

2 Algebra

Algebra ist eine Teildisziplin der Mathematik, die aus dem Lösen von Gleichungen und der Erforschung sowie der Verallgemeinerung der Rechenoperationen entstand. Ein gewisser Zusammenhang (oft aus der realen Welt) wurde in einer Gleichung mit einer Unbekannten x formuliert und schließlich nach dieser zwecks Lösung durch *Äquivalenzumformungen* (natürlich hießen diese nicht immer so) umgeformt. Gehen wir einmal von der folgenden bäuerlich-ökonomischen Situation aus: Gustav hat 82 Rinder, Heinrich hat 50. Wir benötigen aber 200 Rinder und Balthasar ist gerade unterwegs zum Viehmarkt. Wie viele muss er also kaufen?

$$200 = 82 + 50 + x$$

$$\Leftrightarrow x = 68,$$

was heißt, dass Balthasar 68 Rinder mitbringen sollte.

Das Wort „Algebra“ stammt aus der arabischen Sprache („al-jabr“) und bedeutet von seinem Ursprung her etwa „ausgleichen“ oder „gegenüberstellen“, womit beispielsweise das Hinzudaddieren oder Subtrahieren auf beiden Seiten einer Gleichung gemeint ist (vgl. STILLWELL 2010 [62], S. 88). Eine Theorie, warum „ x “ heute das populärste Symbol für eine Unbekannte ist, wird ebenfalls auf die arabische Sprache zurückgeführt: Zu Beginn der Mathematik waren alle Texte ausschließlich in Fließtext formuliert. Zu dieser Zeit nutzte insbesondere al-Chwarizmi, den wir bereits kennen, das arabische Wort „shai“, welches ungefähr Ding bedeutet, um auf etwas Unbekanntes zu referieren. Vermutlich wurde dies später als „ xei “ notiert, bis man schließlich nur noch den Anfangsbuchstaben „ x “ nutzte, um etwas Unbekanntes zu bezeichnen (vgl. FAROUKI 2008 [27], S. 25). Durch die Reihenfolge des Alphabets hat sich dann der unmittelbare Nachbar als ebenfalls sehr beliebt erwiesen:



Abb. 2.1: Gustavs, Heinrichs und Balthasars Bauernhof, eigentlich aber ein Gemälde von Edward Hicks. Bild: Wikimedia Commons, gemeinfrei

“

I'm still not very good at algebra. . . I just can't figure out y .

”

– Unbekannt

In der modernen Algebra gibt es erstaunenswert simpel anmutende Probleme, die aber u.U. extrem schwer zu beweisen sind. Betrachten wir etwa die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die Frage ist nun, für welche Exponenten n es natürliche Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}$ gibt, so dass diese Gleichung erfüllt ist. Für $n = 1$ ist die Sache klar, z.B. gilt $1^1 + 1^1 = 2^1$. Für $n = 2$ finden wir auch noch nach etwas Überlegen eine Lösung: Hier gilt beispielsweise $3^2 + 4^2 = 5^2$. Im Fall $n = 3$ wird die Sache – optimistisch gesprochen – etwas komplizierter. Tatsächlich beschäftigte die Suche nach Lösungen dieser Gleichung bzw. die Suche nach einem Beweis,

dass es solche nicht geben kann, für Exponenten $n > 2$ die mathematische Gemeinde über Jahrhunderte: Es handelt sich um den *Großen Fermatschen¹ Satz* oder auf Englisch *Fermat's Last Theorem*:

Satz 2.0.1 (Großer Fermatscher Satz): Die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

hat für $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ keine Lösung.

Im 17. Jahrhundert schrieb Fermat an den Rand neben das Problem 8 seiner Ausgabe der *Arithmetica* des Diophantos von Alexandria² (z.B. HEATH 1910 [35], engl.) den oben formulierten Satz. Bezüglich des ausstehenden Beweises konnte man hier lediglich lesen:

“

Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis,
doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.

”

– Pierre de Fermat
(s. SINGH 1998 [60], S. 87)

Im Kontext dessen, dass Heerscharen von Mathematikern sich über 300 Jahre an diesem „wahrhaft wunderbaren Beweis“ die Zähne ausgebissen haben, klingt dies fast arrogant. Erst 1994 gelang es Wiles³ schließlich den Großen Fermatschen Satz zu beweisen. Bei dem Beweis, welcher ohne Anhang und Literaturverzeichnis 98 Seiten Länge aufweist (vgl. WILES 1995 [66]), handelt es sich sicher nicht um jenen, welchen Fermat geführt haben will – falls dieser nicht überhaupt gelogen hat.

Natürlich werden wir uns nicht derartigen Problemen zuwenden. Unsere Mathematik wird im Vergleich zu Sphären, in denen die Produktion eines korrekten Beweises 98 Seiten und über 300 Jahre benötigt, erschreckend simpel sein. Wir beginnen mit den wundervollen *linearen Gleichungssystemen*:

2.1 Lineare Gleichungssysteme

2.1.1 Grundlegendes

In obiger Einführung haben wir bereits erste Gleichungen gesehen. Bereits aus Schulzeiten wissen wir, dass es auch Situationen gibt, in welchen eine einzige Gleichung nicht ausreichend ist, um einen Sachverhalt zu modellieren. In diesem Fall benötigen wir ein *System* von Gleichungen. Wir steigen also direkt richtig ein und wollen uns nicht mit einzelnen Gleichungen beschäftigen, sondern gehen von n Gleichungen mit m Unbekannten aus.

Wir beschränken uns jedoch auf *potenzfreie* Unbekannte. Das bedeutet, dass etwas der Art x^2 , $\sqrt{x}$ o.Ä. genauso wenig auftreten soll wie xy oder xy^2 . Dies formalisieren wir mit folgender Definition:

¹Pierre de Fermat (*1607; †1665), französischer Mathematiker

²Diophantos von Alexandria (zwischen -100 und 350), griechischer Mathematiker und vermutlich bedeutendster Algebraiker der Antiker

³Andrew Wiles (*1953), britischer Mathematiker

Definition 2.1.1 (Lineares Gleichungssystem): Ein System linearer Gleichungen (d.h. potenzfreier Gleichungen) der Art

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + & \cdots & + a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + & \cdots & + a_{2,m}x_m & = & b_2 \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + & \cdots & + a_{n,m}x_m & = & b_n \end{array}$$

heißt *lineares Gleichungssystem* (kurz *LGS*) aus n Gleichungen (auch *Zeilen*) mit je m Unbekannten $x_1, \dots, x_m$. Die Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) heißen *Koeffizienten* des Gleichungssystems. Alle übereinanderstehenden, d.h. zur gleichen Unbekannten gehörenden Koeffizienten, nennen wir auch – je nach Unbekannter x_j – j -te Spalte. Die Zahlen $a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{n,2}$ wären also beispielsweise hier die zweite Spalte. Die Zahlen $b_1, \dots, b_n$ heißen zusammen *rechte Seite* des linearen Gleichungssystems.

Beispiel 2.1.2: Das folgende LGS besteht aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Es gilt also $n = m = 3$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ x_1 & -4x_2 & & = & -1 \end{array}$$

Koeffizienten, welche gleich 0 sind, sorgen dafür, dass in der entsprechenden Zeile diese Variable vollständig entfällt. Wenn Koeffizienten gleich 1 sind, ist es nicht notwendig diese auszuschreiben.

Natürlich werden uns LGS nicht immer so ordentlich wie oben auf dem Silbertablett präsentiert werden. Oft müssen Unbekannte zusammengefasst und in der Reihenfolge sortiert werden, um die allgemeine Form zu erhalten, die wir in Definition 2.1.1 eingeführt haben.

Definition 2.1.3 (Lösungsmenge): Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems ist die Menge aller m -Tupel $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, für welche das lineare Gleichungssystem eine wahre Aussage liefert. Dabei müssen natürlich alle Gleichungen, d.h. alle Zeilen des Systems, gleichzeitig erfüllt sein.

Bemerkung 2.1.4: Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems können folgende Situationen eintreten:

- Das LGS hat keine Lösung, d.h. $|\mathbb{L}| = 0$ bzw. $\mathbb{L} = \emptyset$.
- Das LGS hat genau eine Lösung, d.h. $|\mathbb{L}| = 1$.
- Das LGS hat unendlich viele Lösungen, d.h. $|\mathbb{L}| = \infty$.

Definition 2.1.5: Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen (= Anzahl der Zeilen) und m Unbekannten (= Anzahl der Spalten) heißt

- *überbestimmt*, falls $n > m$ gilt,
- *unterbestimmt*, falls $n < m$ gilt.

Die Definition richtet sich also danach, ob das LGS mehr Gleichungen als Unbekannte hat oder umgekehrt.

2.1.2 Anwendungen

Lineare Gleichungssysteme spielen eine sehr wichtige Rolle in der Wissenschaft und der Industrie. Hier bewegen sich die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten allerdings in einer anderen Größenordnung: Schnell erreichen solche Gleichungssysteme 10000 und mehr Unbekannte.

Diverse Problemstellungen werden immer wieder auf lineare Gleichungssysteme zurückgeführt, etwa die Simulation eines Autos im virtuellen Windkanal, eine Strömungssimulation für eine künstliche Herzklappe oder die Simulation von plattentektonischen Aktivitäten an der Erdoberfläche.

Zum schnellen Lösen solcher Gleichungssysteme werden oft Supercomputer herangezogen, gerade dann, wenn das Lösen eine zeitkritische Aufgabe ist, etwa bei einer Tsunamisimulation. Einer der größten Supercomputer der Welt ist etwa der Titan am Oak Ridge National Laboratory in Tennessee in den Vereinigten Staaten (s. Abbildung 2.2). Ein großer Teil dieses Rechners wurde nebenbei bemerkt maßgeblich von der NSA finanziert (vgl. BAMFORD 2012 [6], S. 124).

Welcher Supercomputer gerade der Schnellste – und energetisch Gefräßigste – ist, kann der TOP500-Liste⁴ der Supercomputer entnommen werden.



Abb. 2.2: Der Supercomputer Titan des Oak Ridge National Laboratory in Tennessee (USA) war von November 2012 bis Juni 2013 mit 17,59 PetaFLOPS (= 17,59 Milliarden Multiplikationen oder Additionen in der Sekunde) der schnellste Computer der Welt. Abgelöst wurde er vom Tianhe-2 in China mit 33,86 PetaFLOPS, allerdings gibt es von diesem nicht so ein hübsches Bild (vgl. TOP500-Liste). Bild: Courtesy of Oak Ridge National Laboratory, U.S. Dept. of Energy

2.1.3 Lösungsverfahren

Wir haben nun LGS eingeführt und wissen bisher nur, dass es sie gibt. Wie aber gelangt man eigentlich systematisch an eine Lösung bzw. die gesamte Lösungsmenge? Genau darauf werden wir nun hinarbeiten.

Dabei sei bemerkt, dass wir zunächst auf matrixbasierte Schreibweisen verzichten, schließlich haben wir diese noch nicht eingeführt. Wir greifen aber, um eine angenehm kompakte Schreibweise zu ermöglichen, auf den Begriff des *Tableaus* zurück, was im Grunde nichts anderes ist. Der formale Unterschied liegt lediglich darin, dass unsere Tableaus nicht mit einem zugehörigen Rechenkalkül vernetzt sind. Notationen für lineare Gleichungssysteme und deren Lösung, welche auf Matrizen basieren, führen wir dann in Abschnitt 2.5.3 ein.

⁴<http://www.top500.org/>

Definition 2.1.6 (Elementare Zeilenumformungen): Sog. *elementare Zeilenumformungen* beeinflussen die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht. Unter diesen verstehen wir

- das Addieren einer Zeile des LGS auf eine andere,
- das Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0 (auch *Skalieren*),
- das Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0 und anschließendes Addieren dieser Zeile auf eine andere, also die Kombination der ersten beiden Punkte sowie
- den Austausch zweier Zeilen des LGS.

Definition 2.1.7 (Diagonale eines LGS): Die *Diagonale* eines linearen Gleichungssystems sind die Koeffizienten der Unbekannten x_1 in der ersten Zeile, der Unbekannten x_2 in der zweiten Zeile, $\dots$, der Unbekannten x_n in der n -ten Zeile. Man beachte, dass diese Aufzählung nur bis n (Anzahl der Zeilen) reicht, die Koeffizienten der Unbekannten $x_{n+1}, \dots, x_m$ also unerheblich sind. Wenn wir von Koeffizienten *oberhalb* der Diagonalen sprechen, meinen wir alle Koeffizienten von Unbekannten, welche sich in den jeweiligen Zeilen rechts von jenen der Diagonale befinden.

Beispiel 2.1.8: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrr} \boxed{2}x_1 & +3x_2 & -1x_3 & +6x_4 & -4x_5 & = 1 \\ -4x_1 & +\boxed{8}x_2 & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & \boxed{-7}x_3 & +2x_4 & -12x_5 & = 1 \end{array}$$

Die Diagonale dieses linearen Gleichungssystems ist hier in den Kästchen dargestellt. Es handelt sich also um die Werte 2, 8, -7 . Koeffizienten der Unbekannten x_4 und x_5 gehören hier also nicht dazu. Die Gesamtheit aller Koeffizienten rechts der Diagonalkoeffizienten in den jeweiligen Zeilen ist nun mit „oberhalb der Diagonalen“ gemeint.

Warnung: Mit der Diagonalen bezeichnen wir also nur die entsprechenden Koeffizienten, nicht die Unbekannten selbst.

Viele Autoren definieren die Diagonale eines LGS (oder später einer Matrix) nur für den quadratischen Fall, d.h. wenn es genau so viele Unbekannte wie Gleichungen gibt (in Definition 2.1.1 also $n = m$ gilt).

Satz 2.1.9: Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen kann jedes lineare Gleichungssystem in die sog. *Zeilenstufenform* überführt werden. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass nur oberhalb der Gleichungssystemdiagonalen sowie auf dieser selbst Einträge ungleich 0 vorhanden sind und keine Gleichung mehr durch weitere elementare Zeilenumformungen zu einer Nullzeile eliminiert werden kann.

Aufbauend auf den eingeführten elementaren Zeilenumformungen und dem Wissen, dass diese die Lösungsmenge des LGS nicht beeinträchtigen, kann man ein Verfahren konstruieren, welches jedes LGS derart umformt, dass die Lösungsmenge erkennbar wird. Es handelt sich um den sog. *Gauß-Algorithmus*.

Es gestaltet sich als äußerst unangenehm, den Gauß-Algorithmus in allgemeiner Form einzuführen, da dies zwangsweise in einer unverständlichen „Indexschlacht“ resultiert. Daher bedienen wir uns verschiedener Beispiele und erklären viel. Zunächst führen wir aber noch eine kurzfassende Schreibweise ein.

Definition 2.1.10 (Gauß-Tableau): Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem auch abkürzend in einem sog. *Gauß-Tableau*, welches wir später auch *erweiterte Koeffizientenmatrix* nennen werden. Dabei würde das allgemeine lineare Gleichungssystem aus Definition 2.1.1 dargestellt als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right).$$

Beispiel 2.1.11: Das Tableau aus Beispiel 2.1.8 würde beispielsweise so aussehen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -7 & 2 & -12 & 1 \end{array} \right).$$

Bemerkung 2.1.12: Es gibt auch einige elementare Spaltenumformungen, die die Lösungsmenge des LGS nicht beeinflussen. Z.B. ist das Vertauschen zweier Spalten erlaubt. Da dies aber das Risiko birgt, dass beim anschließenden Rückübersetzen in das ursprüngliche LGS vergessen wird, auch die Reihenfolge der Unbekannten entsprechend zu behandeln, und es nicht notwendig ist (man kann alles auch mit Zeilenumformungen erledigen), gehen wir hier nicht weiter auf diese Möglichkeit ein.

Beispiel 2.1.13 (Gauß-Algorithmus): Wir bringen mit Hilfe des sog. *Gauß-Algorithmus* ein LGS in Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Wir betrachten das LGS auf der linken Seite. Unser erstes Ziel ist es, unterhalb des obersten Eintrages in der ersten Spalte jeweils eine 0 zu generieren. Dafür dürfen wir elementare Zeilenumformungen verwenden.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile (im Kopf) mit $-\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$. Dies hat zum Resultat, dass sich die zu Beginn der ersten Zeile stehende 2 in eine -1 bzw. 1 abändert, welche nun die am Anfang der zweiten Zeile stehende 1 bzw. am Anfang der dritten Zeile stehende -1 bei Addition der entsprechend multiplizierten ersten Zeile zu einer 0 aufhebt.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 7/2 & 5/2 & 5/2 \end{array} \right) \xleftarrow{+}$$

Da die erste Spalte – bis auf die erste Zeile – nun nur noch Nullen enthält, versuchen wir nach dem gleichen Prinzip Vielfache der zweiten Zeile zu nutzen, um unterhalb des zweiten Eintrags der zweiten Spalte alle Werte zu eliminieren. Dies ist hier nur der Bruch $7/2$. Dazu multiplizieren wir wieder im Kopf die zweite Zeile mit 7 und addieren.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \end{array} \right)$$

Es entsteht wie gewünscht eine 0. Insgesamt haben wir nun die bereits definierte Zeilenstufenform (Satz 2.1.9) erreicht: Nur noch auf und oberhalb der Diagonalen stehen Einträge ungleich 0.

Beispiel 2.1.14 (Auflösen der Zeilenstufenform): Bisher haben wir mit Hilfe des Gauß-Algorithmus das gegebene LGS in die Zeilenstufenform überführt. Diese wollen wir nun auflösen, um die eigentliche Lösung bzw. Lösungsmenge zu erhalten. Dazu besinnen wir uns zunächst darauf zurück, welches LGS das zuletzt gezeigte Gauß-Tableau in Beispiel 2.1.13 repräsentiert:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & -\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & = & -\frac{3}{2} \\ & & 6x_3 & = & -8 \end{array}$$

Den Vorteil der Zeilenstufenform erkennt man nun spätestens: Die letzte Zeile lässt sich direkt zu x_3 freistellen: Hier folgt, dass

$$x_3 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

ist. Durch Einsetzen dieser Information in die zweite Zeile erhalten wir

$$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}$$

und dadurch schließlich

$$x_2 = -2\left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) = -2\left(-\frac{9}{6} + \frac{4}{6}\right) = -2\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}.$$

Zu guter Letzt fehlt uns noch ein Wert für x_1 . Dazu betrachten wir die erste Zeile des LGS und setzen ein:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_1 + 3 \cdot \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = 2x_1 + \frac{7}{2} = 1.$$

Durch Freistellen zu x_1 folgt schließlich

$$x_1 = -\frac{5}{4}.$$

Das von uns hier angewendete Vorgehen, aus der Zeilenstufenform auf die Lösung des LGS zu schließen, nennt man auch *Rückwärtseinsetzen*.

Es hat sich also gezeigt, dass das gegebene Gleichungssystem unter die Kategorie der eindeutig lösbaren fällt, da wir für jede unbekannte nur genau eine Lösung erhalten haben. Insgesamt lautet die Lösungsmenge somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bemerkung 2.1.15 (Matrix): Wir haben nun bereits implizit mit einer sog. *Matrix* gearbeitet, nämlich mit der Spezialform des Gauß-Tableaus. Formal werden wir Matrizen jedoch erst in Kapitel 2.5 einführen. Dennoch wird der Begriff der „Matrix“ in den nun folgenden Definitionen enthalten sein – schlicht aus dem Grund, damit wir die Definitionen nicht später umbenennen müssen und jetzt vorerst gar Phantasienamen benutzen. Wem eine Matrix noch überhaupt nichts sagt, der sollte sich daher an dieser Stelle nicht verunsichern lassen. Es ist nicht notwendig etwas über Matrizen zu wissen.

Definition 2.1.16 (Rang eines LGS): Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem, von welchem wir annehmen, dass dieses bereits mittels elementarer Zeilenumformungen in die Zeilenstufenform überführt wurde. Dann heißt

- die Anzahl der Zeilen, welche **ohne** Berücksichtigung der rechten Seite nicht vollständig gleich 0 sind, *Rang* des linearen Gleichungssystems,
- die Anzahl der Zeilen, welche **mit** Berücksichtigung der rechten Seite nicht vollständig gleich 0 sind, *Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix* oder *erweiterter Rang* des linearen Gleichungssystems.

Für beide Werte gilt offenbar, dass diese nicht größer werden können als die Anzahl der Zeilen des LGS insgesamt. Wenn ein LGS einen bestimmten Rang hat, so auch alle zu diesem System äquivalente LGS, insbesondere jenes, von welchem die Zeilenstufenform abgeleitet wurde. Hierbei handelt es sich um eine Konvention, nicht um einen Satz.

Beispiel 2.1.17: Wir betrachten einige LGS, die sich bereits in Zeilenstufenform befinden.

$$(a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$(c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$(d) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Für die gezeigten Systeme gilt nun:

LGS	Rang	erweiterter Rang
(a)	2	2
(b)	2	3
(c)	2	2
(d)	3	3

Man kann sich schnell erklären, dass der Rang eines LGS immer kleiner gleich dem erweiterten Rang desselben LGS sein muss, da beim letzteren Begriff ja mehr potentielle Werte ungleich 0 hinzukommen.

Satz 2.1.18 (Lösbarkeitskriterien für LGS): Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten. Dann gilt für die Lösbarkeit dieses LGS:

- Das LGS ist genau dann lösbar, d.h. $\mathbb{L} \neq \emptyset$, wenn der Rang des LGS gleich dem erweiterten Rang ist.
 - Entspricht der Rang zusätzlich der Anzahl der Unbekannten m , so ist das LGS eindeutig lösbar.
 - Ist der Rang kleiner als die Anzahl der Unbekannten m , so hat das LGS unendlich viele Lösungen.
- Das LGS ist genau dann unlösbar, d.h. $\mathbb{L} = \emptyset$, wenn der Rang des LGS kleiner ist als der erweiterte Rang.

Wir verzichten auf die Angabe eines formal korrekten Beweises des obigen Satzes, werden aber gleich anhand von Beispielen die Gelegenheit haben uns klarzumachen, warum er gilt.

Beispiel 2.1.19: Wir betrachten erneut die LGS (b) und (c) aus Beispiel 2.1.17.

(b) Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

hat – wie bereits in der abgebildeten Tabelle gezeigt – den Rang 2, aber den erweiterten Rang 3. In Satz 2.1.18 gilt also der zweite Spiegelpunkt, da natürlich $2 \neq 3$ gilt und das LGS somit keine Lösung hat. Übersetzen wir die dritte Zeile zurück aus dem Gauß-Tableau, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 1, \end{aligned}$$

was natürlich einen Widerspruch darstellt. Und natürlich ist es auch bei LGS so, dass aus einem Widerspruch eine leere Lösungsmenge $\mathbb{L} = \emptyset$ folgt.

(c) Sowohl der Rang als auch der erweiterte Rang des LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

hat den Wert 2. Nach Satz 2.1.18 hat das LGS nun unendlich viele Lösungen, da für beide Rangbegriffe Gleichheit gilt und zudem 2 kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten (nämlich 3). In diesem Fall kann eine Unbekannte frei gewählt werden; sie kann also jede beliebige reelle Zahl annehmen. Es bietet sich an, immer die Variable frei zu wählen, deren Koeffizient in der Zeilenstufenform am Ende einer „verlängerten Stufe“ steht. In unserem Beispiel handelt es sich hierbei um die 3 in der zweiten Zeile und dritten Spalte. D.h. wir werden x_3 frei wählen und schreiben $x_3 := \lambda \in \mathbb{R}$. Übersetzen wir nun die Zeilen des Tableaus in das eigentliche LGS (hierbei ignorieren wir die Nullzeile(n)), erhalten wir

$$2x_2 + 3x_3 = 2x_2 + 3\lambda = 1$$

und hieraus

$$x_2 = \frac{1 - 3\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda.$$

Eingesetzt in die erste Zeile ergibt sich mit Hilfe unseres bisherigen Wissens

$$x_1 = 4 - 5x_2 - 3x_3 = 4 - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda\right) - 3\lambda = 4 - 5 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{2}\lambda - 3\lambda = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\lambda.$$

Insgesamt haben wir nun alle Unbekannten in Abhängigkeit einer frei wählbaren Variable $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmt und können die Lösungsmenge, welche unendlich viele Elemente enthält, angeben als

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\lambda, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Im Falle eines LGS mit unendlich vielen Lösungen, gibt der folgende Satz einen Anhaltspunkt dafür, wie viele Unbekannte frei gewählt werden dürfen, d.h. so wie in Beispiel 2.1.17 mit „griechischen Buchstaben belegt“ werden dürfen.

Satz 2.1.20: Sollte ein LGS unendlich viele Lösungen aufweisen, entspricht die Anzahl der frei wählbaren Unbekannten der Differenz zwischen der gesamten Anzahl der Unbekannten und dem Rang des LGS.

In Beispiel 2.1.17 (c) ist dies deutlich geworden: Das LGS hatte Rang 2 und wies insgesamt drei Unbekannte auf. Daher hatten wir die Möglichkeit $3 - 2 = 1$ Unbekannte frei zu wählen.

Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende
Mathematisches Grundwissen für den Einstieg ins
Studium als Nicht-Mathematiker

Klinger, M.

2015, XIII, 189 S. 60 Abb., 12 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-06595-9