2 Kartesische Koordinaten

Eddi Einstein hatte mit seinem Freund das Bild der Zahlengeraden mit allen Reellen Zahlen ja bereits früher in den Sand gezeichnet (Abb. 2.1).

„Ich habe eine Idee“, sagte Eddi wenig später zu Rudi. Der wehrte ab: „Verschone mich! Wieder so ein theoretisches Zeug… eine neue Art von Zahlen oder so.“ „Nein, ich möchte auf die Zahlengerade im Nullpunkt eine senkrechte Linie mit einer zweiten Zahlengeraden errichten. So kann ich Punkte in einer Ebene bestimmen.“ „Sag’ ich doch: theoretisches Zeug! Verschone mich!“ Und Rudi ging seiner Wege.

Nun muss man wissenschaftliche Erkenntnisse manchmal auch gegen den Widerstand der Uninteressierten durchsetzen. Eddi brauchte einen Verbündeten. Siggi. Er sollte ihm sagen, ob seine Vorstellung Zukunft hätte.

Eddi fand Siggi auf einer Lichtung, wo er auf einem Bein im Kreise tanzte und jaulend „Ei jei-jei-jei“ sang. Verwundert erkundigte er sich, ob jener sich etwas in den Fuß getreten habe. Die Antwort beruhigte und erstaunte ihn zugleich: Siggi verriet ihm, er habe sich in Trance versetzt und in die Zukunft geschaut, in eine ferne Zukunft, die er – Eddi – sich kaum vorstellen könne. Er habe schon gewusst, dass er kommen würde und Hilfe bräuchte. Man nenne es „kartesische Koordinaten“, verriet ihm Siggi. „Was ist *das* denn?“, wollte Eddi wissen. „Das muss ich noch erahnen“, antwortete Siggi, „doch deine Idee mit der senkrechten Achse macht Sinn.“ Abwesend fügte er hinzu: „Aber *du* bist ja der Denker – mach’ was draus! Was du in den Sand gezeichnet hast, war ja absolut korrekt.“

J. Beetz, *Funktionen für Höhlenmenschen und andere Anfänger,* essentials,
DOI 10.1007/978-3-658-06686-4_2

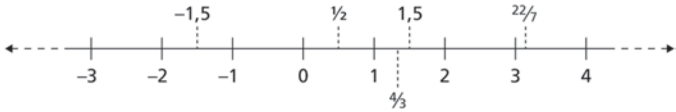
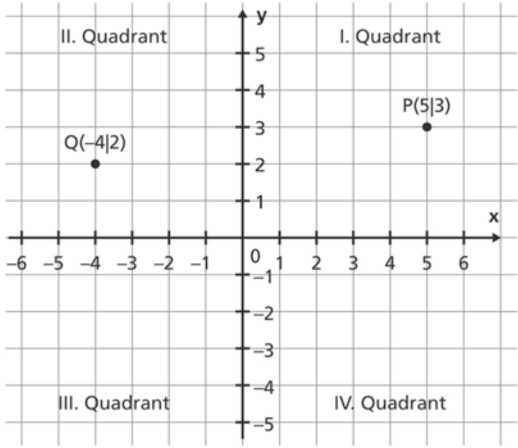


Abb. 2.1 Die Zahlengerade zeigt alle Reellen Zahlen

Abb. 2.2 Kartesische Koordinaten stellen Abhängigkeiten zwischen x und y dar



Verwirrt blickte Eddi ihn an. *Was konnte er wissen – Seher hin oder her?*[1], fragte er sich. Er konnte doch nicht gesehen haben, wie er die beiden Linien in den Sand gezeichnet hatte (Abb. 2.2) – oder doch?!

Nun konnte man in dieser Ebene nicht nur alle Punkte markieren (wie oben P mit $x = 5$ und $y = 3$), sondern ganze Punkthaufen, durch die man eine Linie ziehen konnte.

Das Koordinatensystem mit seinen Möglichkeiten wurde schnell beliebt. Striche an zwei Achsen zu machen und Punkte an ihren Schnittlinien zu markieren, das konnte jeder. Die meisten beschränkten sich auf positive Werte, also den ersten Quadranten. Einer hielt die wöchentliche Entwicklung seiner Kinder in Wachstumskurven fest, ein anderer (der Astronom) die Höhe der Sonne abhängig von

[1] Siggi kannte den Philosophen, Mathematiker und Naturwissenschaftler René Descartes (latinisiert *Renatus Cartesius*; 1596–1650), dem die Erfindung des Kartesischen Koordinatensystems zugeschrieben wird (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Descartes und http://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Koordinatensystem).

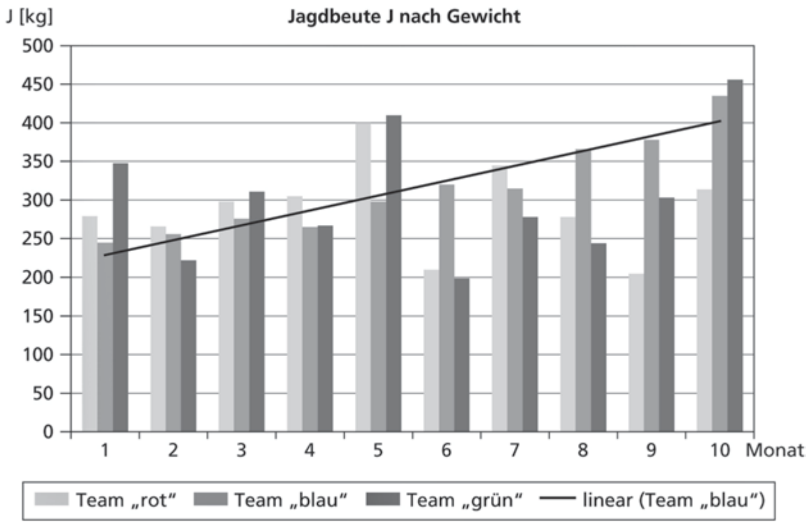


Abb. 2.3 Balkendiagramm der Jagdbeute abhängig vom Monat

der Tageszeit. Der Nahrungsverwalter behielt eine Übersicht über die Entwicklung seiner Vorräte, viel anschaulicher als in seinen Zahlentabellen. Die Viehbesitzer zeichneten die Entwicklung ihrer Herde abhängig von der Jahreszeit auf.

Natürlich konkurrierten Männer schon damals. Jagen diente nicht nur der Nahrungsversorgung, es war auch ein sportlicher Wettkampf. Die drei Jagdgruppen wetteiferten um den Titel „Team des Monats" – und um es einfach zu machen, wurde einfach das Gesamtgewicht der Beute anstelle der Stückzahl erfasst. Schließlich ist ein erlegtes Mammut etwas anderes als ein getöteter Hase.

So hing bald am Höhleneingang, sorgfältig gegen die Witterung geschützt, ein Diagramm, das die Jagdbeute der drei Teams „rot", „blau" und „grün" abhängig vom Monat zeigte (Abb. 2.3). Der Stammeshäuptling hatte die Zahlen geliefert, Eddi das Diagramm angefertigt.

Die Verwendung des Koordinatensystems erlaubt jedoch noch eine völlig andere Interpretation. Bisher haben wir nur einfache Punktehaufen in der x|y-Ebene betrachtet, ob als Balken, Punkte oder Linien dargestellt. Aber weitgehend zusammenhanglos, eine Abhängigkeit des y-Wertes vom x-Wert in der Form einer Regel ist nicht zu erkennen. Es wäre doch schön, wenn die kontinuierliche Leistungssteigerung des Teams „blau" über die Monate zu einer Rechenformel führen könnte: Jagdleistung $y_{\text{blau}} = a + b \cdot x$, wobei x der Monat ist. Eine Gerade, wie man sieht.

Über die zwei Konstanten a und b kann man sich dann ja immer noch Gedanken machen. Die lineare Trendlinie ließ sich ja bequem nach Augenmaß einzeichnen, wie man sehen konnte.

Der Anführer der Jagdgemeinschaften hatte auf natürliche Weise die Zeit (in diesem Fall den Monat) als waagerechte Achse seines Diagramms gewählt. Die x-Achse wird häufig als Zeitachse verwendet und dann oft mit dem Buchstaben t (lateinisch *tempus* = Zeit) gekennzeichnet.

2.1 Das Herz des Koordinatensystems: die „Funktion"

Jetzt bleiben wir mal in der Gegenwart und führen uns das Prinzip der Funktion noch einmal vor Augen. Eine Funktion ist eigentlich eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnet. Das hört sich sperrig an, wird aber sofort klar: Die „Elemente der einen Menge" sind Werte auf der x-Achse, auch „Funktionsargument" oder „unabhängige Variable" genannt, die wir frei bestimmen können. Der „Funktionswert" oder die „abhängige Variable" ist der zugehörige y-Wert, der durch die Funktion bestimmt wird. Im modernen Sprachgebrauch kann man sagen: Eine Funktion ist eine *black box*. Ein Wert x fließt hinein, wird verarbeitet und kommt verändert als y wieder heraus. Eine Abbildungsvorschrift, ein Transformationsapparat, eine Wurstmaschine. Kennt man die Transformationsregel der Beziehung zwischen den zwei Mengen x und y (was meist der Fall ist), dann wird die Funktion eine *white box*. Der mentalen Hygiene halber sollte man auch den Unterschied zwischen einer Funktion an sich und dem Wert der Funktion an einer bestimmten Stelle auseinander halten.

Die Funktion ist… na, klar: eine Gleichung (erst einmal ins Unreine gesprochen). Beginnen wir mit dem einfachsten Beispiel: $y = x$. „Langweilig!", werden Sie sagen. Zu jedem x-Wert, den ich aus der Menge der reellen Zahlen frei aussuchen kann (ob 0, 1, -17, 365 oder π), ergibt sich der Funktionswert, der in diesem Fall exakt gleich groß ist. Die entsprechende „Kurve" im Koordinatensystem ist – das werden Sie schon messerscharf geschlossen haben – eine Gerade, eine 45°-Linie, wenn die Maßstäbe auf der x- und y-Achse gleich sind. Denn eine „Kurve" ist für Mathematiker nicht etwa eine Straßenkrümmung, sondern ein Funktionsverlauf in einem Koordinatensystem (und sie ist selbst dann eine, wenn sie schnurgerade ist!).

Funktionen haben oft (aber nicht notwendigerweise) Namen, z. B. allgemeine wie „f" oder „g" oder (aussagekräftige) wie „sin" oder „exp" (zu ihrer Bedeutung kommen wir noch). Man definiert sie, indem man eine explizite Zuweisung macht,

z. B. durch eine Gleichung wie f(x) = x oder g(x) = x^2. Hier ist also „f“ der Name der Funktion (allgemein, nur um sie von einer anderen zu unterscheiden), „x“ das „Argument“ (der *input*) und „f(x)“ der dem Argument zugeordnete Wert (also der *output*), den man als y-Wert in einem Koordinatensystem x|y zeichnen kann. Insofern ist eine Funktion nicht eine bloße Gleichung, sondern eine Regel, die man durch eine Gleichung definieren kann.

Nehmen wir eine Funktion y = f(x). So ist oft die allgemeine Schreibweise, wenn man die Art der Abhängigkeit noch nicht festgelegt hat („*black box*“), sondern nur die Variablen benennen und dem Ausgang bzw. Eingang zuordnen will. Man spricht das als „y gleich f von x“. Manchmal findet man auch eine „Kurzform“, nämlich y(x) – damit sind abhängige und unabhängige Variable benannt. Denn Sie erinnern sich ja: Für bestimmte Variablen hat sich in der Mathematik und besonders in der Physik eine bestimmte Bezeichnung eingebürgert, etwa s für einen Weg oder t für die Zeit. Also schreibt man s = f(t) und sagt: „Der Weg ist eine Funktion der Zeit“ oder „s gleich f von t“. *Welche* Funktion, das ist noch offen. Die Klammern haben hier also eine andere Bedeutung als in Ausdrücken wie $(a+b)^2$. Nun sind Ihrer Phantasie keine Grenzen gesetzt. Schauen wir uns die einfachsten Funktionen im Diagramm an: y = x, y = x^2, y = 1/x. Wir betrachten sie im Bereich von x = −3 bis x = +3 (Abb. 2.4).

Die Gerade y = x ist (wegen der unterschiedlichen Achsenmaßstäbe) keine 45°-Linie, sondern flacher. Die Parabel y = x^2 ist zur y-Achse symmetrisch, was ja nicht anders zu erwarten war: $-x \cdot -x = +x$. Sie wächst für $x \to \pm\infty$ natürlich auch gegen Unendlich.

Die Hyperbel ist auf den ersten Blick harmlos: Sie wird für wachsende x immer kleiner oder für schwindende x immer größer. Also für x = 5 ist y = 0,2 und x = 10 ist y = 0,1. Oder umgekehrt für x = 1 ist y = 1 und für $x = 1/2$ ist y = 2. Nichts deutet auf die Katastrophe hin, die sich bei x = 0 ereignet. Die Mathematik macht keine Sprünge – jedenfalls meistens nicht. Doch wenn sie welche macht, sind auch sie logisch. Ein Beispiel ist die Hyperbel y = 1/x. Geht ein positives x gegen null, geht y gegen Unendlich und „springt“ auf minus Unendlich, wenn x negativ wird. Sie hat im Nullpunkt eine „Unstetigkeit“, wie man sagt. Einen y-Wert, der nicht definiert ist. Für x = 0 ist y = 1/0, was Sie ja als „verbotene“ Operation kennen gelernt haben. Bei x = 0 ist $y = -\infty$ bzw. $y = +\infty$, je nachdem, von welcher Seite Sie kommen. Das hatten wir ja schon kurz erwähnt. Es ist wie der „blinde Fleck“ im Auge eines Menschen, nur erheblich kleiner. Unendlich klein, um genau zu sein. Noch präziser: die Breite der Unstetigkeit ist 0. Die Hyperbel hat bei x = 1 den Wert y = 1 und bei x = −1 den Wert y = −1. Innerhalb dieses schmalen Streifens steigt ihr Absolutwert (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) rasant an, denn $1/0{,}000.001 = 1/10^{-6} = 10^6$. Umgekehrt nähert sie sich außerhalb des schmalen Inter-

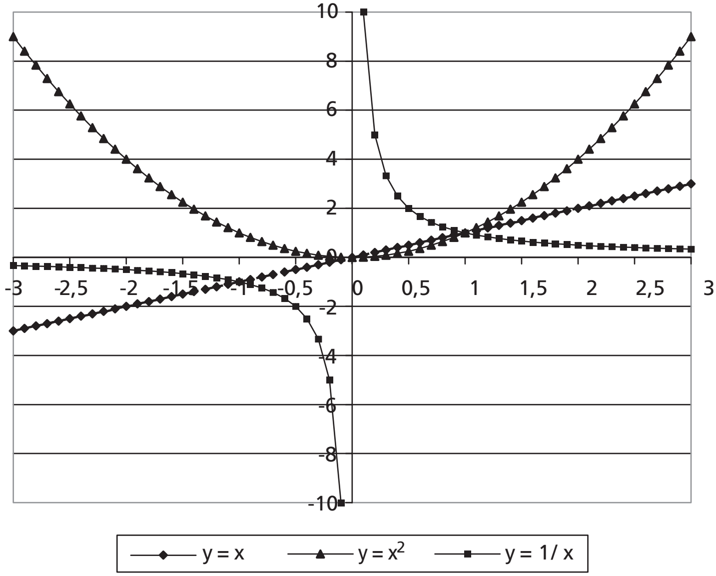


Abb. 2.4 „Bekannte" Funktionen im Koordinatensystem

valls $-1|+1$ schnell der Nulllinie. Willa würde sagen, die Parabel sei perfekt, die Hyperbel jedoch sei schön – denn Schönheit ist Perfektion und Symmetrie plus einem „Schönheitsfleck", einem ästhetischen Bruch.

Natürlich kann man auch geometrische Figuren im Koordinatensystem darstellen, denn nicht alle Kurven streben für $x \to \infty$ gegen 0 oder Unendlich. Manche wiederholen sich bis zum Ende aller Tage. Wir werden noch Funktionen kennen lernen, die genau dieses Verhalten zeigen. Man spricht dann von „Periodizität" oder periodischem Verlauf – Werte, die sich in regelmäßigen Abständen wiederholen. Denken Sie sich eine Welle, eine Schwingung, die nie abklingt (in der Physik, also der realen Welt, nicht möglich – in der Mathematik, also der abstrakten Welt, eine leichte Übung).

Auch der Kreis mit dem Radius r lässt sich im Koordinatensystem leicht darstellen, wie Sie sofort sehen – der gute alte „Pythagoras" hilft uns dabei. Denn $r^2 = x^2 + y^2$, und das lässt sich ja bequem nach y auflösen (Abb. 2.5). Natürlich ist y für $x > r$ nicht definiert – oder ist es Ihnen schon gelungen, die Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen, also aus $(r^2 - x^2)$ für $x > r$?! Na, sehen Sie! Und seine perfekte Symmetrie erklärt sich mathematisch nicht nur aus der Tatsache, dass y für ein positives x denselben Wert wie für ein negatives x hat (wegen der Quadrierung,

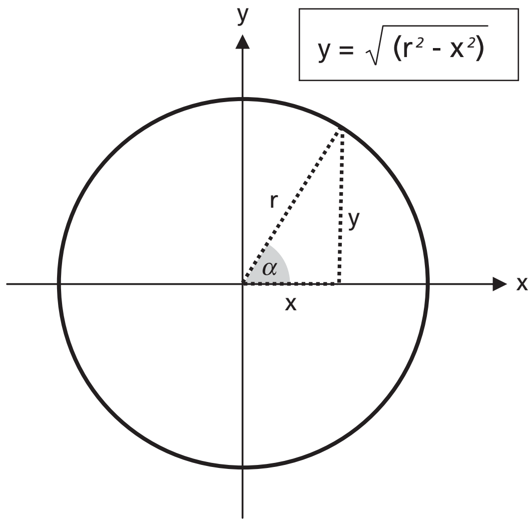


Abb. 2.5 Der Kreis im Koordinatensystem

Symmetrie zur y-Achse). Es ergeben sich auch für jede Wurzel zwei Lösungen – daher stammt die Symmetrie zur x-Achse (denn z. B. ist mit $r=1$ bei $x=½$ das $y=\pm½\cdot\sqrt{3}$).

Jetzt wird der Kreis gestaucht – Resultat: die Ellipse, eine spezielle geschlossene ovale Kurve. Wenn $x^2+y^2=1$ die Gleichung des Kreises mit dem Radius 1 ist (der „Einheitskreis"), dann ist die Gleichung eines entlang der x-Achse um a und entlang der y-Achse um b gestauchten Kreises logischerweise $(x/a)^2+(y/b)^2=1$.

2.2 Die Königin: die Exponentialfunktion

Eddi hatte inzwischen herausgefunden, dass es besser war, Siggi gleich nach den richtigen Fachbegriffen für seine Entdeckungen zu fragen, anstatt sich selbst den Kopf zu zerbrechen. Es war ja auch nicht sinnvoll, einen Begriff zu prägen, der sich in der Zukunft nicht durchsetzen würde. Außerdem festigte dies die Zusammenarbeit mit Siggi und damit die Akzeptanz seiner – für viele seiner Stammensgenossen manchmal ungewöhnlichen – Entdeckungen.

Deswegen beschäftigte er sich jetzt mit der „Exponentialfunktion" $y=\text{irgendwas}^x$ oder in mathematische Schreibweise $y=a^x$. Zum Beispiel $y=2^x$ oder $y=3^x$. Also eine fortlaufende Multiplikation der Basis a mit sich selbst – das Ganze x Mal, wie die kleine Zahl im sog. „Exponenten" angibt. Das sind echte Wumm!-

Funktionen (ein Begriff, den Sie in keinem Mathe-Buch finden), weil die y-Werte sehr schnell sehr groß werden. Wenn $a=10$, dann machen wir Sprünge in Zehnerpotenzen. Die Basis a, das sei fast überflüssigerweise erwähnt, muss natürlich eine Bedingung erfüllen: $a>0$. Oft wird auch $a \neq 1$ angegeben, denn die Exponentialfunktion mit $a=1$ ist etwas langweilig, weil sie überall den Wert 1 hat. Für a können wir eine beliebige reelle Zahl nehmen, egal, wie krumm – sagen wir: 2,7182818. Wir kennen sie unter dem Namen „e", die „Eulersche Zahl". Vernachlässigen wir vorerst die Frage, wie wir denn z. B. $2{,}7182818^{1,5}$ (also $e^{1,5}$) mit vertretbarem Aufwand berechnen. Prinzipiell ist dieser Fall ja klar: $1{,}5=3/2$ und nach den bekannten Potenzgesetzen ist das die Quadratwurzel (d. h. $e^{1/2}$) aus e^3. Was die Rechnerei auch nicht einfacher macht – aber das haben andere schon für uns erledigt. Die „e-Funktion" ist keine Unbekannte und bereits nach allen Himmelsrichtungen untersucht

Interessant ist der Verlauf der „e-Funktion": Bei $x=0$ ist sie 1 (alles hoch null ist ja 1), für negative x wird sie bei $x=-1$ zu $1/e$, bei $x=-2$ zu $1/e^2$ und bei $x=-3$ zu $1/e^3$. Sie nähert sie für negative x also auch sehr schnell der Nulllinie. Auf der anderen Seite der y-Achse wächst sie… „exponentiell", wie Sie zu Recht vermuten. Den Begriff hört man ja oft. Sie wird sehr schnell sehr groß. Bei $x=5$ ist $y \approx 148$ und bei $x=10$ ist $y \approx 22.000$. Hinter alle diese Geheimnisse der „Königin der Funktionen" war Eddi auch schon gekommen. Deswegen konnte er sie an der Höhlenwand mit einem neuen Kohlestift skizzieren (Abb. 2.6).

Rudi fand das auch elegant. Eine neue Art von „Wumm!-Kurve", sozusagen.

„Der Logarithmus beschäftigt mich noch", gestand Rudi seinem Freund, „denn es kann ja nicht sein, dass ausgerechnet und immer die 10 die Basis ist." Er malte zur Erinnerung noch einmal den Zusammenhang „$10^x=a \Rightarrow x=\log a$" in den Sand und fuhr fort: „Ich könnte doch genauso gut den Logarithmus zur Basis 2 oder 4711 oder π bilden." Eddi stimmte zu: „Wo du Recht hast, hast du Recht. Deswegen schreibt man die Basis manchmal tiefgestellt dran, zum Beispiel $\log_{10} a$ oder $\log_2 a$. Aber meist wird mit dem Zehnerlogarithmus gearbeitet und mit einem besonderen Spezi, dem du schon oft begegnet bist." „Und der wäre?" „Euler. Der so genannte „natürliche Logarithmus" zur Basis e, einer ausgesprochen krummen Zahl, wie du weißt." „Ja, geradezu irrational", sagte Rudi, „Lass uns die Funktionen doch einmal aufzeichnen!" (Abb. 2.7).

Dann diskutierten sie eine Weile darüber, aber das würde uns hier keine tieferen Erkenntnisse bringen. Der Logarithmus von 1, zu welcher Basis b auch immer, ist 0, denn b^0 ist 1. Es ist auch klar, dass kein Logarithmus, zu welcher Basis auch immer, im Punkt 0 definiert ist, denn es gibt kein x, für das 10^x oder e^x ein Ergebnis 0 liefern würde. Man kann sich herantasten: $10^{-6=}0{,}000.001$, und dieses Millionstel

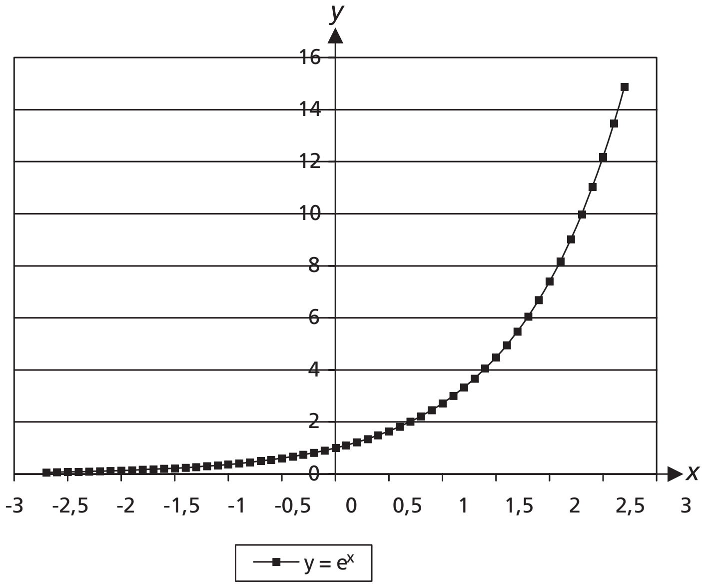


Abb. 2.6 Der Verlauf der „e-Funktion“

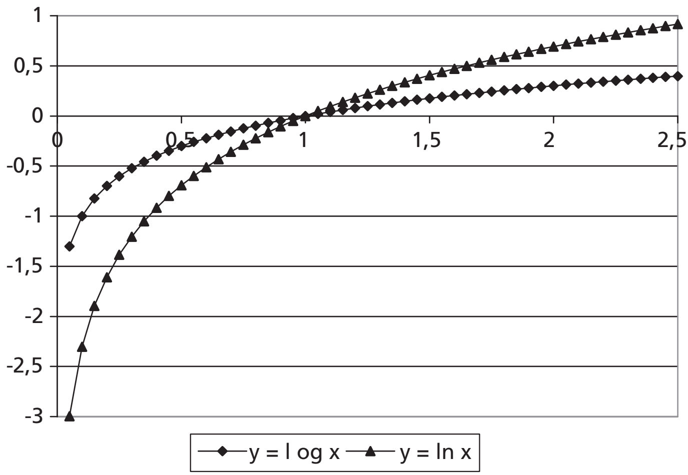


Abb. 2.7 Logarithmus zur Basis 10 und e (log und ln)

auf der x-Achse abgetragen liefert im Zehnerlogarithmus den y-Wert von -10. Aber nichts außer $10^{-\infty}$ ist 0.

Logarithmische Skalen treffen wir häufig an. Eine davon ist die „Richterskala“, mit der die Energiefreisetzung von Erdbeben gemessen wird. Wenn also demnächst wieder ein AKW auf einer tektonischen Falte wackelt, dann wissen Sie: *Ein* Punkt mehr (z. B. von 6,0 auf 7,0) bedeutet eine Ver*zehn*fachung der Stärke und zwei Punkte die hundertfache Stärke. Das Lexikon sagt uns, dass die „äquivalente explosive Energie“ W in Tonnen TNT mit der „Magnitude“ M der Richterskala wie folgt zusammenhängt:

$$M = 2 + \frac{2}{3}\log_{10} E \text{ oder umgekehrt } E = 10^{\frac{3}{2}(M-2)}$$

Logarithmen bestimmen auch viele andere Aspekte des Lebens. Die Stärke eines Sinneseindrucks in Abhängigkeit von einer physikalischen Größe wie Helligkeit oder Lautstärke nimmt zum Beispiel entsprechend dem Verlauf einer Logarithmusfunktion zu, ebenfalls die wahrgenommene Tonhöhe in Abhängigkeit von der Frequenz eines Tones.

Wenn sich also Ihr Nachbar bei Ihnen über die laute Musik beschwert, dann antworten Sie ihm doch locker lächelnd: „Wieso? Es ist doch nur *ein* Bel mehr!“ Die Veränderung von 60 auf 70 dB („dB“ ist eine „Dezibel“ und somit $^1/_{10}$ Bel) ist aber eine Verzehnfachung des Schalldrucks – und wehe, Ihr Nachbar kommt dahinter!

Jetzt lohnt es sich, einen Blick auf einen kleinen Kunstgriff zu werfen. Niemand verlangt ja, dass die Maßstäbe der x- und der y-Achsen identisch sind. Das haben Sie ja schon in vielen Abbildungen hier gesehen. Es waren beides jedoch immer *lineare* Skalen: Die Strecke zwischen $x=1$ und $x=2$ ist genau so groß wie die zwischen $x=11$ und $x=12$. Muss das so sein?

Diese Frage stellen heißt, sie verneinen. Warum stauchen wir nicht die Achsen mit Hilfe des Logarithmus?! Besonders gerne macht man das mit der y-Achse: Sie bekommt einen „logarithmischen Maßstab“. Das macht Sinn, wenn der Wertebereich der dargestellten Daten viele Größenordnungen umfasst. Aber es „verfälscht“ auch die dargestellten Kurven, wie Sie gleich sehen werden (Abb. 2.8). In der „guten alten Zeit“, als man Kurven noch mit der Hand auf Millimeterpapier zeichnete, verwendete man hierfür „Logarithmenpapier“.

Wer hätte das gedacht? Die optisch so eindrucksvollen Wumm!-Kurven aus Abb. 2.6 mutieren in Abb. 2.8 zu einfachen Geraden, die optisch ihre Bedeutung gut verstecken können. Das freut die „Zukunftsforscher“: Man nimmt ein Lineal,

http://www.springer.com/978-3-658-06685-7

Funktionen für Höhlenmenschen und andere Anfänger
Koordinatensysteme zur Darstellung von
Abhängigkeiten in der Mathematik
Beetz, J.
2015, XI, 55 S. 25 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-06685-7