientenvergleich.

Der Bijektionsbeweis: Wir zählen die  $k$ -elementigen Teilmengen  $A \subset \{1, \dots, n+m\}$  einmal direkt, das gibt die linke Seite, und einmal so, dass wir eine Fallunterscheidung nach  $l := \#(A \cap \{1, \dots, n\})$  machen. Für festes  $l$  ist  $A$  dadurch eindeutig festgelegt, dass ich  $l$  beliebige Elemente aus  $\{1, \dots, n\}$  und  $k-l$  beliebige Elemente aus  $\{n+1, \dots, n+m\}$  wähle. Nach der Produktregel gibt es dafür  $\binom{n}{l}\binom{m}{k-l}$  Möglichkeiten. Mit der Summenregel erhält man die rechte Seite für die Anzahl aller  $k$ -elementigen Teilmengen  $A$ .

## Übungen für Kapitel 5

**Lösung zu Übung 5-3** Solange die Zahl größer als 2 ist, wird sie durch die Operation ‚Wurzel ziehen und abrunden‘ verkleinert. Daher wird das Ergebnis irgendwann kleiner als 4. Ist  $a$  die erste vorkommende Zahl, die kleiner als 4 ist, dann ist  $a = \lfloor \sqrt{b} \rfloor$  mit  $b \geq 4$ , also  $a \geq 2$ , also  $a \in \{2, 3\}$ .

**Lösung zu Übung 5-5** Zunächst folgt  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit Induktion mittels Übung 2-3. Dann ist auch  $a \geq b > 0 \Rightarrow a^n \geq b^n$ . Dann folgt  $a^{1/m} > b^{1/m}$  für  $m \in \mathbb{N}$ , denn andernfalls wäre  $a^{1/m} \leq b^{1/m}$ , also mit dem ersten Teil (angewendet auf  $b^{1/m}$ ,  $a^{1/m}$  statt  $a, b$ )  $a = (a^{1/m})^m \leq (b^{1/m})^m = b$ . Schließlich folgt für  $n, m \in \mathbb{N}$ , dass  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 \Rightarrow a^{n/m} > b^{n/m}$ .

**Lösung zu Übung 5-8** Sie müssen alle gleich sein. Zum Beweis betrachte die kleinste vorkommende Zahl (Extremalprinzip!), nenne sie  $a$ . (Es gibt eine kleinste, da nur natürliche Zahlen vorkommen). Die Nachbarn dieser Zahl müssen alle gleich  $a$  sein, da das erste  $a$

der Mittelwert seiner Nachbarn ist – wäre einer größer, so müsste auch einer kleiner sein, aber  $a$  ist minimal. Mit demselben Argument sind die Nachbarn der Nachbarn auch gleich  $a$ , dann deren Nachbarn usw. Es folgt, dass alle Zahlen gleich  $a$  sind.

Bemerkung: Auch wenn man positive reelle Zahlen statt natürlicher Zahlen zulässt, müssen alle gleich sein. Das ist aber schwieriger zu zeigen.

## Übungen für Kapitel 7

### Lösung zu Übung 7-4

- (1) Für gerades  $n$ ,  $n = 2m$ , ist  $n! \geq (n+1) \cdots (2n) > m^m$ , also  $a_n > (m^m)^{1/2m} = \sqrt{m}$ . Ähnlich folgt für  $n = 2m+1$ , dass  $a_n > \sqrt{m}$ . Also folgt  $a_n \rightarrow \infty$ .
- (2)  $p(n) = \binom{n}{k}$  ist ein Polynom in  $n$  vom Grad  $k$ . Da  $\frac{n^l}{2^n} \rightarrow 0$  nach Satz 7.5.3 für jedes  $l$ , folgt durch Summieren von  $k+1$  Termen  $a_n \rightarrow 0$ .
- (3) Es ist (vgl. der Hinweis)  $b_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$  (Teleskopprodukt). Wegen  $2n-1 > 2n-2$  ist  $1 - \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n-2}$ , allgemeiner  $1 - \frac{1}{2n-k} > 1 - \frac{1}{2n-k-1}$  für  $k = 1, 3, 5, \dots, 2n-3$ . Damit folgt  $c_n > \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} a_n > a_n$ , also  $a_n^2 < a_n c_n = b_{2n} = \frac{1}{2n}$ , also  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$  und damit  $a_n \rightarrow 0$ .

### Lösung zu Übung 7-6

- (1) Wegen  $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n}{c_n}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = 0 \cdot 0 = 0$ .
- (2)  $d_n \ll e_n \ll b_n \ll a_n \ll c_n$ , denn:  $e_n \geq n^{1001}$  für  $n > 1001^2$ , also  $\frac{d_n}{e_n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Es gibt  $m_0$  mit  $4^m > 4m^3$  für  $m \geq m_0$ , also  $4^{m^2} > 4^m m^{3m} = ((2m)^2)^m m^{3m}$ , also mit  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ :  $4^n \geq 4^{m^2} > n^m m^{3m}$ , also  $\frac{e_n}{b_n} \leq \frac{1}{m^m} \rightarrow 0$ . Für  $n \geq 5$  ist  $n! \geq 4! \cdot 5^{n-4}$ , also  $\frac{b_n}{a_n} = \frac{4^n}{n!} \leq \frac{4^4}{4!} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} \rightarrow 0$ . Es ist  $n! = 1 \cdots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right) \cdots n \leq \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2} \cdot n \cdots n = \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} n^n$ , also  $\frac{a_n}{c_n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} \rightarrow 0$ .

**Lösung zu Übung 7-7** Da  $\binom{2n}{n}$  der größte Summand in  $4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$  ist, gilt  $\binom{2n}{n} \geq \frac{1}{2n+1} 4^n$ . Wie bei Übung 7-6 folgt daraus  $e_n \ll f_n$ .  $f_n \ll b_n$  gilt nach Übung 7-4.

**Lösung zu Übung 7-10** Der Ausdruck kann als  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  interpretiert werden, wobei

$a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ , ... die endlichen Abschnitte sind. Diese erfüllen die Rekursion  $a_0 = 0$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ . Um die Existenz des Grenzwerts zu zeigen und ihn zu berechnen, verfähre wie in Übung 7-9: Zeige induktiv, dass  $a_n$  monoton wächst und durch 2 nach oben beschränkt ist (Beweis:  $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$ , daraus folgt  $a_n^2 < 2a_n = a_n + a_n < 2 + a_n$ , also  $a_n < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$ ), daher existiert der Grenzwert  $a$ , und es gilt  $a = \sqrt{2 + a}$ , also  $a = 2$ . Also  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$ .

**Lösung zu Übung 7-11**

- (1) Nach der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, Satz 2.1.9, gilt  $\frac{1}{2}(a + \frac{2}{a}) \geq \sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2}$  für  $a > 0$ , also folgt  $a_n \geq \sqrt{2}$  für alle  $n \geq 1$ . Aus  $a_n^2 \geq 2$  folgt  $\frac{2}{a_n} \leq a_n$ , also  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$ . Daher ist  $(a_n)$  für  $n \geq 1$  monoton fallend und nach unten beschränkt, hat also einen Grenzwert  $a$ . Es muss  $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$  gelten, was sich zu  $a = \pm\sqrt{2}$  auflösen lässt, also  $a = \sqrt{2}$  wegen  $a > 0$ .
- (3) Nachrechnen!
- (4)  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{r}{a_n})$ .

**Lösung zu Übung 7-13**

- (1) Wahr: Sei  $|x_n| \leq C \forall n$ . Zu  $\varepsilon > 0$  sei  $n_0$  derart, dass  $|y_n| < \frac{\varepsilon}{C}$  für  $n \geq n_0$ , dann ist  $|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ .
- (2) Falsch, z. B.

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad y_n = 1 - x_n,$$

dann ist  $x_n y_n = 0 \forall n$ , aber  $(x_n), (y_n)$  sind keine Nullfolgen.

- (3) Falsch, z. B.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Aussage ist wahr, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ .

**Lösung zu Übung 7-18** (1) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ . Wir wollen  $s_n \rightarrow a$  zeigen. Da wir  $s_n - a$  mit  $a_n - a$  in Verbindung bringen wollen, schreiben wir zunächst

$$s_n - a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a = \frac{a_1 + \dots + a_n - na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)}{n},$$

also wegen der Dreiecksungleichung

$$|s_n - a| = \frac{|(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)|}{n} \leq \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_n - a|}{n}.$$

Wir wollen zeigen, dass das für große  $n$  klein wird. Von den Summanden im Zähler werden aber nur die mit den größeren Indizes klein, von den ersten, z. B.  $a_1 - a$  wissen wir nichts – außer, dass sie beschränkt sind. Da wir diese am Schluss durch  $n$  teilen, liefern diese zur Summe nur einen kleinen Beitrag. Wir müssen aber aufpassen, dass von diesen ‚unkontrollierten‘ Summanden nicht allzu viele (z. B.  $n/2$ ) da sind. Das ergibt sich, wenn man die Dinge sorgfältig aufschreibt:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wegen  $a_n \rightarrow a$  können wir  $N$  so wählen, dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (*)$$

(Wir nehmen hier  $\varepsilon/2$ , um später etwas 'Platz' für die Abschätzung zu haben.) Da die Folge  $(a_n - a)$  konvergiert, ist sie beschränkt, d. h. es gibt ein  $C \in \mathbb{R}$  mit

$$|a_n - a| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (**)$$

Für  $n > N$  gilt dann

$$\begin{aligned} |s_n - a| &\leq \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_n - a|}{n} < \frac{CN + (n - N)\varepsilon/2}{n} = \frac{CN}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{n - N}{n} \\ &\leq \frac{CN}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

wobei wir für die ersten  $N$  Summanden die Abschätzung  $(**)$  und für die letzten  $n - N$  Summanden die Abschätzung  $(*)$  verwendet haben.

Um unser Ziel  $|s_n - a| < \varepsilon$  zu erreichen, brauchen wir  $\frac{CN}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Dies ist äquivalent zu  $n \geq \frac{2CN}{\varepsilon}$ . Also:

Wähle nun eine natürliche Zahl  $N' \geq \frac{2CN}{\varepsilon}$ . Für  $n \geq N'$  gilt dann  $\frac{CN}{n} \leq \frac{CN}{N'} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $n \geq N'$  und  $n \geq N$  (d. h. für  $n \geq N'' := \max\{N, N'\}$ ) folgt also

$$|s_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit haben wir gezeigt, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N'' \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \geq N''$  gilt:  $|s_n - a| < \varepsilon$ . Das heißt  $s_n \rightarrow a$ .

(2): Sei  $a_n = (-1)^n$ . Diese Folge divergiert, aber die Folge  $(s_n)$  konvergiert gegen Null, denn offenbar ist

$$s_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

woraus  $-\frac{1}{n} \leq s_n \leq 0$  für alle  $n$  folgt und damit wegen  $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow 0$  nach dem Sandwichlemma, dass  $s_n \rightarrow 0$ .

Der Cesàro-Limes der Folge  $(-1)^n$  ist also 0.

**Lösung zu Übung 7-19** Man beobachtet, dass  $(1 + \sqrt{2})^n$  mit wachsendem  $n$  immer näher an einer ganzen Zahl liegt, für gerade  $n$  von unten (d. h. für große gerade  $n$  kommen viele Neunen direkt nach dem Komma), für ungerade  $n$  von oben (dasselbe mit Nullen).

Zum Beweis berechne  $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k = 2 \sum_{k=0, k \text{ gerade}}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k$ , da sich die Summanden mit ungeradem  $k$  wegheben. Für gerades  $k$  ist  $(\sqrt{2})^k \in \mathbb{N}$ , also folgt  $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \in \mathbb{N}$ . Nun ist  $1 - \sqrt{2} = -0,4142\dots$ , also  $(1 - \sqrt{2})^n \rightarrow 0$  mit abwechselnden Vorzeichen. Das erklärt die Beobachtung. Genauer folgt mit  $|(1 - \sqrt{2})^n| < 2^{-n} < 10^{-3n/10}$  (wegen  $|1 - \sqrt{2}| < 2^{-1}$  und  $2^{10} > 10^3$ ), dass die Anzahl der Nullen bzw. Neunen nach dem Komma etwa wie  $3n/10$  wächst.

## Übungen für Kapitel 8

### Lösung zu Übung 8-8

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $x = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ . Definiere  $x_n, z_n$  wie in Hinweis (4) zu Übung 8-7. Dann hat jedes  $x_n$  die Form  $\frac{p_n}{q}$  mit  $p_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$  (Beweis mit Induktion: Dies ist wahr für  $x_0 = x$ , und  $x_{n+1} = \{bx_n\}$  liegt in  $[0, 1)$  und  $x_{n+1} = bx_n - z_{n+1} = \frac{bp_n - qz_{n+1}}{q}$ ). Also gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für  $p_n$ , also gibt es  $n_0$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n_0} = x_{n_0+k}$ . Dann folgt  $x_{n_0+1} = x_{n_0+k+1}, x_{n_0+2} = x_{n_0+k+2}, \dots$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $x = (0, z_1 z_2 \dots)_b$ . Gilt  $z_{n+k} = z_n$  für alle  $n > n_0$ , so ist  $x = (0, z_1 \dots z_{n_0} z_{n_0+1} \dots z_{n_0+k} z_{n_0+1} \dots z_{n_0+k} \dots)_b = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{z_n}{b^n} + \left( \frac{z_{n_0+1}}{b} + \dots + \frac{z_{n_0+k}}{b^k} \right) \left( \frac{1}{b^{n_0}} + \frac{1}{b^{2n_0}} + \frac{1}{b^{3n_0}} + \dots \right)$ . Die letzte Klammer ist eine geometrische Reihe mit Quotient  $b^{-n_0}$ , also gleich  $\frac{b^{-n_0}}{1-b^{-n_0}}$  und daher rational. Damit ist  $x$  eine endliche Summe rationaler Zahlen, also rational.

### Lösung zu Übung 8-11

- (1) Die rechte Seite ist  $A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots + A_n(b_n - b_{n+1}) + A_n b_{n+1} = A_1 b_1 - A_1 b_2 + A_2 b_2 - \dots + A_n b_n = A_1 b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + (A_3 - A_2)b_3 + \dots + (A_n - A_{n-1})b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ .
- (2) Sei  $|A_n| \leq C$  für alle  $n$ . Wir zeigen, dass die rechte Seite in (1) für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Aus  $b_n \rightarrow 0$  folgt  $A_n b_{n+1} \rightarrow 0$ . Der Term  $\sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1})$  ist die  $n$ -te Partialsumme der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ , daher müssen wir die Konvergenz dieser Reihe zeigen. Dafür zeigen wir ihre absolute Konvergenz, also die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(b_k - b_{k+1})|$ : Aus  $b_k \geq b_{k+1}$  folgt  $|A_k(b_k - b_{k+1})| = |A_k|(b_k - b_{k+1}) \leq C(b_k - b_{k+1})$  und damit  $\sum_{k=1}^n C(b_k - b_{k+1}) = C(b_1 - b_{n+1}) \rightarrow Cb_1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wende nun das Majorantenkriterium an.
- (3) Für  $a_k = (-1)^{k-1}$  ist jedes  $A_n$  gleich 1 oder 0, also ist (2) direkt anwendbar.

**Lösung zu Übung 8-12** Für jedes  $n > 1$  ist  $\sum_{m=2}^{\infty} n^{-m} = n^{-2} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ , also  $\sum_{n,m=2}^{\infty} n^{-m} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} n^{-m} = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$  (Teleskopreihe).

## Übungen für Kapitel 9

**Lösung zu Übung 9-5** Entwickelt man mit der binomischen Formel  $\left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 5^{k/2}$ , dann kürzen sich in  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$  die Terme mit geradem  $k$  weg, und für  $k = 2m+1$  ist  $5^k = \sqrt{5} \cdot 5^m$ . Es folgt  $a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2m+1} 5^m = \frac{1}{2^n} \left( \binom{n+1}{1} + 5 \binom{n+1}{3} + 5^2 \binom{n+1}{5} + \dots \right)$ .

Dies ist zwar nicht so schön „geschlossen“ wie die Binet-Formel, aber immerhin offensichtlich rational. Da wir wissen, dass die Fibonacci-Zahlen ganzzahlig sind, folgt aus der Formel eine nicht offensichtliche Teilbarkeitseigenschaft für die Kombination der Binomialkoeffizienten in der Klammer.

**Lösung zu Übung 9-6** Ist  $f$  gerade, so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = f(-x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  für alle  $x$  mit  $|x| < R$ , also folgt durch Koeffizientenvergleich  $(-1)^n a_n = a_n$  für alle  $n$ , also  $-a_n = a_n$  und damit  $a_n = 0$  für ungerade  $n$ . Die Umkehrung ist offensichtlich.

**Lösung zu Übung 9-7** O. B. d. A. sei  $a_0 = 1$  (sonst invertiere zunächst  $\frac{1}{a_0}(a_0 + a_1 x + \dots)$  und teile dann das Ergebnis durch  $a_0$ ). Dann ist  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -a_1$  und  $b_n = -a_n - a_{n-1}b_1 - \dots - a_1 b_{n-1}$  für  $n \geq 2$ . Nach Übung 9-2 gibt es  $C > 0$  mit  $|a_n| \leq C^n$  für alle  $n \geq 1$ . Behauptung: Dann gilt  $|b_n| \leq (2C)^n$  für alle  $n \geq 1$ . Wiederum nach Übung 9-2 folgt daraus das Gewünschte. Beweis mit Induktion: Für  $n = 1$  ist  $|b_1| = |a_1| = C < 2C$ ; gilt die Ungleichung für  $1, \dots, n-1$ , so folgt  $|b_n| \leq |a_n| + |a_{n-1}||b_1| + \dots + |a_1||b_{n-1}| \leq C^n + C^{n-1}2C + \dots + C2^{n-1}C^{n-1} = (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})C^n = (2^n - 1)C^n < 2^n C^n$ , was zu zeigen war.

Die letzte Behauptung folgt direkt aus Satz 8.4.2 über das Cauchy-Produkt.

**Lösung zu Übung 9-9** Wegen  $a_0 = 0$  lautet die Rekursion  $a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_1$ , und man erhält  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 5$ ,  $a_5 = 14$ . Die Rekursion erinnert an das Cauchy-Produkt. Daher rechnen wir  $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}) x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = f(x) - x$ , also  $f(x)^2 - f(x) + x = 0$  und damit  $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x}$  oder  $f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$ . Wegen  $f(0) = a_0 = 0$  folgt  $f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$ .

## Übungen für Kapitel 10

**Lösung zu Übung 10-4** Die Aussage  $x^b \ll a^x$  verallgemeinert Satz 7.5.3(1) auf reelle Exponenten. Hier ist ein alternativer Beweis: Für  $x > 0$  ist  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^m}{m!}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$ . Wählt man  $m > b$ , folgt  $x^b \ll x^m < m! e^x$ , also  $x^b \ll e^x$ . Ersetzt man  $x$  durch  $x \log a$ , folgt  $x^b (\log a)^b = (x \log a)^b \ll e^{x \log a} = a^x$ , also  $x^b \ll a^x$ .

Schließlich ist  $x \rightarrow \infty$  äquivalent zu  $y = e^x \rightarrow \infty$ , also  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\log y}{y^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(e^b)^x} = 0$  nach dem vorher Bewiesenen wegen  $e^b > 1$ .

## Übungen für Kapitel 11

**Lösung zu Übung 11-8** Es ist zu zeigen: Sind  $(x_n)$  und  $(x'_n)$  zwei Folgen mit Grenzwert  $x_0$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ . Dazu betrachte die Folge  $(x''_n)$ , deren Glieder

der Reihe nach  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$  sind. Diese konvergiert ebenfalls gegen  $x_0$ , daher besitzt die Folge  $(f(x''_n))$  nach Voraussetzung einen Grenzwert. Damit müssen ihre beiden Teilfolgen  $(f(x_n))$  und  $(f(x'_n))$  denselben Grenzwert haben.

**Lösung zu Übung 11-9** Sei o. B. d. A.  $f$  monoton wachsend. Es ist zu zeigen: Ist  $x_0 \in I$  nicht rechter Randpunkt von  $I$ , so existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ . Die Aussage für  $f(x_0-)$  folgt durch Spiegelung.

Sei  $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ . Für große  $n$  ist  $x_n \in I$ , und die Folge  $(f(x_n))$  ist monoton fallend, daher existiert  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Sei zunächst  $A \in \mathbb{R}$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $n_0$ , so dass  $f(x_{n_0}) < A + \varepsilon$ . Setze  $\delta = \frac{1}{n_0}$ . Für  $x \in (x_0, x_0 + \delta) = (x_0, x_{n_0})$  ist dann  $f(x) \leq f(x_0) < A + \varepsilon$  wegen der Monotonie. Außerdem ist  $f(x) \geq A$ , da ein  $n$  mit  $x > x_0 + \frac{1}{n} = x_n$  existiert, also  $f(x) \geq f(x_n) \geq A$  gilt. Insgesamt also  $A < f(x) < A + \varepsilon$  für  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , was zu zeigen war.

Der Beweis für  $A = -\infty$  verläuft ähnlich.

**Lösung zu Übung 11-10** Sei  $x_0 \in \mathbb{Q}$ . Dann existiert eine Folge  $(x_n)$  irrationaler Zahlen mit  $x_n \rightarrow x_0$  (wähle z. B.  $x_n = x_0 - \frac{\sqrt{2}}{n}$ ). Wegen  $f(x_n) = 0 \forall n$  und  $f(x_0) \neq 0$  ist  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , also ist  $f$  unstetig in  $x_0$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $M$  die Menge der rationalen Zahlen, deren Nenner kleiner oder gleich  $\frac{1}{\varepsilon}$  ist und die kleiner als  $|x_0| + 1$  sind. Dann ist  $M$  endlich, hat also keinen Häufungspunkt. Da  $x$  irrational ist, gilt  $x_0 \notin M$ , also gibt es  $\delta > 0$  mit  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M = \emptyset$  und  $\delta < 1$ . Nach Definition von  $M$  hat also jede rationale Zahl  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  einen Nenner  $q > \frac{1}{\varepsilon}$  (wenn  $x = \frac{p}{q}$  gekürzt), also gilt  $f(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon$ . Weiterhin ist  $f(x) = 0$  für alle irrationalen  $x$ , insbesondere für  $x_0$ . Damit gilt  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Also ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

**Lösung zu Übung 11-12** Sei  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ . Es ist  $\lim_{x \rightarrow n-} f(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow n+} f(x) = \infty$  für  $n = 0, 1, 2, 3$ , da dies jeweils für genau einen Summanden gilt und die anderen nahe  $n$  beschränkt sind. Nach dem Zwischenwertsatz hat also  $f$  in jedem Intervall  $(n, n+1)$  mit  $n = 0, 1, 2$  mindestens eine Nullstelle. Es hat auf jedem dieser Intervalle genau eine Nullstelle, da dort jeder der Summanden streng monoton wächst, also auch  $f$ . Weitere Nullstellen gibt es nicht, da  $f$  für  $x < 0$  negativ und für  $x > 0$  positiv ist.

**Lösung zu Übung 11-13** Sei  $C = f(0)$ . Wähle  $C'$  so, dass  $f(x) > C$  für  $|x| > C'$ . Nach dem Satz vom Minimum hat  $f$  auf  $[-C', C']$  ein Minimum  $x_{\min}$ , also  $f(x_{\min}) \leq f(x)$  für alle  $x \in [-C', C']$ . Insbesondere ist  $f(x_{\min}) \leq f(0) = C$ . Damit ist auch  $f(x_{\min}) \leq C < f(x)$  für alle  $x \notin [-C', C']$ , also ist  $x_{\min}$  ein Minimum von  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**Lösung zu Übung 11-14** Wegen  $f(x) \rightarrow c \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow \infty$  gibt es ein  $N$ , so dass  $|f(x) - c| < 1$  und daher  $|f(x)| < |c| + 1$  für alle  $x > N$  gilt. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum ist  $f$  auf dem Intervall  $[0, N]$  beschränkt,  $|f(x)| \leq C$  für  $x \in [0, N]$ . Insgesamt folgt  $|f(x)| \leq \max\{|c| + 1, C\}$  für alle  $x \in [0, \infty)$ .

$f$  muss kein Maximum oder Minimum haben. Ein Beispiel ohne Maximum ist  $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ . Ein Beispiel, das weder Maximum noch Minimum hat, ist  $\frac{x}{x+1} \sin x$ .

Ohne die Voraussetzung der Stetigkeit gilt die Behauptung nicht. Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ ,  $f(0) = 0$ .

**Lösung zu Übung 11-15** Sei  $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$  für  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ . Es ist zu zeigen, dass  $g$  eine Nullstelle hat. Wegen  $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = -g(0)$  haben  $g(\frac{1}{2})$  und  $g(0)$  unterschiedliches Vorzeichen, oder sind Null. Im letzteren Fall sind wir sofort fertig, sonst folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

Die allgemeine Aussage gilt genau dann, wenn  $h = \frac{1}{n}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lösung zu Übung 11-19** Im Folgenden sei immer  $0 \leq x < 1$ . Partielle Summation, s. Übung 8-11, ergibt

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n = s_N x^{N+1} + \sum_{n=0}^N s_n (x^n - x^{n+1}) = s_N x^{N+1} + (1-x) \sum_{n=0}^N s_n x^n$$

mit  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Die Folge  $(s_n)$  ist beschränkt, da  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N$  existiert, also folgt, dass  $s_N x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  und daher

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Schreibe  $s = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$ , also  $s = f(1)$ . Mit  $s = (1-x) \frac{s}{1-x} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$  folgt

$$f(x) - s = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n.$$

Wir teilen dies auf als

$$\begin{aligned} f(x) - s &= A_N(x) + B_N(x), \quad A_N(x) = (1-x) \sum_{n=0}^N (s_n - s) x^n, \quad B_N(x) \\ &= (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} (s_n - s) x^n \end{aligned}$$

wobei  $N$  noch gewählt wird. Für festes  $N$  ist  $A_N(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 1$ . Außerdem

$$|B_N(x)| \leq (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n - s| x^n \leq \left( \sup_{n>N} |s_n - s| \right) (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \left( \sup_{n>N} |s_n - s| \right),$$

da die letzte Summe gleich  $x^{N+1}(1-x)^{-1}$  ist.

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle  $N$ , so dass  $(\sup_{n>N} |s_n - s|) < \varepsilon$ . Dann wähle  $\delta > 0$ , so dass  $|A_N(x)| < \varepsilon$  für  $x > 1 - \delta$ . Dann folgt für dieses  $N$  und diese  $x$

$$|f(x) - s| \leq |A_N(x)| + |B_N(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

was zu zeigen war.

## Übungen für Kapitel 12

### Lösung zu Übung 12-2

- (1) Induktion: Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Gilt die Gleichung für  $n$ , so ist  $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n-i+1)}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)}$ . Mit  $j = i + 1$  ist die erste Summe gleich  $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)}$ . Wegen  $\binom{n}{-1} = 0$  kann diese Summe auch ab  $j = 0$  laufen, und wegen  $\binom{n}{n+1} = 0$  kann die zweite Summe  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)}$  bis  $n+1$  laufen. Mit  $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$  folgt  $(fg)^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)}$ , was zu zeigen war.
- (2)  $x^2 e^x + 2 \cdot 2014 x e^x + 2 \cdot \binom{2014}{2} e^x$ .
- (3) Wende die Produktregel auf  $f(x) = e^{ax}$ ,  $g(x) = e^{bx}$  an und setze danach  $x = 0$ .

**Lösung zu Übung 12-3** Für festes  $y \geq 0$  setze  $g(x) := (x+y)^a - x^a - y^a$ . Es gilt  $g(0) = 0$  und  $g'(x) = a((x+y)^{a-1} - x^{a-1}) \leq 0$  wegen  $a-1 \leq 0$  und  $x+y \geq x$ . Also ist  $g$  monoton fallend auf  $[0, \infty)$ , daher gilt  $g(x) \leq 0$  für alle  $x$  und damit die Ungleichung.

Für  $a = \frac{1}{2}$  folgt die Ungleichung auch aus  $x+y \leq (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$  durch Ziehen der Wurzel.

Die gleichmäßige Stetigkeit von  $f(x) = x^a$  folgt dann aus  $f(x+y) - f(x) \leq y^a$  (wesentlich für die Gleichmäßigkeit: die rechte Seite ist unabhängig von  $x$ ) und  $\lim_{y \rightarrow 0} y^a = 0$ .

### Lösung zu Übung 12-4

- (1) Das ist  $f'(0)$  für  $f(x) = a^x$  (nach Definition der Ableitung). Mit  $f'(x) = a^x \log a$  folgt  $f'(0) = \log a$ . Alternativ mit l'Hospital<sup>2</sup>.
- (2) Mit  $h = \frac{1}{x}$  ist  $\log(1 + \frac{1}{x})^x = x \log(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\log(1+h)}{h} = \frac{\log(1+h) - \log 1}{h}$ . Für  $x \rightarrow \infty$  ist  $h \rightarrow 0$ , und der letzte Quotient ist per Definition die Ableitung von  $\log z$  bei  $z = 1$ , also gleich  $\frac{1}{z}$  bei  $z = 1$ , also gleich  $\frac{1}{1} = 1$ . Damit folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{x})^x = 1$ , also  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e^1 = e$  wegen Stetigkeit der Exponentialfunktion.
- (3) Die Binomialreihe liefert  $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$ , wobei  $O(x^3)$  für eine Funktion der Form  $x^3 h(x)$  (mit  $h$  stetig bei  $x = 0$ ) steht, also  $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} =$

<sup>2</sup> Das ist aber overkill, da l'Hospital mit der Definition der Ableitung bewiesen wurde. Man sollte immer den konzeptuell direktesten Weg kennen.

$\frac{(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+O(x^3))+(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+O(x^3))-2}{x^2} = -\frac{1}{4} + \frac{O(x^3)}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{4}$  für  $x \rightarrow 0$ . Alternativ könnte man l'Hospital zweimal anwenden.

**Lösung zu Übung 12-5** Sei  $a \neq -\infty$ , der Fall  $a = -\infty$  lässt sich mit der Substitution  $y = \frac{1}{x}$  auf den Fall  $b = 0$  (und Grenzwert bei  $b$ ) zurückführen. Schreibe  $L = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon < L$ ,  $\varepsilon < 1$ . Wähle  $\delta > 0$  derart, dass  $\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \varepsilon$  für  $a < \xi < a + \delta$ . Setze  $y = a + \delta$  und wähle  $\delta' \in (0, \delta)$  derart, dass für  $a < x < a + \delta'$  gilt, dass  $\left| \frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} - 1 \right| < \varepsilon$ . Dies geht wegen  $f(x), g(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow a$ . Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es  $\xi \in (x, y)$  mit  $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ . Wegen  $a < \xi < y = a + \delta$  ist  $L - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L + \varepsilon$ . Daraus und aus  $1 - \varepsilon < \frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} < 1 + \varepsilon$  folgt nun  $(L - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$ , also  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < (L + 1)\varepsilon + \varepsilon^2 < (2L + 1)\varepsilon$ , für alle  $x$  mit  $a < x < a + \delta'$ . Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

**Lösung zu Übung 12-6** Für  $g(x) = \log f(x) = x \log x$  ist  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  nach Übung 10-4, also  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$ . Es ist  $f'(x) = (e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)} = (1 + \log x)x^x$ , einziger stationärer Punkt ist daher  $x = e^{-1}$ , und  $f$  ist monoton fallend auf  $(0, e^{-1})$  und steigend auf  $(e^{-1}, \infty)$ . Das Verhalten von  $f$  nahe Null lässt sich am besten mittels der Taylorentwicklung  $e^s = 1 + s + s^2 h(s)$  mit  $h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+2)!}$  stetig bei Null analysieren. Es folgt  $f(x) - 1 = x \log x + x^2 (\log x)^2 h(x \log x)$ , insbesondere ist die durch  $\tilde{f}(0) = 1$  stetig fortgesetzte Funktion in  $x = 0$  nicht differenzierbar, da  $\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x} = \log x + x (\log x)^2 h(x \log x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0$  gilt.

**Lösung zu Übung 12-10** Wir schreiben  $\binom{a}{n} = \frac{a}{1} \frac{a-1}{2} \dots \frac{a-n+1}{n} = (-1)^n (1 - \frac{a+1}{1})(1 - \frac{a+1}{2}) \dots (1 - \frac{a+1}{n})$ . Mit der Ungleichung  $\log x \leq x - 1$  können wir die Frage, ob das Produkt für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht, in eine Frage über eine Summe verwandeln: Für  $k > a + 1$  folgt  $\log(1 - \frac{a+1}{k}) \leq -\frac{a+1}{k}$ , daher wählen wir ein  $k_0 > a + 1$  und spalten das Produkt für  $n \geq k_0$  als  $\binom{a}{n} = (-1)^n (1 - \frac{a+1}{1})(1 - \frac{a+1}{2}) \dots (1 - \frac{a+1}{k_0-1}) T_n$  mit  $T_n = (1 - \frac{a+1}{k_0})(1 - \frac{a+1}{k_0+1}) \dots (1 - \frac{a+1}{n})$ . Es folgt  $\log T_n \leq -(a+1)(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0+1} + \dots + \frac{1}{n})$ . Da die harmonische Reihe divergiert und  $a + 1 < 0$  ist, gilt  $\log T_n \rightarrow -\infty$ , also  $T_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und damit auch  $\binom{a}{n} \rightarrow 0$ .

Eine andere Lösung ist mittels der Idee zu Übung 7-4(3) möglich.

**Lösung zu Übung 12-11** Man zeigt zunächst mit Induktion, dass  $f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x}) e^{-1/x}$  für  $x > 0$  und Polynome  $p_0, p_1, p_2, \dots$  gilt. Man beweise und verwende dann  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{-n} e^{-1/x} = 0$  für alle  $n$ .

**Lösung zu Übung 12-12**  $g(x) = f(x)f(1-x)$ , wobei  $f$  die Funktion aus Übung 12-11 ist. Da auch die Nullfunktion für  $x \geq 1$  gleich Null ist, ist  $g$  durch seine Werte in  $x \geq 1$  nicht eindeutig festgelegt.

**Lösung zu Übung 12-14** Für  $g(x) = e^{-x}f(x)$  gilt  $g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leq 0$  für alle  $x$ . Also ist  $g$  monoton fallend, d. h.  $g(x) \leq g(0) = 0$  für alle  $x$ . Wegen  $f(x) \geq 0$  ist aber  $g(x) \geq 0$ , also folgt  $g(x) = 0$  und damit  $f(x) = 0$  für alle  $x$ .

**Lösung zu Übung 12-15** Schreibe (vgl. der Hinweis)  $t_n(x, x_0) = (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) - nx_0^{n-1} = (x^{n-1} - x_0^{n-1}) + (x^{n-2} - x_0^{n-2})x_0 + \dots + (x - x_0)x_0^{n-2}$  und wende  $x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \dots + x_0^{k-1})$  für  $k = 1, \dots, n-1$  an. Fasst man zusammen, folgt  $t_n(x, x_0) = (x - x_0)s_n(x, x_0)$  mit  $s_n(x, x_0) = x^{n-2} + 2x^{n-3}x_0 + \dots + (n-1)x_0^{n-2}$ . Für  $|x|, |x_0| \leq r$  ist  $|s_n(x, x_0)| \leq \binom{n}{2}r^{n-2}$ . Da die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2}|a_n|r^{n-2}$  für alle  $r < R$  konvergiert (selber Beweis wie für  $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx_0^{n-1}$ ), folgt, dass ein  $\varepsilon > 0$  und  $C$  existiert, so dass  $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x, x_0)| \leq C$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$  gilt (wähle z. B.  $\varepsilon = (R - |x_0|)/2$ , denn dann ist  $|x| < r := (R + |x_0|)/2 < R$  für alle diese  $x$ ). Damit folgt  $|D(x, x_0)| \leq C|x - x_0|$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \varepsilon$ , also  $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x, x_0) = 0$ .

### Lösung zu Übung 12-16

- (1) Die Tangentengleichung ist  $y - f(\bar{x}) = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ . Für  $y = 0$  folgt  $\bar{x}' = x = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$ . Da  $f$  strikt monoton wächst, folgt aus  $\bar{x} \geq \xi$  und  $f(\xi) = 0$ , dass  $f(\bar{x}) \geq 0$ , also  $\bar{x}' \leq \bar{x}$ . Nach Taylor (oder Mittelwertsatz) ist  $f(\bar{x}) = f(\xi) + (\bar{x} - \xi)f'(\eta) = (\bar{x} - \xi)f'(\eta)$  für ein  $\eta \in [\xi, \bar{x}]$ . Da  $f$  konvex ist, gilt  $f'(\eta) \leq f'(\bar{x})$ , also folgt  $f(\bar{x}) \leq (\bar{x} - \xi)f'(\bar{x})$  und damit  $\bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \geq \xi$ , insgesamt also  $\bar{x}' \in [\xi, \bar{x}]$ .  
Für  $f(x) = x^2 - r$  ist  $\bar{x}' = \bar{x} - \frac{\bar{x}^2 - r}{2\bar{x}} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \frac{r}{\bar{x}})$ , vgl. das Heron-Verfahren in Übung 7-11.
- (2) Aus (1) (mit  $\bar{x} = x_n, \bar{x}' = x_{n+1}$ ) folgt induktiv  $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$  für alle  $n$ . Also ist  $(x_n)$  monoton fallend und nach unten beschränkt, hat also einen Grenzwert  $\xi'$ . Aus  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  folgt für  $n \rightarrow \infty$  wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $f'$ , dass  $\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')}$ , also  $f(\xi') = 0$ . Da  $f$  strikt monoton ist, hat  $f$  genau eine Nullstelle, also folgt  $\xi' = \xi$ .
- (3) Da die Formel für  $x_{n+1}$  die Werte von  $f$  und  $f'$  bei  $x_n$  enthält, schreiben wir die Taylorformel um den Punkt  $x_n$  hin, ausgewertet bei  $\xi$  (da wir dort den Funktionswert kennen):  $0 = f(\xi) = f(x_n) + (\xi - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)$  für ein  $\eta \in [\xi, x_n]$ , also  $f(x_n) = (x_n - \xi)f'(x_n) - \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)$ . Daraus folgt

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{(x_n - \xi)f'(x_n) - \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}.$$

Da  $f'(a) = m$  und  $f'$  monoton wächst, ist  $f'(x_n) \geq m$ . Mit  $0 \leq f''(\eta) \leq M$  folgt die Behauptung.

**Lösung zu Übung 12-17** Sei o. B. d. A.  $f'(a) < \gamma < f'(b)$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $\gamma = 0$ . Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt  $f$  in einem Punkt  $\xi \in [a, b]$  sein Minimum an. Wegen  $f'(a) < 0$  ist  $a$  kein Minimum für  $f$ , also  $\xi \neq a$  und

analog ist wegen  $f'(b) > 0$  auch  $\xi \neq b$ . Also ist  $\xi$  ein innerer Punkt, also gilt  $f'(\xi) = 0$ , was zu zeigen war.

Ist  $\gamma$  beliebig, so definiere  $g(x) = f(x) - \gamma x$  und wende den ersten Teil auf  $g$  an.

## Übungen für Kapitel 13

**Lösung zu Übung 13-3** Der Konvergenzradius ist jeweils 1, und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  divergiert für  $z = 1$ , konvergiert aber für alle  $z$  mit  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ . Diese Konvergenz folgt aus dem Dirichletkriterium (Übung 8-11) – das analog für komplexe Zahlen gilt (gleicher Beweis) –, da die Partialsummen der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  gleich  $\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$  und daher durch  $\frac{2}{|1-z|}$  beschränkt sind.

Wegen  $z^4 = 1 \Leftrightarrow z \in \{\pm 1, \pm i\}$  konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$  genau für alle  $z$  mit  $|z| \leq 1$ ,  $z \notin \{\pm 1, \pm i\}$ .

Die letzte Behauptung folgt aus  $\sin nx = \operatorname{Im} z^n$  für  $z = e^{ix}$  und der Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  für  $|z| = 1$ ,  $z \neq 1$ .

**Lösung zu Übung 13-4** Wir nehmen als Ecken  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$  mit  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  und  $P = 1$ . Zu bestimmen ist  $a = |1 - \omega| \cdot |1 - \omega^2| \cdots |1 - \omega^{n-1}| = |p(1)|$  mit  $p(t) = (t - \omega)(t - \omega^2) \cdots (t - \omega^{n-1})$ . Das Polynom  $p(t)$  hat Grad  $n - 1$ , die Nullstellen  $\omega, \dots, \omega^{n-1}$  und Leitkoeffizienten 1. Andererseits hat das Polynom  $t^n - 1$  die Nullstellen  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ , also hat  $q(t) = \frac{t^n - 1}{t - 1} = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$  den Grad  $n - 1$ , die Nullstellen  $\omega, \dots, \omega^{n-1}$  und Leitkoeffizienten 1. Daher muss  $p(t) = q(t)$  für alle  $t$  sein, also  $a = |p(1)| = |q(1)| = |n| = n$ . Das Produkt der Längen ist also  $n$ .

**Lösung zu Übung 13-5** Die Folge  $(a_n)$  ist periodisch mit Periode 8, d. h.  $a_{n+8} = a_n$  für alle  $n$ , für beliebige Anfangswerte. Dies lässt sich zum Beispiel so erklären: Mit der Methode der erzeugenden Funktionen (Abschn. 9.2) sieht man, dass  $a_n = Az_1^n + Bz_2^n$  für gewisse  $A, B \in \mathbb{C}$ , wobei  $z_1, z_2$  die Lösungen der Gleichung  $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ , also  $z_{1,2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$  sind. Die Periodizität folgt nun aus  $z_1^8 = z_2^8 = 1$ .

## Übungen für Kapitel 14

**Lösung zu Übung 14-5** Setze  $z = e^{ix}$ , dann ist  $\cos nx = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ , insbesondere  $q = \cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ . Wegen  $(z + z^{-1})^3 = z^3 + 3z + 3z^{-1} + z^{-3} = (z^3 + z^{-3}) + 3(z + z^{-1})$  ist  $4 \cos^3 x = \cos 3x + 3 \cos x$ , also  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ , also  $T_3(q) = 4q^3 - 3q$ . Ähnlich leitet man  $T_4(q) = 8q^4 - 8q^2 + 1$  her. Offenbar ist  $T_0(q) = 1$ ,  $T_1(q) = q$ .

Um eine Rekursion zu finden, versuchen wir,  $z^{n+1} + z^{-n-1}$  mit  $z^n + z^{-n}$  und  $z + z^{-1}$  in Verbindung zu bringen. Es ist  $(z^n + z^{-n})(z + z^{-1}) = z^{n+1} + z^{n-1} + z^{-n+1} + z^{-n-1} =$

$(z^{n+1} + z^{-(n+1)}) + (z^{n-1} + z^{-(n-1)})$ , also folgt  $2qT_n(q) = T_{n+1}(q) + T_{n-1}(q)$  oder  $T_{n+1}(q) = 2qT_n(q) - T_{n-1}(q)$ . Daraus folgt induktiv dass  $T_n(q)$  ein Polynom vom Grad  $n$  ist.

**Lösung zu Übung 14-6** Die Folge  $(a_n)$  ist beschränkt, aber nicht periodisch. Beweis:

1) Mit der Methode der erzeugenden Funktionen (Abschn. 9.2) sieht man, dass  $a_n = Az_1^n + Bz_2^n$  für gewisse  $A, B \in \mathbb{C}$ , wobei  $z_1, z_2$  die Lösungen der Gleichung  $z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0$  sind, also  $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$ . Es ist  $|z_1| = 1, |z_2| = 1$ , also ist  $(a_n)$  beschränkt (durch  $|A| + |B|$ ). Genauer berechnet man  $A = -B = -\frac{2}{\sqrt{15}}i$ , also  $a_n = -\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{Re}(iz_1^n)$  und damit  $|a_n| \leq \frac{4}{\sqrt{15}}$  für alle  $n$ .

2) Berechnet man  $a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}, a_4 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8}$ , beobachtet man, dass anscheinend  $a_n = \frac{u_n}{2^{n-1}}$  für eine ungerade Zahl  $u_n$  gilt, für alle  $n \geq 1$ . Dies lässt sich leicht mit Induktion beweisen: Es gilt für  $n = 1, 2$  und gilt es für  $a_{n-2}$  und  $a_{n-1}$  (mit  $n \geq 3$ ), so folgt  $a_n = \frac{1}{2} \frac{u_{n-1}}{2^{n-2}} - \frac{u_{n-2}}{2^{n-3}} = \frac{u_{n-1} - 4u_{n-2}}{2^{n-1}}$ . Daraus folgt die Behauptung, da mit  $u_{n-1}$  auch  $u_n := u_{n-1} - 4u_{n-2}$  ungerade ist.

Schließlich folgt aus  $a_n = \frac{u_n}{2^{n-1}}$  mit  $u_n$  ungerade, dass für  $n < m$  immer  $a_n \neq a_m$  ist. Also ist  $(a_n)$  nicht periodisch.

Die Nicht-Periodizität ist eng verwandt mit der Aussage:

$$\text{Der Winkel } \varphi := \arccos \frac{1}{4} \text{ ist kein rationales Vielfaches von } \pi. \quad (*)$$

Beweis von (\*): Wäre  $\varphi = \frac{k}{l}\pi$  mit  $k, l \in \mathbb{N}$ , so folgte aus  $\cos \varphi = \frac{1}{4}, \cos 2l\varphi = \cos 2k\pi = 1$ , dass  $T_{2l}(\frac{1}{4}) = 1$ , wobei  $T_{2l}$  das Tschebyscheff-Polynom ist (vgl. Übung 14-5). Aus der dort bewiesenen Rekursion  $T_{n+1}(q) = 2qT_n(q) - T_{n-1}(q), T_0(q) = 1, T_1(q) = q$  folgt aber für  $c_n := T_n(\frac{1}{4})$ , dass  $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n - c_{n-1}, c_0 = 1, c_1 = \frac{1}{4}$ . Wie für die  $a_n$  zeigt man induktiv, dass  $c_n = \frac{\text{ungerade}}{2^{n+1}}$  für alle  $n \geq 1$ , woraus  $c_n \neq 1$  folgt, insbesondere  $T_{2l}(\frac{1}{4}) \neq 1$ . Damit ist (\*) bewiesen.

Beziehung von (\*) zur Folge  $(a_n)$ : Es ist  $a_n = -\frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{Re}(iz_1^n)$  und  $z_1 = e^{i\varphi}$ . Wegen (\*) sind die Zahlen  $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots$  alle verschieden modulo  $2\pi$ , d. h. die Punkte  $e^{in\varphi}, n \in \mathbb{N}$  auf dem Einheitskreis sind alle verschieden. Also sind die Punkte  $iz_1^n$  alle verschieden. Wären nun die  $a_n$  periodisch, also etwa  $a_{n+N} = a_n$  für alle  $n$  und ein festes  $N$ , so müssten unter  $iz_1^n, iz_1^{n+N}, iz_1^{n+2N}$  zwei gleiche vorkommen (denn es gibt höchstens zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit demselben Realteil). Damit folgt aus (\*), dass die  $a_n$  nicht periodisch sind.

**Lösung zu Übung 14-8** Leitet man beide Seiten ab (Rechtfertigung s. unten), folgt  $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n\pi)^2}$ . Addiert man  $\frac{1}{x^2}$ , folgt  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(x-n\pi)^2}$ . Nun ist  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{(1 - \frac{x^2}{6} + \dots)^2}\right) = \frac{1}{x^2} \left(1 - (1 + \frac{x^2}{3} + \dots)\right) = -\frac{1}{3} + \dots$ , wobei die binomische Reihe  $(1+t)^{-2} = 1 - 2t + \dots$  verwendet wurde und Punkte für höhere Potenzen stehen. Im Grenzwert  $x \rightarrow 0$  folgt also  $-\frac{1}{3} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}$  und daraus die Behauptung.

Man muss noch das gliedweise Ableiten der Reihe rechtfertigen. Wir verwenden Satz 12.2.5. Die Reihe ist als  $\cot x = \frac{1}{x} + \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$  mit  $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi} \right)$  zu verstehen. Wegen  $f_N(0) = 0 \forall N$  existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(0)$ , und es ist  $f'_N(x) = -\sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2} \right)$ . Aus der Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , der Abschätzung  $|x - n\pi|, |x + n\pi| \geq \frac{n\pi}{2}$  für  $|x| \leq \frac{n\pi}{2}$  (also alle großen  $n$ ) und dem Weierstraßkriterium folgt die Konvergenz von  $f'_N(x)$ , gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , daher folgt die Behauptung.

## Übungen für Kapitel 15

### Lösung zu Übung 15-1

- (1) Die gesuchte Fläche ist die disjunkte (bis auf Ränder) Vereinigung der Rechtecke  $[q^{k+1}, q^k] \times [0, q^{ks}]$ , der Flächeninhalt ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} (q^k - q^{k+1}) q^{sk} = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{(1+s)k} = (1-q) \frac{1}{1-q^{1+s}}$$

(geometrische Reihe mit Quotient  $q^{1+s}$ ).

- (2) Die Treppenstufen von  $f_q$  werden für  $q \rightarrow 1$  immer schmaler. Anschaulich ist klar, dass  $f_q \rightarrow f$  für  $q \rightarrow 1$  gleichmäßig konvergiert, und mit Satz 15.2.8 folgt

$$\int_0^1 x^s dx = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1-q}{1-q^{1+s}} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1+q+q^2+\dots+q^s} = \frac{1}{s+1}.$$

- (3) Zu (1): Setze

$$f_{q,n}(x) = \begin{cases} f_q(x) & \text{für } x \geq q^n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$f_q(x) - f_{q,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq q^n \\ f_q(x) & \text{sonst.} \end{cases},$$

und da  $f_q$  monoton wächst, ist  $0 \leq f_q(x) - f_{q,n}(x) \leq f_q(q^n) = q^{s(n-1)}$  für alle  $x$ , also  $\sup_x |f_q(x) - f_{q,n}(x)| = q^{s(n-1)}$ . Wegen  $q < 1$  konvergiert dies für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null, also konvergiert  $f_{q,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_q$  gleichmäßig. Damit ist  $\int_0^1 f_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{q,n}$ , das ist der Grenzwert der Partialsummen der in (1) angegebenen Reihe, also der Wert der Reihe.

Zu (2): Der Beweis von Lemma 15.2.6 verwendet an keiner Stelle, dass die Anzahl der Unterteilungspunkte  $x_i$  endlich ist. Wir können daher das Lemma anwenden, müssen aber zeigen, dass die Maximalbreite der Treppenstufen gegen Null geht. Nun gilt für jedes  $k$ , dass  $q^k - q^{k+1} = q^k(1-q) \leq 1-q \rightarrow 0$  für  $q \rightarrow 1$ , was zu zeigen war.

**Lösung zu Übung 15-2** O. B. d. A. sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend. Wir müssen zeigen, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Treppenfunktion  $T$  existiert mit  $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ . Sei also  $\varepsilon > 0$ . Nach Übung 11-9 existieren die einseitigen Grenzwerte von  $f$  in jedem Punkt von  $[a, b]$ . Wir bestimmen die Punkte  $x_0, x_1, \dots$  wie folgt. Sei  $x_0 = a$ .

- (1) Sei  $x_1 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < f(x_0+) + \varepsilon\}$ . Falls  $x_1 < b$ , dann folgt  $f(x_1+) \geq f(x_0+) + \varepsilon$ .
- (2) Falls  $x_1 < b$ , dann sei  $x_2 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < f(x_1+) + \varepsilon\}$ . Falls  $x_2 < b$ , dann folgt  $f(x_2+) \geq f(x_1+) + \varepsilon \geq f(x_0+) + 2\varepsilon$ .
- (3) Falls  $x_2 < b$ , dann sei  $x_3 = \sup\{x \in [a, b] : f(x) < f(x_2+) + \varepsilon\}$ .

Wir fahren so fort, bis ein  $x_m = b$  ist. Dass dies tatsächlich eintritt, sieht man wie folgt: Für jedes  $k$  gilt: Falls  $x_k < b$ , dann ist  $f(x_k+) \geq f(x_0+) + k\varepsilon$ . Weil  $f$  nach oben durch  $f(b)$  beschränkt ist, muss es ein  $m$  mit  $x_m = b$  geben. Wir erhalten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  (wegen  $f(x_0+) < f(x_1+) < \dots$ ). Wir definieren nun  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $T(x_k) = f(x_k)$  für  $k = 0, \dots, m$  und

$$T(x) = f(x_k) \text{ für } x \in (x_k, x_{k+1}), \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Für  $x \in (x_k, x_{k+1})$  gilt  $f(x_k) \leq f(x) < f(x_{k+1}) = f(x_k) + \varepsilon$  wegen der Monotonie von  $f$  und nach Definition von  $x_{k+1}$ , also  $0 \leq f(x) - T(x) < \varepsilon$ . Also ist  $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in [a, b]$ , was zu zeigen war.

**Lösung zu Übung 15-3** Sei  $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Treppenfunktion und  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$  die zugehörige Unterteilung. Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist, gibt es im Intervall  $(x_0, x_1)$  eine rationale Zahl  $\alpha$ , und da  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist, gibt es in diesem Intervall eine irrationale Zahl  $\beta$ . Es gilt  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\beta) = 0$  und  $T(\alpha) = T(\beta)$ . Daher muss eine der Differenzen  $f(\alpha) - T(\alpha)$ ,  $T(\beta) - f(\beta)$  mindestens  $\frac{1}{2}$  sein, also gilt  $\sup_{[0,1]} |T(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$ .

Daher kann  $f$  nicht gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen sein.

#### Lösung zu Übung 15-4

- (1) Siehe den Beweis von Proposition 10.3.4.
- (2) Es ist

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$$

Wendet man Korollar 15.2.7 auf  $f(x) = \frac{1}{x}$  auf dem Intervall  $[1, 2]$  an, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \log 2$ .

**Lösung zu Übung 15-5** Wegen  $aq^n = 1$  muss  $q = q_n = a^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$  mit  $c = 1/a$  sein. Definiert man die Treppenfunktion  $T_n$  durch  $T_n(x) = \frac{1}{aq^{i-1}}$  auf  $[aq^{i-1}, aq^i)$ , so ist  $\frac{aq^i - aq^{i-1}}{aq^{i-1}} = q - 1$  für jedes  $i$ , also  $\int_a^1 T_n(x) dx = n(q - 1)$ . Damit folgt  $n(\sqrt[n]{c} - 1) \rightarrow \int_a^1 \frac{1}{x} dx = -\log a = \log c$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dies lässt sich auch direkt aus  $\frac{d}{dx} c^x = c^x \log c$  bei  $x = 0$  erhalten, da  $n(\sqrt[n]{c} - 1) = \frac{c^h - c^0}{h}$  mit  $h = \frac{1}{n}$ .

**Lösung zu Übung 15-9** Wir zeigen dies mit Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  ist

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

zu zeigen, dass ist genau die Aussage des Hauptsatzes. Die Aussage gelte nun für  $n - 1$ , und  $f$  sei  $n + 1$  mal stetig differenzierbar. Es genügt,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x).$$

zu zeigen. Dazu integriere partiell in  $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$  mit  $u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$  und  $v(t) = f^{(n)}(t)$ . Für  $u$  verwende die Stammfunktion  $u(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$  (nachrechnen, dass dann  $u'$  wie gewünscht ist!). Wegen  $v' = f^{(n+1)}$  folgt

$$R_n(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_{t=x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

was zu zeigen war.

### Lösung zu Übung 15-10

(1) Es ist  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$  wegen  $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ . Die anderen Identitäten folgen ähnlich.

(2) Mit der Substitution  $t = \tan \frac{x}{2}$  ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| \\ &= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Dies ist eine Stammfunktion für  $\frac{1}{\sin x}$  auf jedem Intervall, das kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  enthält.

**Lösung zu Übung 15-11** Sei zunächst  $k \in \mathbb{N}$  fixiert. Für  $x \in [k, k+1)$  ist  $EM(x) = x - k - \frac{1}{2}$ , also  $EM'(x) = 1$ . Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} 1 \cdot f(x) dx &= \left( x - k - \frac{1}{2} \right) f(x) \Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} EM(x) f'(x) dx \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} EM(x) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Summation von  $k = 1$  bis  $k = n - 1$  ergibt

$$\int_1^n f(x) dx = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n EM(x) f'(x) dx$$

und damit die Formel.

(2) Anwendung der Summenformel auf  $f(x) = x^a$  ergibt  $\sum_{k=1}^n k^a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + R(n)$  mit

$$R(n) = -\frac{1}{a+1} + \frac{1+n^a}{2} + \tilde{R}(n), \quad \tilde{R}(n) = \int_1^n EM(x) a x^{a-1} dx.$$

Nun ist  $-\frac{1}{2} \leq EM(x) \leq \frac{1}{2}$  für alle  $x$ , also folgt wegen  $a x^{a-1} \geq 0$  aus der Monotonie des Integrals wegen  $\int_1^a a x^{a-1} dx = n^a - 1$

$$-\frac{n^a - 1}{2} \leq \tilde{R}_n \leq \frac{n^a - 1}{2}$$

und daraus

$$-\frac{1}{a+1} + 1 \leq R_n \leq -\frac{1}{a+1} + n^a$$

was wegen  $a+1 \geq 1$  stärker als die geforderte Ungleichung ist.

Analysis I

Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums

Grieser, D.

2015, XIII, 351 S. 70 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-05946-0