2 Erweitertes Handwerkszeug

2.1 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

2.1.1 Potenzen

Multipliziert man eine Zahl a m-mal mit sich selber, dann spricht man von der *m-ten Potenz der Zahl a*, in Zeichen a^m.

Die Zahl a wird dann die *Basis*, die Zahl m wird der *Exponent* der Potenz genannt.

Steht das Mehrfachprodukt einer Zahl a mit sich selbst im *Nenner eines gemeinen Bruches* ($a \neq 0$), dann schreibt man dafür auch a^{-m}.

(2.01) $$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^m, \quad a^1 = a, \quad \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdots a} = a^{-m}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

2.1.2 Potenzgesetze

Eine *Potenz wird potenziert*, indem die *Exponenten multipliziert* werden.

Wegen der *Vertauschbarkeit bei der Multiplikation* können die Exponenten vertauscht werden, außerdem kann die Potenz durch Wahl verschiedener Faktoren des Exponentenprodukts in verschiedenen Formen dargestellt werden.

(2.02) $$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m, \quad \text{Beispiel: } (2^3)^{12} = 2^{36} = (2^{12})^3 = (2^4)^9 = \ldots$$

Potenzen mit gleicher Basis werden *multipliziert*, indem die *Exponenten addiert* werden.

Potenzen mit gleicher Basis werden *dividiert*, indem die *Exponenten subtrahiert* werden.

(2.03) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \text{Beispiel: } 2^8 \cdot 2^3 = 2^{8+3} = 2^{11}$$

(2.04) $$\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \text{Beispiel: } \frac{2^8}{2^3} = 2^8 : 2^3 = 2^{8-3} = 2^5$$

Aus der letztgenannten Regel folgt sofort die Festlegung, dass der Wert einer *Potenz mit dem Exponenten Null* stets gleich Eins ist.

(2.05) $$1 = \frac{a^m}{a^m} = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0, \quad \text{Beispiel: } \frac{2^8}{2^8} = 2^{8-8} = 2^0 = 1$$

Potenzen unterschiedlicher Basis, aber mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem das Produkt der Basiswerte potenziert wird.

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

H. Matthäus, W.-G. Matthäus, *Mathematik für BWL-Bachelor*, Studienbücher Wirtschaftsmathematik,
DOI 10.1007/978-3-658-06206-4_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Potenzen unterschiedlicher Basis, aber mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem der Quotient der Basiswerte potenziert wird.

(2.06) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$, Beispiel: $0{,}5^5 \cdot 2^5 = (0{,}5 \cdot 2)^5 = 1^5 = 1$

(2.07) $a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$, Beispiel: $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

Potenzen können bei Addition oder Subtraktion *nur dann* zusammengefasst und vereinfacht werden, wenn *bei gleichen Exponenten* ein *Ausklammern eines gemeinsamen Faktors* möglich ist.

(2.08) Beispiel: $2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 4^2 = 2 \cdot (4 \cdot 2)^2 + 3 \cdot 4^2 = 2 \cdot 4^2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 = 4^2 \cdot (8+3) = 4^2 \cdot 11 = 176$

Manchmal wird in speziellen mathematischen Umformungen durch geschicktes so genanntes *Erweitern* (Multiplikation mit einem Bruch vom Wert 1) auch dann ausgeklammert und zusammengefasst, wo dies eigentlich nicht möglich zu sein scheint.

(2.09) Beispiel: $2 \cdot n^2 + 3 \cdot m^2 = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot (m \cdot \frac{n}{n})^2 = n^2 \cdot (2 + 3(\frac{m}{n})^2)$

Falsch sind grundsätzlich – um das auch hier noch einmal zu betonen – die folgenden oft vorschnell und gedankenlos hingeschriebenen Gleichheiten (vergleiche dazu die binomischen Formeln auf Seite 24):

(2.10, aber falsch) falsch: $a^2 + b^2 = (a+b)^2$, falsch: $a^2 - b^2 = (a-b)^2$

2.1.3 Wurzeln

Unter der *m-ten Wurzel* aus einer nichtnegativen Zahl a (in Zeichen $\sqrt[m]{a}$) versteht man diejenige nichtnegative Zahl, deren m-te Potenz gerade diese Zahl a ergibt.

(2.11) $x = \sqrt[m]{a} \Leftrightarrow x^m = a$

Dabei sagt man zur Zahl a unter dem Wurzelzeichen, das sei der *Radikand* (von lat. radix =*Wurzel*), und m wird als *Wurzelexponent* bezeichnet.

Der Wurzelexponent 2 wird allgemein weggelassen. Soll die zweite Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a gezogen werden, spricht man von der Quadratwurzel.

(2.12) $\sqrt[2]{2} = \sqrt{2} = 1{,}414...$

Durch nachfolgendes Potenzieren kann man stets mit einer schnellen Kontrollrechnung überprüfen, ob ein Wurzelwert richtig berechnet wurde.

(2.13) $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}05$ ist falsch, denn $0{,}05^3 = 0{,}000125$

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

(2.14) $\sqrt[4]{0{,}2401} = 0{,}7$ ist richtig, denn $0{,}7^4 = 0{,}2401$

2.1.4 Wurzelgesetze

Alle *Wurzelgesetze* können aus den *Potenzgesetzen* des Abschnitts 2.1.2 hergeleitet werden, wenn die grundlegende Formel des Zusammenhangs zwischen Wurzel und Potenz angewandt wird:

> Die *m-te Wurzel* aus einer nichtnegativen Zahl *a* kann betrachtet werden als *Potenz von a* mit dem *gebrochenen Exponenten 1/m* .

(2.15) $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}, \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{1/2} = a^{0{,}5}, \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = a^{1/3} = a^{0{,}333...}$

Die Formeln (2.15) enthalten bereits die oft verwendeten gebrochenen Exponenten 1/2 bzw. 1/3 zur Beschreibung von Quadrat- und Kubikwurzel.

Gern werden Übungsaufgaben gestellt, in denen verlangt wird, die Wurzelgesetze aus den Potenzgesetzen abzuleiten. Wir wollen die Methodik des Vorgehens kennen lernen.

> Eine Wurzel wird *radiziert* (d. h. aus einer Wurzel wird eine weitere Wurzel gezogen), indem die *Wurzelexponenten multipliziert* werden.

(2.16) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \quad \text{Beispiel:} \ \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

> Eine *Wurzel wird potenziert*, indem ihr *Radikand potenziert* wird, der Potenzexponent kann also unter das Wurzelzeichen gezogen werden.
>
> Oder kürzer: Die *Potenz einer Wurzel ist gleich der Wurzel der Potenz*.

(2.17) $(\sqrt[m]{a})^n = (a^{\frac{1}{m}})^n = a^{\frac{n}{m}} = a^{n \cdot \frac{1}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad \text{Beispiel:} \ (\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

> Die Wurzel eines Produkts ist gleich dem Produkt der Wurzeln.

(2.18) $\sqrt[m]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}, \quad \text{Beispiel:} \ \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 6$

> Die Wurzel eines Quotienten ist gleich dem Quotient der Wurzeln.

(2.19) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{m}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad \text{Beispiel:} \ \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Bisher gab es viele Ähnlichkeiten mit den Potenzgesetzen. Das ändert sich nun: Während es bei den Potenzgesetzen mit den Regeln (2.03) und (2.04) sehr einfach zuging („Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden“) ist dieser Sachverhalt bei den Wurzeln weitaus schwieriger umzusetzen.

Wurzeln mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Reziprokwerte der Wurzelexponenten addiert werden.

(2.20) $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}}\cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{n+m}} = (\sqrt[m\cdot n]{a})^{n+m}$$

Wurzeln mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Reziprokwerte der Wurzelexponenten subtrahiert werden.

(2.21) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a^{n-m}} = (\sqrt[m\cdot n]{a})^{n-m}$$

2.1.5 Der Begriff des Logarithmus

Der *Logarithmus* – die Quelle schlafloser Nächte für alle, die die Mathematik nicht so sehr lieben. Dabei ist es so einfach, sich den Logarithmenbegriff zu erschließen. Sehen wir uns doch nur das Bild 2.01 der Aufgabenstellung an.

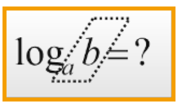

Bild 2.01: Die Logarithmus-Aufgabe: „a hoch wie viel ist b ?“

Die klar ablesbare Stellung von a und b, a steht unten, b steht oben, beschreibt nämlich sichtbar die Aufgabe, die mit dem Logarithmus zu lösen ist:

Der Logarithmus $\log_a b$ liefert die Antwort auf die Frage „*a hoch wie viel ist b*?“

Wer sich diese einfache Formel merkt, der dürfte eigentlich keine Probleme mit dem Logarithmenbegriff mehr bekommen.

Trainieren wir in dieser Weise ein wenig und erarbeiten uns rasch die ersten Eigenschaften von Logarithmen, wobei wir zunächst davon ausgehen wollen, dass für a nur Zahlen *größer als Eins* stehen sollen. Zuerst können wir sofort feststellen

(2.22) $$\log_a 1 = 0 \quad ,$$

denn die Antwort auf die Frage *a hoch wie viel ist 1* lautet für jede Zahl $a \neq 0$ immer: Null. Weiter gilt

(2.23) $$\log_a a = 1 \quad ,$$

denn die Antwort auf die Frage *a hoch wie viel ist a* lautet für jede Zahl $a \neq 0$ immer: Eins.

Offensichtlich gilt auch

(2.24) $$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

denn wegen $1/a = a^{-1}$ lautet hier die Frage *a hoch wie viel ist* a^{-1}, und sie hat die Antwort *minus Eins*. Damit haben wir nebenbei festgestellt, dass *Logarithmen-Ergebnisse durchaus auch negativ sein* können.

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

Versuchen wir jedoch, die folgende Aufgabe

(2.25) $\log_a(-3) = ?$

zu lösen, dann finden wir *keine Antwort*: *a hoch wie viel ist minus 3* lässt sich *nicht beantworten*, denn durch Potenzieren einer positiven Zahl kann *niemals ein negatives Ergebnis* entstehen.

Gleichermaßen ohne Lösung ist auch die Aufgabe

(2.26) $\log_a 0 = ?$

denn jeder Versuch, durch Potenzieren einer positiven Zahl die *Null* zu erzeugen, ist zum Scheitern verurteilt. Halten wir also fest:

Ein Logarithmus $x=\log_a b$ (mit $a>1$) kann *nur von positiven Zahlen* $b>0$ gebildet werden. Dagegen können die Logarithmus*werte* x negativ sein (siehe (2.24)), der Logarithmus kann aber auch die *Null* liefern (siehe (2.22)).

Das hängt jeweils vom Verhältnis des *Numerus* (d. h. des Logarithmenargumentes) b zur *Basis* a ab.

Für Basiswerte $a>1$ gilt folglich zusammenfassend:

$$\begin{array}{rl} \log_a b<0 & \textit{für}\;\; 0<b<1 \\ \log_a b=0 & \textit{für}\;\; b=1 \\ 0<\log_a b<1 & \textit{für}\;\; 1<b<a \\ \log_a b=1 & \textit{für}\;\; b=a \\ \log_a b>1 & \textit{für}\;\; b>a \end{array} \tag{2.27}$$

2.1.6 Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus

Es gibt *drei besondere Logarithmen*, sie gehören zu drei speziellen Basiszahlen a:

Der *Logarithmus zur Basis 2* wird als *dualer Logarithmus ld b* bezeichnet: $ld\, b=\log_2 b$.

Der *Logarithmus lg b zur Basis 10* heißt *dekadischer Logarithmus*: $lg\, b=\log_{10} b$.

Der *Logarithmus zur Basis e* wird als *natürlicher Logarithmus ln b* bezeichnet:

$\ln b=\log_e b$. Dabei ist $e=2{,}718281828$ ... die so genannte *Euler'sche Zahl*.

Der *natürliche Logarithmus* ist der am meisten verwendete unter allen Logarithmen. Jeder bessere Taschenrechner hat eine Taste `ln x` . Zur Kontrolle des Umgangs mit dieser Taste sollte man sich wenigstens eine der beiden Zahlen merken:

$$\ln 2 = 0{,}6931\ldots, \qquad \ln\frac{1}{2} = \ln 0{,}5 = -0{,}6931\ldots \tag{2.28}$$

Warum ist $\ln 2$ kleiner als Eins ? Kehren wir zur *Erklärung des Logarithmus* zurück: Der natürliche Logarithmus antwortet auf die Frage *e hoch wie viel ist 2*.

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

Setzen wir den ungefähren Zahlenwert für *e* ein, dann wird die Frage zu *2,7 hoch wie viel ist 2*. Da 2,7 hoch 1 schon 2,7 ist, muss die Antwort also kleiner ausfallen.

Also kann die Größenordnung des natürlichen Logarithmus von 2 stimmen. Dasselbe könnte auch aus (2.27) abgelesen werden.

Schließen wir die Beschäftigung mit den drei besonderen Logarithmen nun noch dadurch ab, dass wir folgende *Gesetze* zur Kenntnis nehmen, die sich sofort aus den Definitionen des jeweiligen Logarithmus ergeben:

(2.29) $$2^{\mathrm{ld}\,b} = b, \quad 10^{\lg b} = b, \quad e^{\ln b} = b$$

2.1.7 Logarithmengesetze

Eigentlich arbeitet die Mathematik nur mit *zwei ganz wichtigen Logarithmengesetzen*, die den *Logarithmus von Produkten* und den *Logarithmus von Potenzen* betreffen.

Der *Logarithmus eines Produktes* ist die *Summe der Logarithmen* der Faktoren.

(2.30) $$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Der *Logarithmus einer Potenz* ist das *Produkt aus dem Logarithmus der Basis mit dem Exponenten*.

(2.31) $$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$

Bevor wir einige Anwendungen dieser beiden Gesetze betrachten, wollen wir versuchen, sie herzuleiten. Dafür verwenden wir der Einfachheit halber die Basis *e=2,718...*, das heißt, wir arbeiten mit dem *natürlichen Logarithmus*.

Beginnen wir mit der Formel (2.30) und betrachten zuerst deren rechte Seite. Offensichtlich ist $\ln x$ die Antwort auf die Frage *e hoch wie viel ist x*, und $\ln y$ ist die Antwort auf die Frage *e hoch wie viel ist y*.

Wenn wir die beiden gefundenen Antworten wie in Formel (2.29) einsetzen, anschließend *x* mit *y* multiplizieren, ein passendes Potenzgesetz anwenden und danach die Seiten vertauschen, dann erhalten wir offensichtlich die Aussage $\ln x + \ln y$ ist die Antwort auf die Frage *e hoch wie viel ist* $x \cdot y$. Nichts anderes war zu zeigen.

(2.32) $$e^{\ln x} = x,\ e^{\ln y} = y \Rightarrow x \cdot y = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} \Rightarrow e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln(x \cdot y)}$$

Zur Verifizierung des Gesetzes (2.31) gehen wir auch wieder von (2.29) aus, potenzieren dann beide Seiten und wenden wieder ein passendes Potenzgesetz an.

Dann erhalten wir ganz rechts die Gleichheit, die wir in Worten so formulieren können: $y \cdot \ln x$ ist die Antwort auf die Frage *e hoch wie viel ist* x^y:

(2.33) $$e^{\ln x} = x \Rightarrow (e^{\ln x})^y = x^y \Rightarrow e^{y \cdot \ln x} = e^{\ln(x^y)}$$

Unter Verwendung der beiden grundlegenden Logarithmengesetze (2.30) und (2.31) lassen sich viele weitere Aufgaben lösen. Zum Beispiel klärt sich mit ihnen sofort die Frage, wie der *Logarithmus eines Quotienten* zu berechnen ist:

(2.34) $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x\cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a(y^{-1}) = \log_a x + (-1)\log_a y = \log_a x - \log_a y$$

Der *Logarithmus eines Quotienten* ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Nun wollen wir auch die Frage beantworten, warum es in vielen Fällen nur eine Taste für den *natürlichen* Logarithmus auf den Taschenrechnern gibt.

Was ist zu tun, wenn wir den Logarithmus von 220 zur Basis 7 suchen, also die folgende Frage beantworten müssen: *7 hoch wie viel ist 220*.

Kurze Überschlagsrechnung: 7 hoch 2 ist 49, 7 hoch 3 ist schon 343 – also müsste der gesuchte Logarithmus wohl ungefähr zwischen 2,6 und 2,7 liegen.

Doch was ist zu tun, wenn wir die Zahl genau benötigen?

Dann formulieren wir unsere Aufgabe als Gleichung $x=\log_7 220$, und gehen dann zurück zur Definition des Logarithmus. Wir logarithmieren auf beiden Seiten der Gleichung zur Basis e und erhalten:

(2.35) $$x = \log_7 220 \Leftrightarrow 7^x = 220 \Leftrightarrow \ln(7^x) = \ln 220 \Leftrightarrow x\cdot\ln 7 = \ln 220 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 220}{\ln 7}$$

Die ganz rechts stehenden Werte des natürlichen Logarithmus kann man sich sofort vom Taschenrechner ausgeben lassen, und damit ergibt sich die gesuchte Lösung nach Formel (2.36). Mit unserer Schätzung lagen wir also gar nicht so falsch.

(2.36) $$\log_7 220 = \frac{\ln 220}{\ln 7} = \frac{5{,}3936\ldots}{1{,}9459\ldots} \approx 2{,}77$$

Die hier geschilderte Vorgehensweise kann dann allgemein auch in Form eines weiteren Logarithmengesetzes (2.37) aufgeschrieben werden.

(2.37) $$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

2.2 Gleichungen, Ungleichungen, Beträge

2.2.1 Allgemeines zu Gleichungen

Sechs grundlegende Arten der Umformung dürfen an einer Gleichung vorgenommen werden, ohne sie zu beschädigen:

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert wird.

(2.38) $$a = b \;\Leftrightarrow\; a + c = b + c$$

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten dieselbe Zahl subtrahiert wird.

(2.39) $$a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$$

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn beide Seiten mit derselben Zahl $c \neq 0$ multipliziert werden.

(2.40) $$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn beide Seiten durch dieselbe Zahl $c \neq 0$ dividiert werden.

(2.41) $$a = b,\ c \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Eine Gleichung bleibt erhalten, wenn beide Seiten als Exponenten in einer Potenz (z. B. mit der Basis e) geschrieben werden.

(2.42) $$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

Ist zusätzlich bekannt, dass beide Seiten einer Gleichung *positiv* sind, dann dürfen beide Seiten einer Gleichung *logarithmiert* werden.

(2.43) $$a = b,\ a > 0,\ b > 0 \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

Bis auf die letzten drei Gesetze dürfte das alles nicht neu sein – der Schulstoff enthält ja nicht wenige Aufgaben der folgenden Art, bei denen Gleichungen gelöst werden sollen:

(2.44)
$$\begin{aligned}
7x + 4 &= 3x - 2 && |-4\\
7x &= 3x - 6 && |-3x\\
4x &= -6 && |:4\\
x &= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} = -1{,}5
\end{aligned}$$

Wie aber wird tatsächlich eine Gleichung gelöst ? Korrekt sollte so gesprochen werden:

Die Gleichung wird nacheinander und *immer auf beiden Seiten zugleich* mit einer oder mehreren der *erlaubten Operationen* behandelt mit dem Ziel, dass schließlich die Unbekannte (zumeist trägt sie den Namen x) *allein auf einer Seite* steht.

Hinweis: In Schüler- und Studentenkreisen hält sich hartnäckig das Vokabular von dem *Auf die andere Seite bringen*. Davon sollte sich der Leser dieses Buches ab jetzt verabschieden – diese Sprechweise birgt die große *Gefahr falschen Denkens* in sich!

Ein weiteres Beispiel: Das *Endkapital* K_n nach n Jahren beim *Jahres-Zinssatz* von p Prozent ergibt sich aus dem *Startkapital* K_0 nach der bekannten *Zinseszins-Formel*

(2.45) $$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad .$$

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

Wenn das *Startkapital* K_0 , der *Zinssatz p* und die *Anzahl der Jahre n* vorgegeben sind, bietet diese Formel keine Schwierigkeiten.

Wie aber ist es, wenn nach der *Laufzeit* gefragt wird, um herauszufinden, wann sich ein Startkapital K_0 bis zu einer gewünschten Kapitalhöhe K_n entwickelt hat ?

Dann muss doch diese Gleichung nach n aufgelöst werden. Nach dem *Exponenten*. Mit den oben betrachteten ersten vier einfachen Umformungen, lediglich unter Verwendung der *Grundrechenarten*, wird das nicht möglich sein. Wie muss man hier vorgehen?

Hier hilft Regel (2.43) und wir können erneut den Umgang mit Logarithmen üben, indem wir gleich anfangs *beide Seiten der Gleichung logarithmieren*:

(2.46)
$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^n & &| \ln \\ \ln K_n &= \ln(K_0 \cdot (1+\frac{p}{100})^n) & & \\ \ln K_n &= \ln K_0 + \ln((1+\frac{p}{100})^n) & & \\ \ln K_n &= \ln K_0 + n \cdot \ln(1+\frac{p}{100}) & &| -\ln K_0 \end{aligned}$$

Die Subtraktion von $\ln K_0$ auf beiden Seiten und die anschließende Division beider Seiten durch $\ln(1+p/100)$ führen dann zur gesuchten Lösung:

(2.47)
$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+\frac{p}{100})} = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln(1+\frac{p}{100})}$$

2.2.2 Quadratische Gleichungen

Betrachten wir nun eine spezielle Art von Gleichungen, die verhältnismäßig oft auftritt:

(2.48)
$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

Es handelt sich um die bekannte *quadratische Gleichung*. Zu ihrer Lösung verwendet man die folgende Lösungsformel, gern als *p-q-Formel* bezeichnet:

(2.49)
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Ist der Ausdruck unter der Wurzel, die so genannte *Diskriminante*, positiv, dann gibt es *zwei reelle Lösungen* der quadratischen Gleichung.

Hat die Diskriminante den Wert Null, dann gibt es *eine (doppelt reelle) Lösung*.

Ergibt sich unter der Wurzel ein *negativer Wert*, dann hat die quadratische Gleichung *keine reelle Lösung*.

Bisweilen tritt die quadratische Gleichung auch in folgender Form auf:

(2.50) $$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$$

Durch *Division beider Seiten durch A* kann (2.50) in die Form (2.48) überführt werden. Aber es kann auch mit $p=B/A$ und $q=C/A$ aus (2.49) eine sofort nutzbare zweite *Lösungsformel* abgeleitet werden:

(2.51) $$x_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}} = \frac{1}{2A}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)$$

Die *Diskriminante* (d. h. der Wurzelinhalt) heißt hier $B^2 - 4AC$. Wir werden diese Formel später, bei den *Graphen der Polynome zweiten Grades*, wieder benötigen (siehe Seite 63).

2.2.3 Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge

Eine *Ungleichung* kann in den vier Formen

- linke Seite < rechte Seite
- linke Seite ≤ rechte Seite
- linke Seite > rechte Seite
- linke Seite ≥ rechte Seite

auftreten.

Auch hier besteht zumeist die Aufgabe darin, durch *Operationen*, die *die Ungleichheit nicht zerstören*, jede Ungleichung so umzuformen, dass die enthaltene Unbekannte, zumeist x, allein auf einer Seite steht.

Anders als bei Gleichungen gibt es hier *nur zwei* sofort und *unkritisch* anwendbare *Operationen für Ungleichungen*.

Eine Ungleichung bleibt *unverändert*, wenn auf beiden Seiten derselbe Ausdruck *addiert oder subtrahiert* wird.

(2.52) $$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a + c < b + c \\ a < b &\Leftrightarrow a - c < b - c \end{aligned}$$

Dabei kann c eine *Zahl* oder auch ein beliebiger *Ausdruck* sein.

(2.53) $$\begin{aligned} 7x + 3 &< 6x - 5 \quad | -3 \\ 7x &< 6x - 8 \quad | -6x \\ x &< -8 \end{aligned}$$

Im Unterschied zu einer *Gleichung* erhält man bei einer *Ungleichung* im Allgemeinen keine konkrete Lösung in Form von einer oder mehreren Zahlen, sondern eine so genannte *Lösungsmenge*, d. h. ein oder mehrere *Intervalle reeller Zahlen*.

Die Lösungsmenge wird aber erst erkennbar, wenn die Unbekannte x allein auf einer Seite steht.

Deshalb besteht auch bei einer Ungleichung die grundsätzliche Aufgabe darin, mittels erlaubter Operationen beide Seiten entsprechend umzuformen.

Die Lösungsmenge einer Ungleichung kann sehr gut mit einer *Skizze* beschrieben werden, in der auf dem *Zahlenstrahl* alle Lösungswerte der Ungleichung hervorgehoben werden.

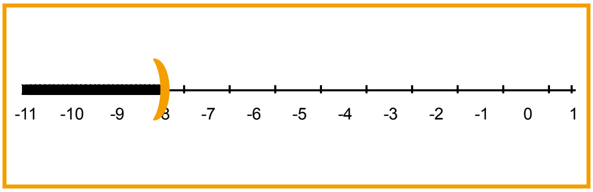

Bild 2.02: Lösungsmenge der Ungleichung (2.53)

Bild 2.02 benutzt dabei die *runde Klammer*, um zu zeigen, dass alle Zahlen links von -8 die Ungleichung erfüllen. Die Zahl -8 selbst gehört aber *nicht mehr zur Lösungsmenge*.

Eine zweite Art der Beschreibung der Lösungsmenge kann mit Hilfe der Intervallschreibweise erfolgen;

(2.54) $$L = (-\infty, -8)$$

Dabei werden *runde Klammern* verwendet, wenn der *Randwert nicht berücksichtigt* werden darf; *eckige Klammern* dagegen würden die Zugehörigkeit des jeweiligen Randwertes zur Lösungsmenge mitteilen.

Eine weitere Art der Beschreibung der Lösungsmenge schließlich besteht in der Verwendung von Symbolen der *Mengenlehre*, wobei $\Re$ die Menge der reellen Zahlen beschreibt:

(2.55) $$L = \{x \in \Re \mid x < -8\}$$

Diese Darstellung wird gelesen als: *Menge aller reellen Zahlen x mit der Eigenschaft* $x < -8$.

Zwischen den *Intervallschreibweisen* und der *Schreibweise der Mengenlehre* besteht folgender Zusammenhang:

(2.56) $$\begin{aligned}(a,b) &= \{x \in \Re \mid a < x < b\}\\ [a,b] &= \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}\end{aligned}$$

2.2.4 Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen

Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer *positiven* Zahl multipliziert, dann bleibt die Ungleichung erhalten:

$$a < b \text{ und } c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

Werden beide Seiten einer Ungleichung mit einer *negativen* Zahl multipliziert, dann *dreht sich das Relationszeichen um*:

$$a < b \text{ und } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

Höchste Aufmerksamkeit und Konzentration ist also erforderlich, wenn *beide Seiten einer Ungleichung multipliziert* werden. Dann ist unbedingt das *Vorzeichen des Multiplikators* zu berücksichtigen:

(2.57)
$$\begin{aligned} 5x - 3 &\le 6x + 5 && |+3 \\ 5x &\le 6x + 8 && |-6x \\ -x &\le 8 && |\cdot(-1) \quad (\leftarrow \text{Faktor ist negativ!}) \\ x &\ge -8 \end{aligned}$$

2.2.5 Ungleichungen – Division durch bekannte Zahlen

Werden beide Seiten einer Ungleichung durch eine *positive Zahl* dividiert, dann bleibt das *Relationszeichen erhalten*:

$$a < b \text{ und } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Werden beide Seiten einer Ungleichung aber durch eine *negative Zahl* dividiert, dann *dreht sich das Relationszeichen um*:

$$a < b \text{ und } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Höchste Aufmerksamkeit und Konzentration sind also nötig, wenn beide Seiten einer Ungleichung *dividiert* werden. Dann ist unbedingt das *Vorzeichen des Divisors* zu berücksichtigen.

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, wann die besondere Aufmerksamkeit nötig ist.

(2.58)
$$\begin{aligned} 7x - 3 &\le 5x + 5 && |+3 \\ 7x &\le 5x + 8 && |-5x \\ 2x &\le 8 && |:2 \quad (\leftarrow \text{positiver Divisor!}) \\ x &\le 4 \end{aligned}$$

(2.59)
$$\begin{aligned} 4x - 3 &\le 6x + 5 && |+3 \\ 4x &\le 6x + 8 && |-6x \\ -2x &\le 8 && |:(-2) \quad (\leftarrow \text{negativer Divisor!}) \\ x &\ge -4 \end{aligned}$$

2.2.6 Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation

Wegen der *Besonderheit bei Multiplikation und Division von Ungleichungen* kommen wir nun, bei einer scheinbar leichten Ungleichungs-Aufgabe, in einen *fast unlösbaren Konflikt*.

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung:

(2.60)
$$\frac{3x + 7}{7 - x} < 4 \qquad .$$

Offensichtlich müssten wir, um die Lösungsmenge erhalten zu können, erst einmal *multiplizieren*. Optimistisch beginnen wir, schreiben rechts neben die Ungleichung den *Faktor*, mit dem wir beide Seiten multiplizieren wollen.

$$\frac{3x+7}{7-x} < 4 \qquad |\cdot(7-x) \tag{2.61}$$

Doch – halt. Da gibt es doch diese kategorische *Regel*, dass *vor* dem Multiplizieren erst einmal festgestellt werden muss, ob der vorgesehene Faktor *positiv* oder *negativ* ist.

Denn bei einem *negativen Faktor* wechselt das Relationszeichen, wie in (2.57) erlebt.

Und nun kommt der scheinbar *unlösbare Konflikt*: Da der Faktor $(7-x)$, mit dem wir multiplizieren müssen, die Unbekannte x enthält, können wir doch *gar nicht wissen*, ob er negativ oder positiv sein wird.

Was tun ? *Multiplizieren* dürfen wir nicht, weil wir *nichts über den Faktor* wissen. *Ohne Multiplikation* können wir aber nicht nach x auflösen und die Lösungsmenge bestimmen.

Versagt hier die Mathematik? Ganz im Gegenteil:

Die Mathematik liefert das Instrumentarium, wie auch in solchen Fällen die *Lösungsmenge der Ungleichung* systematisch bestimmt werden kann.

Es beginnt damit, dass für den Faktor $(7-x)$ eine erste *Annahme* gemacht wird: Nehmen wir *zuerst* an, (7–x) sei *positiv*, d.h. $7-x>0$ (also $x< 7$) (die Null müssen wir natürlich ausschließen, da ein *Nenner niemals Null* werden darf).

Mit dieser *ersten Annahme* haben wir den gordischen Knoten gelöst, denn nun dürfen wir beide Seiten der Ungleichung mit $(7-x)$ multiplizieren und weiter bearbeiten, so dass wir schließlich die Unbekannte x wie angestrebt allein auf der linken Seite vorfinden.

$$\begin{aligned} \frac{3x+7}{7-x} &< 4 && |\cdot(7-x) \text{ gemäß Annahme positiv} \\ 3x+7 &< 28-4x && |-7+4x \\ 7x &< 21 && |:7 \text{ (positiv)} \\ x &< 3 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Allerdings – das so gefundene halboffene Intervall $x<3$ ist noch *nicht die Lösungsmenge*, sondern nur die *Schlussfolgerung aus der gemachten ersten Annahme*.

Beides zusammen, nämlich *Annahme* und *Schlussfolgerung*, liefern uns den *ersten Teil der Lösungsmenge* unserer Ungleichung.

Bild 2.03 zeigt uns die Zusammenhänge.

Nur diejenigen Werte, die *sowohl zur Annahmemenge 1* als auch zur *Schlussfolgerungsmenge 1* gehören, bilden den *ersten Teil der Lösungsmenge*.

Das heißt aber: Die Lösungsmenge eines Falles ist der *Durchschnitt aus Annahmemenge und Schlussfolgerungsmenge* für diesen betrachteten Fall.

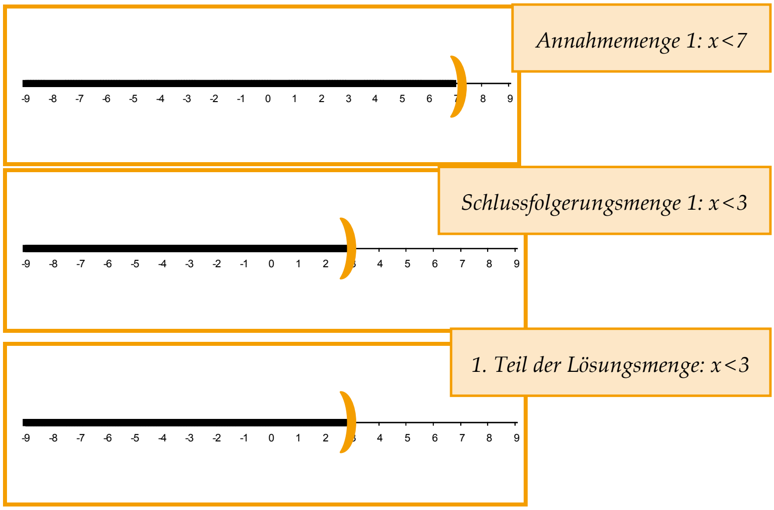

Bild 2.03: Erste Annahme, erste Schlussfolgerung, erster Teil der Lösungsmenge

Was bleibt noch? Ja, die *andere Annahme*: Es kann doch auch sein, dass der Faktor $(7-x)$ *negativ* wäre (also $7-x<0$). Sehen wir uns die Rechnung an, die sich *daraus ergibt*:

$$\frac{3x+7}{7-x} < 4 \qquad |\cdot(7-x) \text{ gemäß Annahme negativ}$$

(2.63)
$$\begin{aligned} 3x+7 &> 28-4x && |-7+4x \\ 7x &> 21 && |:7 \text{ (positiv)} \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Nun wiederholt sich die Situation: Aus der *zweiten Annahme* $x>7$ ergab sich die *zweite Schlussfolgerung* $x>3$. Bild 2.04 zeigt, wie daraus der *zweite Teil der Lösungsmenge* entsteht.

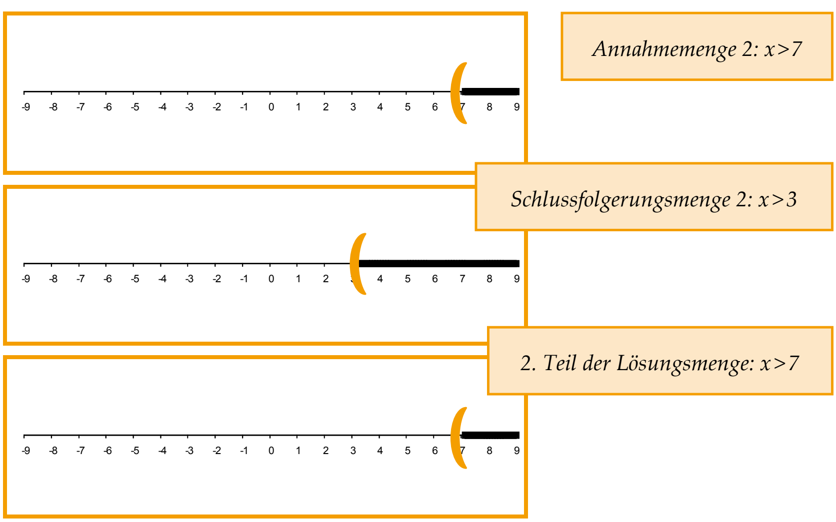

Bild 2.04: Zweite Annahme und Schlussfolgerung, zweiter Teil der Lösungsmenge

Mehr Annahmen sind hier nicht zu machen, die *beiden möglichen Fälle* sind bearbeitet, also können wir zur *Zusammenfassung* kommen.

Bild 2.05 stellt beide Teile der Lösungsmenge zusammen.

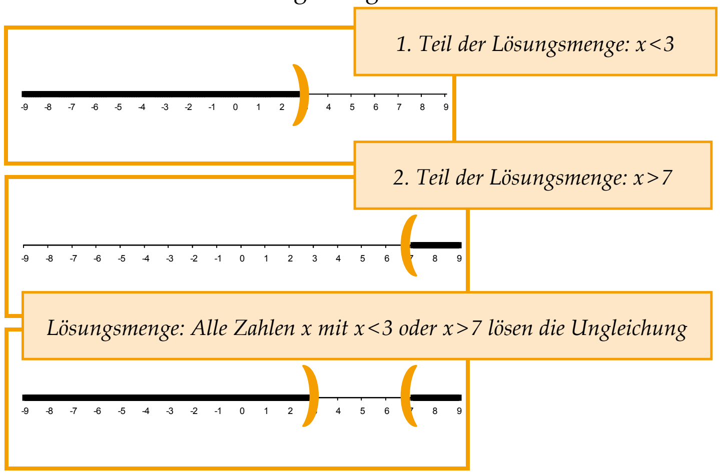

Bild 2.05: Lösungsmenge der Ungleichung

Will man die Lösungsmenge der Ungleichung (2.60) nicht grafisch, sondern in der *Mengenschreibweise* mitteilen, dann ist wie folgt zu formulieren:

(2.64) $$L = \{x \in \Re \mid x < 3 \text{ oder } x > 7\}$$

In der *Intervallschreibweise* muss man zusätzlich das *Vereinigungszeichen* benutzen:

(2.65) $$L = (-\infty, 3) \cup (7, +\infty)$$

Die Gesamtlösungsmenge der Ungleichung ist die *Vereinigungsmenge* aller Lösungsmengen der betrachteten Teilfälle.

Es sei nicht verschwiegen, dass die soeben dargestellte Methode von Annahmen und Schlussfolgerungen *viel Konzentration* erfordert, vor allem dann, wenn es *mehrere Nenner* in einer Ungleichung gibt.

Das folgende Beispiel führt vor, dass bei diesen Fallunterscheidungen, um zu Lösungsmengen von Ungleichungen zu kommen, durchaus interessante Effekte zu beobachten sind.

Denn das Beispiel enthält sowohl (bei den ersten beiden Annahmen) die Situation, dass sich Widersprüche ergeben als auch (bei der dritten Annahme) den Effekt, dass bereits die Annahme sinnlos ist.

Zu bestimmen ist die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

(2.66) $$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+3}{x+1}$$

Beginnen wir mit der *ersten Annahme*, die sich diesmal auf *beide Nenner* beziehen muss, denn es müsste ja *mit beiden Nennern multipliziert* werden.

Nehmen wir im *ersten Fall* an, dass *beide Nenner positiv* seien. Was ergibt sich für diesen Fall ?

$$\begin{aligned}
&A_1:\; x-1>0,\; x+1>0 \Leftrightarrow x>1 \text{ und } x>-1 \;\Rightarrow x>1\\
&\Rightarrow (x+1)(x+1)<(x+3)(x-1)\\
&\Rightarrow x^2+2x+1 \;<\; x^2+2x-3 \quad |-x^2-2x\\
&\Rightarrow \qquad\qquad 1<-3
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Wir erhalten als *erste Schlussfolgerung* die offensichtlich *falsche Aussage 1<-3*. Die zugehörige *Schlussfolgerungsmenge* und damit auch der *erste Teil der Lösungsmenge* sind *leer*.

Nehmen wir nun im *zweiten Fall* an, dass *beide Nenner negativ* seien:

$$\begin{aligned}
&A_2:\; x-1<0,\; x+1<0 \Leftrightarrow x<1 \text{ und } x<-1 \;\Rightarrow x<-1\\
&\Rightarrow (x+1)(x+1)<(x+3)(x-1)\\
&\Rightarrow x^2+2x+1 \;<\; x^2+2x-3 \quad |-x^2-2x\\
&\Rightarrow \qquad\qquad 1<-3
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Wieder erhalten wir als *Schlussfolgerung* dieselbe *falsche Aussage 1<-3*. Die zugehörige Schlussfolgerungsmenge und damit auch der *zweite Teil der Lösungsmenge* sind *leer*.

Nehmen wir nun im dritten Fall an, dass der *erste Nenner positiv* und der *zweite Nenner negativ* sei:

$$A_3:\; x-1>0,\; x+1<0 \Leftrightarrow x>1 \text{ und } x<-1 \tag{2.69}$$

Hier müssen wir sofort feststellen, dass *diese Annahme bereits sinnlos* ist – es kann niemals eine Zahl geben, die *gleichzeitig größer als eins und kleiner als minus eins* ist. An einen *dritten Teil der Lösungsmenge* ist also nicht zu denken.

Versuchen wir es nun mit der *vierten Annahme*, der *linke Nenner* sei *negativ*, der *rechte Nenner* sei *positiv*. Diesmal enthält die Annahme keinen Widerspruch, auch die Schlussfolgerung ist eine wahre Aussage:

$$\begin{aligned}
&A_4:\; x-1<0,\; x+1>0 \Leftrightarrow x<1 \text{ und } x>-1 \Rightarrow -1<x<1\\
&\Rightarrow (x+1)(x+1)>(x+3)(x-1)\\
&\Rightarrow x^2+2x+1 \;>\; x^2+2x-3 \quad |-x^2-2x\\
&\Rightarrow \qquad\qquad 1>-3
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Die Schlussfolgerung für den vierten Fall ist *immer richtig* und enthält kein x. Also besteht die *Schlussfolgerungsmenge dieses Falles* aus *allen reellen Zahlen x zwischen* $-\infty$ *und* $+\infty$. Der *Durchschnitt* aus der *vierten Annahmemenge* $-1<x<1$ und dieser Schlussfolgerungsmenge, das ist also genau die *vierte Annahmemenge*.

Zusammengefasst ergibt sich die *Lösung*:

> Nur die Zahlen x mit $-1<x<1$ lösen die Ungleichung.

2.2.7 Beträge

Steht eine Zahl oder ein Ausdruck zwischen zwei senkrechten Strichen , z.B. $|x|$ oder $|-4|$, so spricht man vom *Betrag von x* bzw. vom *Betrag von - 4*. Was darunter zu verstehen ist, wird durch folgende Definition erklärt:

(2.71) $$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

> Ist der *Inhalt eines Betrages nichtnegativ*, dann können die *senkrechten Betragsstriche* durch *runde Klammern ersetzt* und ggf. weggelassen werden.
>
> Ist der *Inhalt eines Betrages aber negativ*, dann sind die *senkrechten Betragsstriche* zu ersetzen durch *runde Klammern mit einem vorgesetzten Minuszeichen*.

Folglich gilt wegen des nichtnegativen Inhalts $|4+2|=(4+2)=6$, wogegen $|4-6|$ wegen des negativen Inhalts umzuformen ist in $|4-6|=-(4-6)=-(-2)=2$.

Da findet sich auch der landläufige Satz wieder, dass ein Betrag „das Minuszeichen wegnehme“.

2.2.8 Betragsgleichungen und -ungleichungen

Wieder kommen wir zu einem *scheinbaren Konflikt*: Wenn wir zum Beispiel wissen wollen, welche Zahl oder welche Zahlen die Gleichung

(2.72) $$|x-17| = 4$$

erfüllen, dann versagen die Operationen aus Abschnitt 2.2.1, um die Unbekannte x allein auf einer Seite der Gleichung zu erhalten.

> Solange die Betragsstriche nicht beseitigt sind, kann nichts umgeformt werden.

Zur *Beseitigung der Betragsstriche* jedoch muss man wissen, ob der *Betragsinhalt negativ* oder *nichtnegativ* ist. Doch woher soll man das wissen, wenn der Betragsinhalt $x-17$ selbst die Unbekannte x enthält?

Die Frage nach dem weiteren Vorgehen kann in gleicher Weise wie im Abschnitt 2.2.6 beantwortet werden.

> Die Zauberworte lauten: Annahmen und Schlussfolgerungen.

Nehmen wir also *zuerst* an, dass der *Betragsinhalt nichtnegativ* sei: $x-17 \geq 0$. Dann ergibt sich die erste Annahmemenge in der Form $A_1=[17,\infty)$. Nun kann gerechnet werden.

(2.73) $$\begin{aligned} |x-17| &= 4 \quad | A_1: \; x-17 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 17 \\ (x-17) &= 4 \\ x-17 &= 4 \quad |+17 \\ x &= 21 \;\; | S_1: \; x = 21 \\ L_1: x &= 21 \end{aligned}$$

Mit der gemachten *Annahme A_1* konnte der Betrag aufgelöst werden, die *Schlussfolgerungsmenge S_1* liefert diesmal nur die *eine Zahl $x=21$*.

Den *ersten Teil der Lösungsmenge*, der wie bei den Ungleichungen aus allen x-Werten gebildet wird, die *sowohl in der Annahme- als auch in der Schlussfolgerungsmenge* enthalten sind, erhält man hier folglich nur mit dem einzelnen Wert $x=21$.

Es fehlt noch die *Alternativannahme A_2* – der *Betragsinhalt* könnte ja auch *negativ* sein:

$$\begin{aligned} |x-17| &= 4 \qquad | A_2: x-17<0 \Leftrightarrow x<17 \\ -(x-17) &= 4 \\ -x+17 &= 4 \qquad |-17 \\ -x &= -13 \quad |S_2: x=13 \\ L_2: x &= 13 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Zusammengefasst ergeben sich als *Lösung dieser Betragsgleichung* nur die *beiden Zahlen 13 und 21* – und das ist auch verständlich, denn genau diese beiden Zahlen befinden sich im Abstand 4 von der 17.

> Man benutzt die Betragsstriche außerordentlich gern, um Zahlen-Bereiche elegant darzustellen.

Betrachten wir dazu die beiden Formulierungen

- Formulierung 1: Wir betrachten die *Menge aller Zahlen*, die sich auf der Zahlengeraden *entweder links von -1* oder *rechts von 3* befinden.
- Formulierung 2: Wir betrachten die Menge aller Zahlen x, für die gilt $|x-1|>2$.

Entscheiden Sie selbst, liebe Leserin, lieber Leser: Welche Formulierung klingt präziser, ist für Publikationen besser geeignet? Sicher ist das die zweite Formulierung – sofern sie der ersten entspricht. Das aber wollen wir schnell nachrechnen:

$$\begin{aligned} |x-1| &> 2 \qquad | A_1: x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ (x-1) &> 2 \\ x &> 3 \qquad |S_1: x>3 \\ & \qquad\quad \Rightarrow L_1: x>3 \\[1em] |x-1| &> 2 \qquad | A_2: x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \\ -(x-1) &> 2 \\ (x-1) &< -2 \\ x &< -1 \quad |S_2: x<-1 \\ & \qquad\quad \Rightarrow L_2: x<-1 \\[1em] \Rightarrow L = L_1 \cup L_2 &= \{x \in \Re \mid x<-1 \quad \text{oder} \quad x>3\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Mit der eben in (2.75) erlebten *Lösung einer Betragsungleichung* haben wir ein weiteres Mal dieses *Wechselspiel zwischen Annahmen und Schlussfolgerungen*, zwischen den *Teilen der Lösungsmenge* und der schließlichen *Gesamtlösung* erlebt.

Damit ist auch nachgewiesen, dass die elegante Formulierung $|x-1|>2$ in der Tat die Formulierung 1 ersetzen kann.

2.3 Umgang mit dem Summenzeichen

Immer wieder ist festzustellen, dass in einer Mathematik-Vorlesung an Stellen, die scheinbar keine besonderen Schwierigkeiten aufweisen, das Verständnis wegen irgendeiner Kleinigkeit schlagartig verloren geht.

Zu diesen Kleinigkeiten gehört, neben den bereits genannten Themen, auch das Summenzeichen, dieses große griechische Sigma Σ.

2.3.1 Einfache Summen

Schreibt ein Mathematik-Dozent zum Beispiel den Ausdruck

(2.76) $$\sum_{k=1}^{6}(x_k - \bar{x})$$

an die Tafel, dann tritt oft solch ein Effekt ein.

Dabei ist es eigentlich ganz einfach, hier wird nur eine *abkürzende Schreibweise* für eine *längere Summe* verwendet.

Ausgeschrieben sieht der Ausdruck aus (2.76) nämlich viel umständlicher aus:

(2.77) $$\sum_{k=1}^{6}(x_k - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + (x_4 - \bar{x}) + (x_5 - \bar{x}) + (x_6 - \bar{x})$$

Hier zeigt sich aber auch der Nutzen des Summenzeichens: *Man vermeidet lästige Schreibarbeit.*

Wie sollte man vorgehen, um sich mit diesen Summenzeichen anzufreunden?

Als erstes muss aus den Angaben unterhalb und oberhalb des Summenzeichens $\sum$ abgelesen werden, *welche Zahlenwerte* die *Laufvariable* annehmen soll. Die zu durchlaufende Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen beginnt immer mit dem am Summenzeichen $\sum$ unten genannten *Startwert* und endet mit dem oben angegebenen *Endwert*.

(2.78)
$$\sum_{k=0}^{25} \Leftrightarrow k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 23, 24, 25$$
$$\sum_{k=-3}^{3} \Leftrightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$
$$\sum_{k=1}^{n} \Leftrightarrow k = 1, 2, 3,\ \ldots, n$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \Leftrightarrow k = 1, 2, 3, \ldots$$

Während in den oberen beiden Fällen ein ausführliches Aufschreiben der Summe grundsätzlich auch möglich gewesen wäre, wird die *abkürzende Schreibweise* der unteren beiden Beispiele aus (2.78) verwendet, wenn entweder der *konkrete Endwert nicht bekannt* ist, oder wenn die Laufvariable k alle nur möglichen natürlichen Zahlen *bis ins Unendliche* durchlaufen soll.

Letzteres werden wir im Abschnitt 12.5 auf Seite 219 bei den *Reihen* wieder finden.

Ist der Laufbereich geklärt, sollten in Gedanken oder auf einem Blatt Papier die Ausdrücke des Summeninhalts für einige Werte der Laufvariablen aufgeschrieben werden.

Dabei wird ganz formal die Laufvariable k durch die jeweilig anstehende Zahl ersetzt:

(2.79) $$\sum_{k=0}^{5} a_k x^k = ? \qquad \begin{array}{l} k=0:\ a_0x^0 \\ k=1:\ a_1x^1 \\ k=2:\ a_2x^2 \\ \quad\ldots \\ k=5:\ a_5x^5 \end{array}$$

Es ist kein Zeichen von Schwäche, wenn man so vorgeht. Vielmehr schafft man sich die Voraussetzung, durch nachfolgendes Aufsummieren ein Gefühl für die besprochene Summe zu bekommen.

Danach wird genau hingesehen, die Exponenten 0 und 1 können weggelassen werden. Außerdem ist es üblich, derartige Summen *nach fallenden x - Potenzen* zu ordnen:

(2.80) $$\begin{array}{cccccc} a_0x^0 & & & & & \\ & a_1x^1 & & & & \\ & & a_2x^2 & & & \\ & & & \ldots & & \\ & & & & & a_5x^5 \\ \hline a_0x^0 & +\,a_1x^1 & +\,a_2x^2 & +\,a_3x^3 & +\,a_4x^4 & +\,a_5x^5 \end{array}$$

(2.81) $$\sum_{k=0}^{5} a_k x^k = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Solche Ausdrücke werden uns als *Polynome* bald wieder (schon auf Seite 59) begegnen.

Sehen wir uns noch einige Beispiele dafür an, wie *mit Hilfe des Summenzeichens* zu *verkürzter und mathematisch eleganter Schreibweise* übergegangen werden kann.

(2.82) $$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(2.83) $$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

(2.84) $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^n = -1+1-1+- \ldots + (-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(2.85) $$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-mal} = n$$

2.3.2 Rechenregeln für einfache Summen

Es ist bekannt: Findet sich in allen Gliedern einer Summe oder Differenz derselbe Faktor, dann kann man ihn *ausklammern*.

Das lässt sich natürlich auch anwenden, wenn das *Summenzeichen* verwendet wird:

(2.86) $$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Summanden dürfen beliebig vertauscht werden, eine endliche Summe ist bekanntlich unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.

Das führt uns zur *zweiten Regel für den Umgang mit dem Summenzeichen*:

(2.87) $$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Zusammengefasst ergibt sich dann das so genannte *Distributivgesetz für Summen*:

(2.88) $$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2.3.3 Doppelsummen

Einen besonders großen *Einsparungseffekt an Schreibarbeit* erzielt man durch Verwendung von *Doppelsummen*, falls der *Umgang mit doppelt indizierten Symbolen* (zum Beispiel a_{ij}) zu beschreiben ist:

(2.89) $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im}) = \\ (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m}) \\ + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2m}) \\ + \quad \ldots \\ + (a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}) \end{aligned}$$

Das Vorgehen zur Auflösung einer solchen Doppelsumme ist in (2.89) ausführlich beschrieben:

- Zuerst wird die *innere Summe* mit dem *Laufindex j* ausgewertet, der *Laufindex i* der *äußeren Summe* bleibt dabei allgemein stehen, ebenso das *äußere Summenzeichen*.
- Anschließend durchläuft der *Laufindex i* der *äußeren Summe* seinen Laufbereich.

Manchmal hängt der Laufbereich der inneren Summe sogar vom Laufindex der äußeren Summe ab – Programmierer von so genannten *Zählschleifen* können ein Lied von der Kompliziertheit der gedanklichen Umsetzung solch abhängiger Doppelsummen singen:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + \ldots + a_{ii}) =$$

$$(2.90)\qquad \begin{array}{l} a_{11} \\ + a_{21} + a_{22} \\ + \qquad\quad \ldots \\ + a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} \end{array}$$

Da die innere Summe von Mal zu Mal um einen Summanden zunimmt, entwickelt sich die ausgeschriebene Doppelsumme dann rein optisch zu einer so genannten Dreiecksform.

2.3.4 Rechenregeln für Doppelsummen

Wenn der Fall (2.89) vorliegt, d. h. wenn der *Laufbereich der inneren Summe* nicht vom *Laufindex der äußeren Summe* abhängt, dann dürfen die *Summenzeichen vertauscht* werden:

$$(2.91)\qquad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{im}) \\ &= (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2m}) + \ldots + (a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}) \\ &= (a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + (a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots + (a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{nm}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \end{aligned}$$

Zur Vertiefung empfehlen wir die Kapitel A2 bis A4 des Übungsbuches [41]

http://www.springer.com/978-3-658-06205-7

Mathematik für BWL-Bachelor
Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen
Matthäus, H.; Matthäus, W.-G.
2015, XIX, 500 S. 292 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-06205-7