

Erläuternde Musterlösungen zum Buch „Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende“

Marcel Klinger

ISBN 978-3-658-06595-9, DOI 10.1007/978-3-658-06596-6

Stand: 06.07.2020

Vorbemerkung

Wenn du die Aufgaben des Buches bearbeitest, bedenke, dass es oft (für schulische Verhältnisse) recht lange dauern kann, bis man eine Aufgabe löst. Versuche also etwas frustations-toleranter zu sein als du es in der Schule sein musstest. Schau am besten nicht gleich in die Lösungen, sondern denke länger über die Aufgabe nach und mache ggfs. eine Pause. Oft arbeitet man an einer Aufgabe länger ohne Stift und Papier als am eigentlichen Aufschreiben bzw. Rechnen. D.h. Die Idee zur Lösung und die Entwicklung der damit verbundenen Problemlösekompetenz stellt meist einen deutlich wichtigeren und umfangreicheren Aspekt an einer Lösungsentwicklung dar als es die Durchführung des eigentlichen Lösungsprozesses, d.h. z.B. das Ausrechnen, tut.

Da sich der Stoff erfahrungsgemäß besser festigt, wenn man eigene Entdeckungen und Überlegungen anstellt, ist in jedem Fall davon abzuraten, die Lösungen einfach nur durchzulesen. Versuche die Aufgaben zunächst mit eigener Kreativität zu lösen. Solltest du auch nach längerer Zeit nicht weiterkommen, kannst du dir hier Anregungen holen.

Prinzipiell wurde versucht, möglichst einfache Lösungswege zu gehen, statt unnötig kompliziert auszuschweifen. Natürlich war dies aber auch nicht immer möglich. Du solltest stets im Hinterkopf behalten, dass Matheaufgaben in den seltensten Fällen nur genau einen Lösungsweg haben. I.d.R. gibt es mehrere, vielleicht sogar sehr unterschiedliche Lösungsvarianten, die alle gleichermaßen ihre Berechtigung haben. Denke daran insbesondere, wenn du deine eigenen Bearbeitungen mit meinen vergleichst.

Trotz größter Sorgfalt ist natürlich auch nicht auszuschließen, dass diese Musterlösung selbst Fehler enthält. Solltest du solchen auf der Schliche sein, freue ich mich über einen kurzen Hinweis per E-Mail: marcel.klinger@uni-due.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Aussagen	3
1.2	Mengen	4
1.3	Zahlen	5
1.4	Rechenregeln und Notationen	7
1.5	Beweise	7
1.6	Abbildungen	9
2	Algebra	12
2.1	Lineare Gleichungssysteme	12
2.2	Gruppen	12
2.3	Körper	13
2.4	Vektorräume	15
2.5	Matrizen	17
3	Analysis	19
3.1	Grenzwerte	19
3.2	Nullstellen	20
3.3	Stetigkeit	21
3.4	Differenzierbarkeit	21
3.5	Weitere Eigenschaften von Funktionen	22
3.6	Besondere reelle Funktionen	24
3.7	Integrale	25

1 Grundlagen

1.1 Aussagen

Aufgabe 1: Bei Teil (a) und (b) handelt es sich jeweils um Aussagen, schließlich erscheint es hier sinnvoll, nach dem entsprechenden Wahrheitswert zu fragen. Dabei ist der tatsächliche Wahrheitswert aber gleichgültig (also, ob die Aussage wahr oder falsch ist). Bei den Teilen (c) und (d) handelt es sich umgekehrt nicht um Aussagen: „Ist fünf Tassen Tee wahr oder falsch?“ würde man nicht fragen. Ähnlich gilt dies für den mathematischeren Ausdruck in (d), bei diesem handelt es sich lediglich um einen Term, nicht aber um eine Aussage. Bei den Teilen (e) und (f) handelt es sich wiederum um Aussagen, beide sind jedoch falsch.

Aufgabe 2: Wir fertigen für jede Teilaufgabe eine Wahrheitstafel an (vgl. Beispiel 1.1.10):

(a)

A	f	$A \wedge f$	$(A \wedge f) \Leftrightarrow f$	
wahr	falsch	falsch	wahr	✓
falsch	falsch	falsch	wahr	

Die zu zeigende Aussage $(A \wedge f) \Leftrightarrow f$ ist nun insgesamt wahr, da für jede mögliche Situation, d.h. für jede Kombination der Wahrheitswerte der an der Aussage beteiligten Teilaussagen (hier nur A), sich der Wahrheitswert „wahr“ ergibt.

Dieselbe Argumentation ist auch bei allen folgenden Teilaufgaben anwendbar.

(b)

A	w	$A \vee w$	$(A \vee w) \Leftrightarrow w$	
wahr	wahr	wahr	wahr	✓
falsch	wahr	wahr	wahr	

(c)

A	f	$A \vee f$	$(A \vee f) \Leftrightarrow A$	
wahr	falsch	wahr	wahr	✓
falsch	falsch	falsch	wahr	

(d)

A	w	$A \wedge w$	$(A \wedge w) \Leftrightarrow A$	
wahr	wahr	wahr	wahr	✓
falsch	wahr	falsch	wahr	

(e)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	
wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	✓
wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	
falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	

(f)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	
wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	✓
falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	
falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	

(g)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	¹
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr ✓
falsch	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr

(h)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	²
wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr ✓
falsch	wahr	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr
falsch	falsch	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch	wahr	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	falsch	wahr

(i)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	
wahr	wahr	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	
wahr	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	✓
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	
falsch	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr	wahr	

1.2 Mengen

Aufgabe 1:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

(c) $C = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\} = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{-1, 1\}$

$$^1(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$$

$$^2(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

- (e) $E = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$
 (f) $F = \{\text{Ted, Barney, Marshall, Lily, Robin}\}$

Aufgabe 2: Angesprochen sind alle in Deutschland lebenden Personen, die...

- (a) ... in Nordrhein-Westfalen leben, weiblich sind und einen Hund besitzen.
 (b) ... in Nordrhein-Westfalen leben oder ein Auto besitzen.
 (c) ... **nicht** in Nordrhein-Westfalen leben.
 (d) ... in Nordrhein-Westfalen leben (und **nicht** in Berlin leben).
 (e) ... **nicht gleichzeitig** in Berlin leben, weiblich sind und einen Hund besitzen.
 (f) ... männlich sind und ein Auto oder einen Hund besitzen.
 (g) ... ein Auto besitzen, aber weder einen Hund besitzen, noch in Berlin wohnen.
 (h) ... **gleichzeitig** in Nordrhein-Westfalen und in Berlin leben. Geht man davon aus, dass der Lebensmittelpunkt eindeutig ist, handelt es sich hier aber um die leere Menge.

Aufgabe 3: Es gilt

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

mit $|\mathcal{P}(\{a, b, c\})| = 8$.

Aufgabe 4:

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (a) f | (c) f | (e) f | (g) w | (i) w |
| (b) f | (d) w | (f) f | (h) f | |

Aufgabe 5: Es gilt $|A| = 2$, $|B| = 2$, $|C| = 2$ und $|D| = 3$.

Aufgabe 6: Alle Mengengleichungen sind im Allgemeinen³ für Mengen A, B, C ungültig. Ein Gegenbeispiel für jede Teilaufgabe liefert $A = \{1\}$, $B = C = \{2\}$. Natürlich muss man aber nicht jede Beziehung durch dasselbe Gegenbeispiel widerlegen.

Aufgabe 7: $A \times B \times C = \{(0, 4, 1), (1, 4, 1), (2, 4, 1), (0, 4, 2), (1, 4, 2), (2, 4, 2)\}$.

1.3 Zahlen

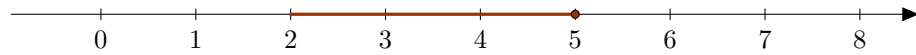
Aufgabe 1:

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (a) w | (c) f | (e) w | (g) f | (i) w |
| (b) f | (d) w | (f) f | (h) w | (j) f |

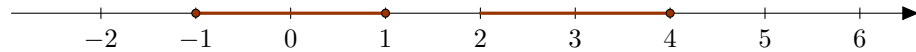
³Das bedeutet, dass es durchaus Mengen gibt, für welche die jeweilige Gleichung gilt, jedoch gilt die Gleichung nicht für alle Mengen, die möglich wären.

Aufgabe 2:

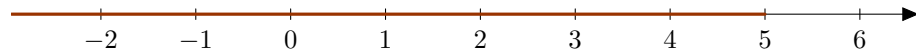
(a) $A = (2, 5]$



(b) $B = [-1, 1] \cup (2, 4]$



(c) $(-\infty, 5)$



Aufgabe 3:

(a) $\operatorname{Re} z_1 = 6,$
 $\operatorname{Im} z_1 = -2$

(e) $\operatorname{Re} z_5 = 1,$
 $\operatorname{Im} z_5 = 0$

(i) $\operatorname{Re} z_9 = \frac{1}{5},$
 $\operatorname{Im} z_9 = \frac{7}{5}$

(b) $\operatorname{Re} z_2 = 0,$
 $\operatorname{Im} z_2 = 1$

(f) $\operatorname{Re} z_6 = 1,$
 $\operatorname{Im} z_6 = 0$

(j) $\operatorname{Re} z_{10} = -\frac{4}{15},$
 $\operatorname{Im} z_{10} = -\frac{2}{15}$

(c) $\operatorname{Re} z_3 = 2,$
 $\operatorname{Im} z_3 = 6$

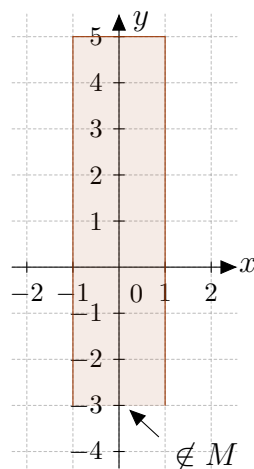
(g) $\operatorname{Re} z_7 = \pi,$
 $\operatorname{Im} z_7 = 0$

(d) $\operatorname{Re} z_4 = -4,$
 $\operatorname{Im} z_4 = 3$

(h) $\operatorname{Re} z_8 = -\frac{2}{25},$
 $\operatorname{Im} z_8 = \frac{11}{25}$

(k) $\operatorname{Re} z_{11} = \frac{3}{25},$
 $\operatorname{Im} z_{11} = -\frac{4}{25}$

Aufgabe 4:



Der untere Rand des Rechtecks gehört nicht zu M , da in der Mengenbedingung $-3 < y$ statt $-3 \leq y$ gefordert wird.

1.4 Rechenregeln und Notationen

Aufgabe 1:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| (a) Kommutativgesetz | (c) Distributivgesetz |
| (b) Assoziativgesetz | (d) Assoziativgesetz |

Aufgabe 2:

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| (a) 1 | (c) a^2 |
| (b) $\frac{1}{81x^2}$ | (d) $\frac{a^2c^5}{b^5d}$ |

Aufgabe 3:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| (a) $6^{-\frac{5}{2}}$ | (c) $81^{\frac{1}{15}}$ | (e) $6^{\frac{1}{42}}$ |
| (b) $2^{\frac{1}{6}}$ | (d) $2^{\frac{1}{10}}$ | |

Aufgabe 4:

- | | | |
|----------|------------------|---------------------|
| (a) 31 | (c) 0 | (e) $\frac{1}{n+1}$ |
| (b) 1024 | (d) $16 \cdot n$ | (f) 624 |

Aufgabe 5:

- | | | |
|-----------------|------------------------|---------------|
| (a) $n+1$ | (c) $(n^2-1)!$ | (e) 120 |
| (b) $(n+2)!2^n$ | (d) $108! \cdot 11991$ | (f) $(2n-1)!$ |

Aufgabe 6:

- | | | |
|-------|-----------------------------|---------|
| (a) 1 | (c) $2 \cdot \binom{2n}{6}$ | (e) 120 |
| (b) 1 | (d) 120 | (f) 120 |

1.5 Beweise

Wir machen jeweils keine Induktionsanfänge und zeigen nur den Induktionsschritt. Zur Vollständigkeit des jeweiligen Beweises gehören diese jedoch notwendig dazu!

Aufgabe 1:

- (a)
$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) + 2^{n+1} \stackrel{!V.}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1+1} - 1$$
- (b)
$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^n k(k+1) \right) + (n+1)(n+2) \stackrel{!V.}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$
$$\frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \\
(d) \quad \prod_{k=1}^{n+1} 4^k &= \left(\prod_{k=1}^n 4^k \right) \cdot 4^{n+1} \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2^{n(n+1)} \cdot 4^{n+1} = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{2n+2} = 2^{n(n+1)+2n+2} = \\
&= 2^{(n+1)(n+1+1)} \\
(e) \quad \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k} \right) &= \left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{(n+1)-1}{n+1} \right) = \frac{\frac{n}{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
(a) \quad (n+1)^3 + 2(n+1) &= (n+1)^3 + 2n + 2 = (n+1)^3 + 2n + n^3 - n^3 + 2 \stackrel{\text{I.V.}}{=} (n+1)^3 + 3a - n^3 + 2 = \\
&= (n^2 + 2n + 1)(n+1) + 3a - n^3 + 2 = n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 3a - n^3 + 2 = \\
&= 3n^2 + 3n + 3 + 3a = 3(n^2 + n + 1 + a) \\
(b) \quad 4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^2 + 2n + 1)(n+1) - (n+1) = 4(n^2 + 2n + 1)(n+1) + 4n^3 - n - 1 - \\
&= 4n^3 \stackrel{\text{I.V.}}{=} (4n^2 + 8n + 4)(n+1) + 3a - 4n^3 - 1 = 4n^3 + 8n^2 + 4n + 4n^2 + 8n + 4 + 3a - 4n^3 - 1 = \\
&= 3a + 12n^2 + 12n + 3 = 3(a + 4n^2 + 4n + 1) \\
(c) \quad (n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^3 - n - 1 + n^3 - n^3 = (n^2 + 2n + 1)(n+1) + n^3 - n - 1 - n^3 \stackrel{\text{I.V.}}{=} \\
&= n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 6a - 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 6a \\
&\text{Dass } 3n^2 + 3n \text{ durch 6 teilbar ist, zeigen wir mit einer zweiten, in die erste geschachtelten} \\
&\text{Induktion.} \\
&3(n+1)^2 + 3(n+1) = 3(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 = 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 \stackrel{\text{I.V.}}{=} 6b + 6n + 6 = \\
&= 6(b + n + 1) \\
(d) \quad 5^{n+1} + 7 &= 5(5^n + 7) - 28 \stackrel{\text{I.V.}}{=} 5(4a) - 28 = 4(5a - 7)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
(a) \quad (n+1)^2 - 2(n+1) - 1 &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 1 = \underbrace{n^2 - 2n - 1}_{>0 \text{ nach I.V.}} + \underbrace{2n - 1}_{>0 \forall n \geq 3} > 0 \\
(b) \quad 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \stackrel{\text{I.V.}}{\geq} 2(n+1) = 2n + 2 \geq n + 1 + 1 \\
(c) \quad 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \stackrel{\text{I.V.}}{>} 2n^2 + 4n + 2 - 4n - 2 = 2(n^2 + 2n + 1) - 4n - 2 = 2(n+1)^2 - 4n - 2 > \\
&= (n+1)^2 \\
(d) \quad (n+1)! &= n!(n+1) \stackrel{\text{I.V.}}{>} 2^n(n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$$(a) \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{!}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1+1}}{1 - q}$$

$$(b) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

Aufgabe 5: Es sei M eine Menge.

$$(a) \mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$$

$$(b) |\mathcal{P}(M)| = 2^n$$

$$(c) \text{Nein, denn } \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$$

(d) Die Potenzmenge der Menge ohne Elemente, d.h. der leeren Menge, enthält genau ein Element (s.o), nämlich $\emptyset$ (Induktionsanfang). Wir gehen davon aus, dass die Induktionsvoraussetzung bereits für ein n gilt und die Potenzmenge einer Menge M mit n Elementen somit 2^n Elemente enthält. Befüllen wir M nun mit einem weiteren Element, teilen sich die Elemente aus $\mathcal{P}(M)$ in zwei gleich große Gruppen: Solche Teilmengen von M , die das neue Element enthalten, und jene, welche dies nicht tun. Bei der ersten Gruppe handelt es sich um alle Mengen, die zuvor bereits für $|M| = n$ in der Potenzmenge waren, bei der zweiten um dieselben, außer dass das neue Element in jede Teilmenge hinzugefügt wurde. Insgesamt ergeben sich so nun $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen (Induktionsschritt).

Aufgabe 6:

$$(a) 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, \dots$$

(b) Wir wissen bereits, dass $19 \in S$ gilt. Daher kann S nicht leer sein, also $S \neq \emptyset$. Tatsächlich wurde bereits durch Computereinsatz gezeigt, dass die Vermutung für die ersten $5 \cdot 2^{60} \approx 5764 \cdot 10^{18}$ natürlichen Zahlen wahr ist.

(c) Wir geben die Menge

$$M = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$$

an. In dieser Menge sind offenbar unendlich viele Zahlen enthalten und somit gilt $|M| = \infty$. Da für diese Zahlen – also die Zweierpotenzen – die Algorithmus-Vorschrift immer nur das Teilen durch 2 fordert, erreicht die Folge für 2^k nach $k - 1$ Algorithmus-Durchläufen die 2 und ist somit im Zyklus gefangen. Es gilt also $M \subset S$.

1.6 Abbildungen

Aufgabe 1:

- (a) (i) injektiv, surjektiv, bijektiv
- (ii) surjektiv
- (iii) Keiner der Begriffe trifft zu.
- (iv) injektiv

- (b)
- $\text{Graph}(a) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
 - $\text{Graph}(b) = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 1), (6, 4)\}$
 - $\text{Graph}(c) = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (5, 1), (6, 4)\} = \text{Graph}(b)$
 - $\text{Graph}(d) = \{(1, 6), (2, 3), (3, 1), (4, 5)\}$
- (c) a ist streng monoton steigend, b , c und d weisen keine Monotonieeigenschaft auf.
- (d)
- $a(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$
 - $b(\{1, 2\}) = \{2\}$
 - $c(\{1, 2\}) = \{2\}$
 - $d(\{1, 2\}) = \{3, 6\}$
- (e)
- $a^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$
 - $b^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 5\}$
 - $c^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3, 5\}$
 - $d^{-1}(\{1, 2\}) = \{3\}$
- (f) Es gilt $a(1) = 1$ und $a(\{1\}) = \{1\}$. Erstere Gleichung findet auf Elementebene, zweite auf Mengenebene statt. Vergleiche auch Definition 1.6.25.

Aufgabe 2:

- (a) $f \circ g(x) = 2(4|x| + \sqrt{2|x|} + 1)$
- (b) $g \circ f(x) = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 4}$
- (c) $g \circ h(x) = 4\sqrt{\left|x| - \frac{x^3}{2}\right|}$
- (d) $h \circ f(x) = -x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 13x^3 - 16x^2 - 10x - 4$
- (e) $f \circ f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 3x + 8$
- (f) $f \circ h \circ g(x) = 32|x| - 256x^2 + 512|x|^3 + 4\sqrt{2|x|} - 16\sqrt{2}|x|^{\frac{3}{2}} + 2$

Aufgabe 3:

- f : injektiv sowie surjektiv und somit auch bijektiv im gesamten Ausschnitt
- g : surjektiv im gesamten Ausschnitt
- h : Keiner der Begriffe trifft zu.
- i : injektiv im gesamten Ausschnitt

Aufgabe 4:

- (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (b) $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- (c) $\text{Bild}(f) = W$

- (d) Wir zeigen zunächst, dass f auf $(-\infty, -1]$ streng monoton steigend ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ und $x_1 < x_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 & f(x_1) < f(x_2) \\
 \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{x_1 + 1} < 1 - \frac{1}{x_2 + 1} \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{x_1 + 1} < -\frac{1}{x_2 + 1} & | \cdot (-1) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1} & |^{-1} \\
 \Leftrightarrow & x_1 + 1 < x_2 + 1 \\
 \Leftrightarrow & x_1 < x_2.
 \end{aligned}$$

Für $x_1, x_2 \in (-1, \infty)$ analog (für dieses Wort vergleiche Bemerkung 1.6.19. f ist nicht auf ganz D streng monoton steigend, da z.B. $f(-3) = \frac{3}{2} > \frac{1}{2} = f(1)$, was im Widerspruch dazu steht, dass f auf ganz D streng monoton steigend ist.

- (e) Da das Bild der gesamte Wertebereich ist, wird jedes $y \in W$ mindestens einmal getroffen, was der Definition der Surjektivität gleichkommt.
- (f) Wenn f injektiv ist, wird jedes $y \in W$ von höchstens einem $x \in D$ getroffen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass y von mindestens zwei verschiedenen x -Werten getroffen wird, nämlich $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$. Dann gilt $f(x_1) = y$ und $f(x_2) = y$ und wir folgern

$$\begin{aligned}
 & f(x_1) = f(x_2) \\
 \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{x_1 + 1} = 1 - \frac{1}{x_2 + 1} \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{x_1 + 1} = -\frac{1}{x_2 + 1} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{x_2 + 1} \\
 \Leftrightarrow & x_1 + 1 = x_2 + 1 \\
 \Leftrightarrow & x_1 = x_2 \text{ } \nmid.
 \end{aligned}$$

$x_1 = x_2$ ist ein Widerspruch zur Annahme, dass beide Werte unterschiedlich sein sollen. Daher muss das Gegenteil der Annahme $x_1 \neq x_2$ gelten und somit gilt $x_1 = x_2$. Jedes Element in W wird also von höchstens einem Element aus D getroffen und die Funktion ist somit injektiv.

- (g) Aus der Surjektivität und Injektivität von f folgt die Bijektivität von f .

- (h) Wir formen den Funktionszusammenhang $y = 1 - \frac{1}{x + 1}$ zwischen einem Element $y \in W$ und $x \in D$ um:

$$\begin{aligned}
 y = 1 - \frac{1}{x + 1} & \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{x + 1} \\
 & \Leftrightarrow -y + 1 = \frac{1}{x + 1} \\
 & \Leftrightarrow (-y + 1)(x + 1) = 1 \\
 & \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{-y + 1} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{1}{-y + 1} - 1.
 \end{aligned}$$

Die letzte nach x umgestellte Beziehung liefert also zu jedem $y \in W$ das ursprüngliche $x \in D$ (hierfür haben wir den Begriff des Urbilds eingeführt). Daher ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{-x+1} - 1$ die Umkehrabbildung.

$$(i) \quad f(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{-x+1} - 1\right) + 1} = x \quad \checkmark$$

2 Algebra

2.1 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1:

- (a) Es gilt $\mathbb{L} = \{(0, -2\lambda, -2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Der Rang sowie der erweiterte Rang ist 3.
- (b) Es gilt $\mathbb{L} = \{(2, -2 - 2\lambda, -2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Der Rang sowie der erweiterte Rang ist 3.
- (c) Es gilt $\mathbb{L} = \emptyset$. Der Rang ist 3, der erweiterte Rang ist 4.

Aufgabe 2:

- (a) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = 3 \wedge \beta \neq -1\}, \mathbb{L} = \emptyset$
- (b) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \neq 3\}, \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{\beta\alpha-6\beta-3}{\alpha-3}, \frac{4\beta\alpha-\alpha-15\beta}{\alpha-3}, \frac{\beta+1}{\alpha-3}\right)\right\}$
- (c) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = 3 \wedge \beta = -1\}, \mathbb{L} = \{(-\beta - 2 + 3\lambda, 8\beta + 3 + (9 - 4\alpha)\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(3\lambda - 1, -3\lambda - 5, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3:

- (a) $\mathbb{L} = \{(0, 0, 0)\}$
- (b) $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{13}{10}, -\frac{1}{4}, \frac{17}{20}\right)\right\}$
- (c) $\mathbb{L} = \left\{\left(3, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)\right\}$

2.2 Gruppen

Aufgabe 1:

- (a) $\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- (d) $n!$
- (e) $\circ : M_n \times M_n \rightarrow M_n$ ist offenbar eine innere Verknüpfung.
 - (1) Die Komposition von Abbildungen ist immer assoziativ. Es gilt also für drei Permutationen $p, q, r \in S_n$: $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$.

(2) Das neutrale Element $e \in S_n$ ist die Identität

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n,$$

denn es gilt $p \circ \text{id} = \text{id} \circ p = p$ für alle $p \in S_n$.

(3) Zu einer beliebigen Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

lautet das inverse Element

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(n) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n,$$

wobei die Spalten hierbei noch aufsteigend nach $p(1), \dots, p(n)$ sortiert werden müssen.

Dann gilt $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = \text{id}$.

Somit ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe.

(f) S_2 hat nur $2! = 2$ Elemente. Für diese kann dies von Hand nachgerechnet werden.

(g) Wir definieren $p, q \in S_n$ für $n > 2$ mit

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & p(4) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \text{ und } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & q(4) & \dots & q(n) \end{pmatrix}.$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} p \circ q &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & p \circ q(4) & \dots & p \circ q(n) \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & q \circ p(4) & \dots & q \circ p(n) \end{pmatrix} = q \circ p \end{aligned}$$

und somit kann S_n nicht abelsch sein, da die Verknüpfung nicht kommutativ ist: Schließlich haben wir ein Pärchen p und q gefunden, bei welchem bzgl. der Verknüpfung „ $\circ$ “ die Operanden nicht vertauscht werden dürfen ($p \circ q \neq q \circ p$).

2.3 Körper

Aufgabe 1: Wir orientieren uns nun am Beweis von Satz 2.3.2 von Seite 85. Hier haben wir bereits gezeigt, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Mit ein paar Überlegungen können wir bei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ fast identisch vorgehen und die erforderlichen Axiome einzeln auf ihre Erfüllung prüfen:

- (1) Zu zeigen ist in diesem Schritt, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Wie bereits im Beweis von Satz 2.3.2 können wir auch hier erneut auf die bereits ausgeführten Überlegungen zu $(\mathbb{Z}, +)$ verweisen (s. Beweis zu Satz 2.2.8). Exemplarisch zeigen wir aber noch Axiom (3) aus Definition 2.2.7, d.h. wir geben zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ein inverses Element bzgl. der Verknüpfung „ $+$ “ an. Gehen wir wie bisher davon aus, dass sich die Zahl z als $z = x + yi$ darstellen lässt, gilt $z^{-1} = -z = -x - yi$, denn es gilt

$$z + z^{-1} = z + (-z) = x + yi + (-x - yi) = x + yi - x - yi = 0.$$

Insbesondere ist 0 also das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{C}, +)$. Da sich jede Addition zweier komplexen Zahlen auf die Addition von vier reellen Zahlen (zwei Realteile, zwei Imaginärteile) zurückführen lässt, ist die Gruppe zudem auch abelsch.

(2) Nun ist zu zeigen, dass auch $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

(2.1) Wir zeigen das Assoziativgesetz für drei komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ und $z_3 = x_3 + y_3i$:

$$\begin{aligned}
 (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= ((x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i)) \cdot (x_3 + y_3i) \\
 &= (x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i) \cdot (x_3 + y_3i) \\
 &= x_1x_2x_3 + x_1y_2ix_3 + y_1ix_2x_3 + y_1iy_2ix_3 \\
 &\quad + x_1x_2y_3i + x_1y_2iy_3i + y_1ix_2y_3i + y_1iy_2iy_3i \\
 &= x_1x_2x_3 + x_1y_2ix_3 + x_1x_2y_3i + x_1y_2iy_3i \\
 &\quad + y_1ix_2x_3 + y_1iy_2ix_3 + y_1ix_2y_3i + y_1iy_2iy_3i \\
 &= x_1 \cdot (x_2x_3 + y_2ix_3 + x_2y_3i + y_2iy_3i) \\
 &\quad + y_1i \cdot (x_2x_3 + y_2ix_3 + x_2y_3i + y_2iy_3i) \\
 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2x_3 + y_2ix_3 + x_2y_3i + y_2iy_3i) \\
 &= (x_1 + y_1i) \cdot ((x_2 + y_2i) \cdot (x_3 + y_3i)) \\
 &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \checkmark.
 \end{aligned}$$

(2.2) Auch im Kontext der komplexen Zahlen bleibt 1 das neutrale Element, denn für $z = x + yi \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
 z \cdot 1 &= (x + yi) \cdot 1 = (x \cdot 1) + (y \cdot 1)i = x + yi = z \quad \text{sowie} \\
 1 \cdot z &= 1 \cdot (x + yi) = (1 \cdot x) + (1 \cdot y)i = x + yi = z.
 \end{aligned}$$

(2.3) Das inverse Element $z^{-1} \in \mathbb{C}$ zu einem Element $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist auch hier $\frac{1}{z}$. Als Nachweis reicht dieselbe Rechnung wie im Beweis zu Satz 2.3.2, d.h.

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = \frac{z}{z} = 1.$$

Alternativ kann man auch wie üblich $z = x + yi$ setzen und mit dem in Bemerkung 1.3.10 eingeführten Trick arbeiten.

Dass $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsch ist, lässt sich nun auch noch leicht zeigen. Dazu ziehen wir zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1i \in \mathbb{C}$ sowie $z_2 = x_2 + y_2i \in \mathbb{C}$ heran und rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= ((x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i)) \\
 &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i \\
 &= x_2x_1 + x_2y_1i + y_2ix_1 + y_2iy_1i \\
 &= (x_2 + y_2i) \cdot (x_1 + y_1i) \\
 &= z_2 \cdot z_1 \quad \checkmark.
 \end{aligned}$$

(3) Letztlich müssen wir für die komplexen Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ und $z_3 = x_3 + y_3i$ noch das Distributivgesetz nachweisen:

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i + x_3 + y_3i) \\
 &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1x_3 + x_1y_3i + y_1ix_2 + y_1iy_2i + y_1ix_3 + y_1iy_3i \\
 &= x_1x_2 + x_1y_2i + y_1ix_2 + y_1iy_2i + x_1x_3 + x_1y_3i + y_1ix_3 + y_1iy_3i \\
 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i) \cdot (x_3 + y_3i) \\
 &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \checkmark.
 \end{aligned}$$

Die noch ausstehende Gleichung $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ zeigt man analog.

2.4 Vektorräume

Aufgabe 1: Der Mittelpunkt zwischen den Punkten mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Die Ortsvektoren der vier Seitenmittelpunkte sind also $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$ sowie $\frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})$. Die Vektoren, welche diese Punkte (in geeigneter Richtung) verbinden, sind jeweils gegenüberliegend identisch, denn

$$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}).$$

Somit sind sie parallel und gleich lang. Das andere Pärchen gegenüberliegender Seiten muss daher ebenfalls zueinander parallel und gleich lang sein. Daher handelt es sich um ein Parallelogramm.

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) * (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) * (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} * \vec{u} + 2 \cdot \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{v} + \vec{u} * \vec{u} - 2 \cdot \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{v} \\ &= 2 \cdot \vec{u} * \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} * \vec{v} \\ &= 2(\vec{u} * \vec{u} + \vec{v} * \vec{v}) \\ &= 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

$$\frac{1}{2} \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \frac{35}{\sqrt{2}} \approx 24,75$$

Aufgabe 4:

(a) Z.B. $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$

(b) Z.B. $\vec{n}_0 = \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c) Zwei, nämlich $\vec{n}$ und $-\vec{n}$

Aufgabe 5:

(a) Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} G &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}), \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Natürlich kann man durch die Wahl eines anderen Stützvektor sowie eines alternativen, jedoch parallelen Richtungsvektors auch eine andere Darstellung der gesuchten Gerade erzielen.

- (b) Zur Bestimmung eines etwaigen Schnittpunktes setzen wir beide Geradengleichungen gleich und versuchen das entstehende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile können wir nun

$$\lambda = 7 - \mu$$

ablesen. Damit ergibt sich aus der ersten Zeile dann

$$-1 - 5\mu = 3\lambda = 3(7 - \mu) = 21 - 3\mu.$$

Dies können wir umformen zu

$$\begin{aligned} -22 &= 2\mu \\ \Leftrightarrow \mu &= -11. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Information in die zweite Zeile ergibt sich nun

$$\lambda = 7 - (-11) = 18.$$

Setzen wir nun beide Werte in die dritte Zeile ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 + -2\mu &= -2\lambda \\ \Leftrightarrow 2 - 2(-11) &= -2 \cdot 18 \\ \Leftrightarrow 24 &= -36, \end{aligned}$$

was offensichtlich einen logischen Widerspruch darstellt. Das entsprechende lineare Gleichungssystem kann somit keine Lösung haben und es gilt

$$G \cap H = \emptyset.$$

Aufgabe 6: Wir zeigen alle notwendigen Axiome: Es seien dazu $p, q \in \mathbb{P}_3$ wie auf dem Übungsblatt. Zusätzlich sei $r \in \mathbb{P}_3$ ein weiteres Polynom sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (1) Zu zeigen ist, dass $(\mathbb{P}_3, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(1.1) Es gilt natürlich $p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$, da die Addition von Polynomen nach Definition nur die Addition der (reellen) Koeffizienten bedeutet und diese bereits (da $\mathbb{R}$ ja ein Körper ist) assoziativ sind.

(1.2) Das neutrale Element $0_{\mathbb{P}_3}$ ist das Nullpolynom $n \in \mathbb{P}_3$ mit $n(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$. Es verändert bei Addition ein bestehendes Polynom p nicht.

(1.3) Zu einem Polynom p ist das inverse Element das Polynom $-p \in \mathbb{P}_3$ mit $-p(x) = (-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)$. Nun gilt $p(x) + (-p(x)) = -p(x) + p(x) = n(x)$.

(1.4) Es gilt auch $p + q = q + p$, da dies wieder nur die Addition der Koeffizienten bedeutet, die bereits kommutativ ist.

(2) (2.1) Es gilt $\lambda \cdot (p + q) = (\lambda \cdot p) + (\lambda \cdot q)$, da die skalare Multiplikation ebenso wie die Polynomaddition jeweils nur reelle Multiplikationen bzw. Additionen der Koeffizienten bedeuten, welche diese Eigenschaften bereits erfüllen.

(2.2) Es gilt $(\lambda + \mu) \cdot p = (\lambda \cdot p) + (\mu \cdot p)$ analog zu (2.1).

(2.3) Es gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot p = \lambda \cdot (\mu \cdot p)$ analog zu (2.1).

(2.4) $1_{\mathbb{R}}$ ist die uns bekannte, „normale“ $1 \in \mathbb{R}$. Natürlich gilt auch $1 \cdot p = p$ wieder analog zu (2.1).

2.5 Matrizen

Aufgabe 1: Die möglichen Produkte XY sind:

$$\begin{aligned}
 \bullet AA &= \begin{pmatrix} 3 & -35 & -29 & 11 \\ -81 & 2 & -31 & 11 \\ -44 & -7 & -45 & -158 \\ 30 & 56 & -23 & -37 \end{pmatrix}, & \bullet CD &= \begin{pmatrix} -26 & 30 \\ 4 & -8 \\ -35 & 15 \\ -26 & 30 \end{pmatrix}, \\
 \bullet AC &= \begin{pmatrix} -64 & -37 \\ -28 & -10 \\ 9 & 10 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}, & \bullet DB &= \begin{pmatrix} 16 & -16 & -42 \\ -76 & 32 & 18 \end{pmatrix}, \\
 \bullet AE &= \begin{pmatrix} 73 \\ 126 \\ 160 \\ 21 \end{pmatrix}, & \bullet DD &= \begin{pmatrix} 58 & -6 \\ -6 & 34 \end{pmatrix}, \\
 \bullet CB &= \begin{pmatrix} -68 & 32 & 30 \\ 18 & -8 & -6 \\ -35 & 20 & 30 \\ -68 & 32 & 30 \end{pmatrix}, & \bullet EF &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -35 & -5 \\ 3 & 0 & -21 & -3 \\ -4 & 0 & 28 & 4 \\ -11 & 0 & 77 & 11 \end{pmatrix}, \\
 & \bullet FA &= (-91 \quad -73 \quad 16 \quad 30), \\
 & \bullet FC &= (-35 \quad 0), \\
 & \bullet FE &= (44)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir benutzen $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ um die Anzahl der Zeilen respektive Spalten der auftretenden Matrizen zu kennzeichnen und Schreiben eine Matrix mit i Zeilen und j Spalten kurz als $(i \times j) \in \mathbb{R}^{i \times j}$, da uns hier nicht die Werte sondern nur die Anzahl der Zeilen und Spalten interessiert, um die Kompatibilität zu testen:

$$\begin{aligned}
 (n \times k)((k \times l)(l \times m)) &= (n \times k)(k \times m) \\
 &= (n \times m) \\
 &= (n \times l)(l \times m) \\
 &= ((n \times k)(k \times l))(l \times m).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Wir gehen analog zur vorherigen Aufgabe vor:

$$\begin{aligned}
 (((n \times 4)(4 \times 1))((k \times 4)(4 \times 1))^{\top}(k \times m))^{\top} &= ((n \times 1)(k \times 1)^{\top}(k \times m))^{\top} \\
 &= ((n \times 1)(1 \times k)(k \times m))^{\top} \\
 &= ((n \times k)(k \times m))^{\top} \\
 &= ((n \times m))^{\top} \\
 &= (m \times n) \in \mathbb{R}^{5 \times 4}.
 \end{aligned}$$

Es folgt $n = 4$ und $m = 5$.

Aufgabe 4:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) C ist nicht invertierbar, da der Rang nicht maximal ist.

(b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(d) D ist nicht quadratisch und somit nicht invertierbar.

Aufgabe 5: Wir nutzen unser Wissen aus Aufgabe 4 (b). Das gegebene lineare Gleichungssystem ist daher äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 6:

(a) $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$,

daher ist f nach Satz 2.5.27 linear.

(b) $g(\vec{o}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$,

daher ist g **nicht** linear.

(c) $h(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$,

daher ist h wieder nach Satz 2.5.27 linear.

(d) $2 \cdot i \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = i \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = i \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$

daher ist i **nicht** linear.

Aufgabe 7:

(a) • $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,
• $B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
• $C^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
• $D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -10 & 13 & 10 \\ -13 & 34 & 58 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 30 & -7 \\ 21 & -18 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\text{Rang}(C) = 2$

(f) Da C invertierbar ist, ist die von C induzierte lineare Abbildung bijektiv und somit auch injektiv und surjektiv.

(g) $\begin{pmatrix} 16777216 & 0 \\ 0 & 16777216 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 16777216 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Analysis

3.1 Grenzwerte

Aufgabe 1:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \frac{1}{4}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 42$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$
(bestimmt divergent)

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty$
(bestimmt divergent)

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = e \approx 2,71828$

Aufgabe 2:

- | | | |
|-------------------|---------------|--------------------|
| (a) 27 | (d) ∞ | (g) $-\infty$ |
| (b) $\frac{1}{4}$ | (e) $-\infty$ | (h) 0 |
| (c) 12 | (f) 0 | (i) nicht existent |

Aufgabe 3: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \stackrel{q \neq 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \text{nicht definiert} & \text{für } q < 0 \\ 0 & \text{für } q = 0 \\ \frac{1}{1 - q} & \text{für } 0 < q < 1, \\ \infty & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

wobei die erste Gleichheit nur für $q \neq 1$ gilt, da sonst durch 0 geteilt werden würde.

3.2 Nullstellen

Aufgabe 1:

- (a) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 4)$
(b) $g(x) = 3(x - 3)(x + 6)(x - 1)$
(c) $h(x) = (x - 1)(x + 2)x^2$

Aufgabe 2: Wir setzen

$$h(x) := f(x) - g(x) = x^4 + x^3 - 2x^2.$$

Dann entsprechen die Nullstellen von h genau den x -Koordinaten der gesuchten Schnittpunkte, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x^4 + x^3 &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 2x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen von h kennen wir bereits aus Aufgabe 1 (c). Sie lauten $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ und $x_3 = x_4 = 0$. Für die gesuchten Schnittpunkte benötigen wir nun noch die jeweilige y -Koordinate, die wir durch Einsetzen – wahlweise in $f(x)$ oder $g(x)$ – erhalten:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x_1, g(x_1)) = (1, 2), \\ S_2 &= (x_2, g(x_2)) = (-2, 8), \\ S_3 &= (x_3, g(x_3)) = (0, 0), \\ S_4 &= (x_4, g(x_4)) = (0, 0). \end{aligned}$$

Da S_3 und S_4 bereits die gleiche x -Koordinate besitzen, sind sie natürlich auch insgesamt identisch. S_4 können wir also vernachlässigen und es gibt insgesamt drei Schnittpunkte der beiden Graphen.

Aufgabe 3: Falls x_1 und x_2 die Nullstellen von f sind, besitzt die Funktion eine entsprechende Linearfaktorzerlegung und es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2. \end{aligned}$$

Blenden wir die Zwischenschritte aus, erhalten wir

$$f(x) = x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Hier lässt sich nun ablesen, dass $p = -(x_1 + x_2)$ sowie $q = x_1 \cdot x_2$ gelten muss (Stichwort *Koeffizientenvergleich*).

3.3 Stetigkeit

Aufgabe 1:

- | | |
|------------------------|--|
| (a) als Polynom stetig | (d) unstetig, da in $x = 0$ nicht definiert und somit unstetig |
| (b) stetig | (e) unstetig, da in $x = 3$ unstetig |
| (c) stetig | (f) unstetig, da in $x = 0$ nicht definiert und somit unstetig |

Aufgabe 2: Damit f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, müssen an der Stelle $x = 2$ linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert identisch sein. Wir betrachten daher zunächst beide Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1}{2}tx^2 + 2x - 5t = 2t + 4 - 5t = -3t + 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} -2x^2 + \frac{3}{2}tx = -4 + 3t = 3t - 4 \end{aligned}$$

Es muss also

$$-3t + 4 = 3t - 4$$

gelten, was für $t = \frac{4}{3}$ der Fall ist.

3.4 Differenzierbarkeit

Aufgabe 1:

- (a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x + 1$
 (b) $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t(x) = 1$

Aufgabe 2:

- (a) $6x + 1$
 (b) $\frac{6x+1}{x^2+x+1} - \frac{(3x^2+x-5)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$$(c) \frac{1}{3} \frac{20x^4 + 6x + 1}{(4x^5 + 3x^2 + x + 1)^{2/3}}$$

$$(d) 2x + 7 - x^{-2}$$

$$(e) -2x^{-3}$$

$$(f) 6x^5 + 4x^3 + 24x^2 - 24x - 17$$

$$(g) -6x^{-4} - 5x^{-6}$$

$$(h) \frac{15x^{16} + 9x^{12} + 33x^{10} + 63x^6}{(x^6 + 1)^2}$$

Aufgabe 3:

- (a) Es gilt $B(0) = \frac{17}{12} - \sqrt{2} \approx 0,00245 \neq 0$. Das Modell genügt dieser Forderung also nicht gänzlich.
- (b) Es gilt $B(10) \approx 4,42 \text{ [MB]}$. Nutzen wir die inhaltlich sinnvolle Forderung, die das Modell zwar nicht exakt erfüllt (s.o.), dass $B(0) = 0$ gilt, beträgt die durchschnittliche Downloadgeschwindigkeit etwa $\frac{4,42}{10} = 0,442 \text{ [MB/s]}$.
- (c) Für die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 5$ müssen wir die Ableitung $\dot{B}(5)$ bestimmen. In allgemeiner Form gilt

$$\dot{B}(t) = B'(t) = \frac{4t^2 + 12t + 1}{2(2t + 3)^2}.$$

Durch Einsetzen und Auswerten erhalten wir $\dot{B}(5) = \frac{161}{338} \approx 0,48 \text{ [MB/s]}$.

3.5 Weitere Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 1: Für die ersten drei Ableitungen von f gilt:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x - 1,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 2,$$

$$f'''(x) = 24x.$$

- (a) Einzige Nullstelle der Ableitung ist $x_0 \approx 0,8846461771$. Es gilt $f'(x_0 - h) < f'(x_0) = 0 < f'(x_0 + h)$ für alle $h \in (0, \delta)$ für ein sehr kleines $\delta > 0$ (ausprobieren!). Daher liegt ein Vorzeichenwechsel der Ableitung vor und es handelt sich nach Satz 3.5.6 (zweiter Spiegelpunkt) um eine lokale Minimalstelle.
- (b) Es gilt $f(-2) = 16$ und $f(2) = 12$. Da es keine lokalen Maximalstellen gibt, liegt die absolute Maximalstelle bei $x_1 = -2$. Da beide Funktionswerte am Rand des Definitionsbereichs größer als $f(x_0)$ sind, handelt es sich bei der lokalen Minimalstelle auch um eine globale.
- (c) Nein, eine Funktion mit einem echten Tiefpunkt kann nicht mehr monoton auf dem gesamten Definitionsbereich sein.
- (d) Kandidaten für Wendestellen sind $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ und $x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$. Die einzige Nullstelle der dritten Ableitung ist 0. Daher handelt es sich bei beiden Kandidaten um Wendestellen.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$

Aufgabe 2:

- (a) Die Downloadgeschwindigkeit lässt sich in Analogie zu Beispiel 3.4.16 als Änderung der bereits heruntergeladenen Downloadmenge $B(t)$ beschreiben, d.h. die gesuchte Funktion ist $\dot{B}(t)$:

$$\dot{B}(t) = \frac{t^2 + 8t + 12}{t^2 + 8t + 16}.$$

- (b) Ebenfalls in Analogie zu Beispiel 3.4.16 lässt sich die Downloadbeschleunigung als Änderung der Änderung der bereits heruntergeladenen Downloadmenge $B(t)$ beschreiben, d.h. die gesuchte Funktion ist $\ddot{B}(t)$:

$$\ddot{B}(t) = \frac{8}{t^3 + 12t^2 + 48t + 64}.$$

- (c) Da die Ausdrücke t^2 und $8t$ für Zahlen aus $(0, 12]$ immer positiv sind und die Ableitung $\dot{B}(t)$ an der Stelle 0 den Wert $\frac{3}{4}$ besitzt, gilt

$$\dot{B}(t) > 0$$

für alle $t \in [0, 12]$. Daher ist B auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.

- (d) Damit es eine solche Funktion g gibt, muss nach Definition 3.5.12

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |B(t) - g(t)| = 0$$

gelten. Dazu betrachten wir zunächst nur die Differenz $B(t) - g(t)$:

$$\begin{aligned} B(t) - g(t) &= \frac{(t+1)^2 + t - 1}{t+4} - (at+b) \\ &= \frac{t^2 + 3t}{t+4} - at - b \\ &= \frac{t^2 + 3t}{t+4} - \frac{at(t+4)}{(t+4)} - \frac{b(t+4)}{(t+4)} \\ &= \frac{t^2 + 3t}{t+4} - \frac{at^2 + 4at}{(t+4)} - \frac{bt + 4b}{(t+4)} \\ &= \frac{(1-a)t^2 + (3+4a+4b)t + 4b}{t+4}. \end{aligned}$$

Erst jetzt betrachten wir den eigentlichen Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |B(t) - g(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{(1-a)t^2 + (3+4a+4b)t + 4b}{t+4} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t}{t} \cdot \frac{(1-a)t + (3+4a+4b) + \frac{4b}{t}}{1 + \frac{4}{t}} \right| \\ &\stackrel{a=1}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{(7+4b) + \frac{4b}{t}}{1 + \frac{4}{t}} \right| \\ &= 7 + 4b. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im vorletzten Schritt $a = 1$ gesetzt, da jeder andere Wert für a zu einem Grenzwert ∞ führen würde. Der Term $7 + 4b$ ist genau für $b = -7/4$ gleich 0. Die gesuchte Gerade existiert also und hat die Funktionsvorschrift

$$g(t) = at + b = t - \frac{7}{4}.$$

- (e) Da nach (c) die Funktion B auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist, muss es sich bei den Rändern des Definitionsbereichs um eine globale Minimal- bzw. Maximalstelle handeln. D.h. konkret, dass $x_1 = 0$ globale Minimal- und $x_2 = 12$ globale Maximalstelle ist. Beide Stellen sind auch lokale Extremalstellen, da jede globale Stelle auch lokal ist. Weitere lokale Extremalstellen kann es ebenfalls aufgrund des Monotonieverhaltens nicht geben.

3.6 Besondere reelle Funktionen

Aufgabe 1: Wir nutzen den Tipp und formen entsprechend um:

$$f(x) = b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}.$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Kettenregel ableiten:

$$f'(x) = e^{x \ln b} \ln b = (e^{\ln b})^x \ln b = b^x \ln b.$$

Aufgabe 2: Die Ableitung des Ausdrucks lautet $-\frac{1}{x^2}$. Dies kann über die Quotienten- oder Potenzregel hergeleitet werden.

Aufgabe 3: Man bestimme den Grenzwert der folgenden reellen Zahlenfolgen für $n \rightarrow \infty$ oder gebe an, dass dieser nicht existiert.

- (a) 0
- (b) 1
- (c) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)
- (d) 0
- (e) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)
- (f) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)
- (g) $\frac{1}{6}$
- (h) 0
- (i) existiert nicht

Aufgabe 4:

- (a) $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$
- (b) 1

(c) $-y \sin(\ln(x) + e^x)(x^{-1} + e^x)$

(d) $-\frac{1}{(\sin(x))^2}$

(e) $-\sin(z \sin(x))z \cos(x)$

(f) $-\sin(x) \tan(x) + \cos(x)(1 + (\tan(x))^2)$ (alternativ kann man die Funktion zunächst zu $\sin(x)$ vereinfachen, so dass die Ableitung $\cos(x)$ entspricht.)

(g) $2 \cdot 2^{x^2} x \ln(2)$

(h) $\frac{(-\sin(x) + 2x^{-1})}{(3x^3 + 2x - 1)} - \frac{(\cos(x) + \ln(2x^2))(9x^2 + 2)}{(3x^3 + 2x - 1)^2}$

(i) $\frac{1}{5} \left(-2 \frac{\sin(x^2)x \ln(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x^2)}{\cos(x)x} + \frac{\cos(x^2) \ln(x) \sin(x)}{(\cos(x))^2} \right) \left(\frac{\cos(x^2) \ln(x)}{\cos(x)} \right)^{-4/5}$

Aufgabe 5:

(a) 0 (c) 0

(b) 0 (d) 0

Aufgabe 6:

(a) -3 (d) 0

(b) 3 (e) $\ln(2) - \frac{1}{2}$

(c) 6 (f) -3

3.7 Integrale

Aufgabe 1:

(a) $\left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x\right]_3^5 = 122$

(b) $[\ln(x + e)]_e^{2e} = -\ln 2 + \ln 3$

(c) $[\sin(x) - \cos(x)]_\pi^{2\pi} = -2$

(d) $\left[\frac{2}{x+1}\right]_2^6 = -2 \ln 3 + 2 \ln 7$

(e) 0 (es ist keine Stammfunktion zu bestimmen, da untere und obere Integrationsgrenze identisch sind)

(f) Beide Integrale können aufgrund gleicher Integrationsgrenzen zu einem zusammengefasst werden. Nach Satz 3.6.16 ist der Integrand dann 1. Somit gilt $[x]_{-1}^6 = 7$.

Aufgabe 2:

(a) $\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

$$(b) [x \sin x]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [x \sin x]_{\pi}^{2\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2\pi \sin(2\pi) - \pi \sin \pi + \cos(2\pi) - \cos \pi = 2$$

(c) Bei diesem Integrand hilft es, den Faktor 1 hinzuzufügen, um die Regel der partiellen Integration verwenden zu können:

$$[x \ln x]_2^3 - \int_2^3 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x]_2^3 - [x]_2^3 = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 4 - 1 = \ln \frac{27}{4} - 1$$

$$(d) [x^2 e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x e^x \, dx = [x^2 e^x]_{-1}^1 - \left([2x e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x \, dx \right) = [x^2 e^x]_{-1}^1 - [2x e^x]_{-1}^1 + [2e^x]_{-1}^1 = e - \frac{5}{e}$$

Aufgabe 3:

$$(a) \frac{1}{2} \int_0^2 2x \cos(x^2 + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \cos(t) \, dt = \frac{1}{2} [\sin t]_1^5 = \frac{1}{2} (\sin 5 - \sin 1)$$

$$(b) \frac{1}{3} \int_2^4 \frac{3}{3x-2} \, dx = \frac{1}{3} \int_4^{10} \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{3} [\ln t]_4^{10} = \frac{1}{3} (\ln 10 - \ln 4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$$

(c) Diese Aufgabe ist aufgrund eines Fehlers in der Aufgabenstellung leider nicht lösbar. Solltest du dies vorher gemerkt haben, ist dies aber doch auch eine ganz interessante Erkenntnis.

$$(d) \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{2x}{\exp(x^2)} \, dx = \frac{1}{2} \int_9^{25} e^{-t} \, dt = \frac{1}{2} [-e^{-t}]_9^{25} = \frac{1}{2} (-e^{-25} + e^{-9}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^9} - \frac{1}{e^{25}} \right)$$

Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende
Mathematisches Grundwissen für den Einstieg ins
Studium als Nicht-Mathematiker

Klinger, M.

2015, XIII, 189 S. 60 Abb., 12 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-06595-9