

Kapitel 2

Symmetrien der Ebene und des Raumes

2.1. Affine Abbildungen und Schwerpunkte

Wir erinnern daran, dass \mathcal{E}^n den affinen Raum aller Punkte und $V(\mathcal{E}^n)$ den zugrunde liegenden euklidischen Vektorraum bezeichnet. Im weiteren benötigen wir nicht nur den Begriff der linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, sondern auch den Begriff der affinen Abbildung. Diesen besprechen wir nochmals.

Definition 1. Eine Abbildung $f : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ nennt man *affine Abbildung*, falls für beliebige vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ aus der Beziehung

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = t \cdot \overrightarrow{P_3 P_4}$$

die gleiche Beziehung für die Bildpunkte folgt,

$$\overrightarrow{f(P_1) f(P_2)} = t \cdot \overrightarrow{f(P_3) f(P_4)}.$$

Es genügt, diese Eigenschaft nur für drei Punkte zu fordern.

Proposition 1. Ist $f : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für beliebige drei Punkte P_1, P_2, P_3 und für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ aus

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = t \cdot \overrightarrow{P_1 P_3}$$

die entsprechende Beziehung für die Bildpunkte folgt,

$$\overrightarrow{f(P_1) f(P_2)} = t \cdot \overrightarrow{f(P_1) f(P_3)},$$

so ist f eine affine Abbildung.

Beweis. Wir zeigen die Eigenschaft zunächst für $t = 1$. Gilt $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_3 P_4}$, so sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 die Ecken eines Parallelogramms. Die Parallelogrammeigenschaft ist gleichbedeutend damit, dass die beiden Diagonalen des Vierecks P_1, P_2, P_3, P_4 durch ihren Schnittpunkt I jeweils in der Mitte geteilt werden. Also gilt $\overrightarrow{IP_1} = -\overrightarrow{IP_3}$ und $\overrightarrow{IP_2} = -\overrightarrow{IP_4}$. Nach Voraussetzung über f besteht diese Relation auch für die Bildpunkte,

$$\overrightarrow{f(I) f(P_1)} = -\overrightarrow{f(I) f(P_3)}, \quad \overrightarrow{f(I) f(P_2)} = -\overrightarrow{f(I) f(P_4)}.$$

Der Punkt $f(I)$ ist daher der Schnittpunkt der Geraden $G(f(P_1), f(P_3))$ und $G(f(P_2), f(P_4))$, und die Punkte $f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)$ bilden die Ecken eines

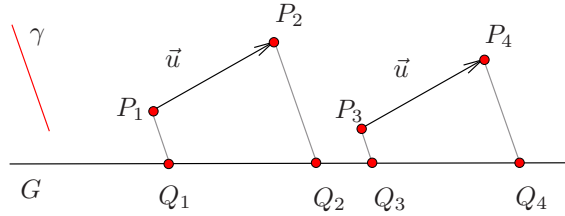
Parallelogramms. Damit ist die Aussage für vier beliebige Punkte und $t = 1$ bewiesen. Seien nun P_1, P_2, P_3 und P_4 vier Punkte mit $\overrightarrow{P_1P_2} = t \cdot \overrightarrow{P_3P_4}$. Wir betrachten einen weiteren Punkt P_4^* , der durch die Bedingung $\overrightarrow{P_3P_4^*} = t \cdot \overrightarrow{P_3P_4}$ festgelegt wird. Er ist so gewählt, dass P_1, P_2, P_3 und P_4^* erneut die Ecken eines Parallelogramms bilden. Nach dem soeben Gezeigten bilden die Punkte $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ und $f(P_4^*)$ ein Parallelogramm. Andererseits gilt nach Voraussetzung über f die Beziehung $\overrightarrow{f(P_3)f(P_4^*)} = t \cdot \overrightarrow{f(P_3)f(P_4)}$. Insgesamt erhalten wir

$$\overrightarrow{f(P_1)f(P_2)} = \overrightarrow{f(P_3)f(P_4^*)} = t \cdot \overrightarrow{f(P_3)f(P_4)}. \quad \square$$

Sei $f : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ eine affine Abbildung und $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ ein Vektor, der durch das Punktpaar P_1, P_2 dargestellt wird. Ist nun P_3, P_4 ein weiteres Punktpaar, welches \vec{u} realisiert, dann ist P_1, P_2, P_3, P_4 ein Parallelogramm. Weil f eine affine Abbildung ist, bilden die Bildpunkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ebenfalls ein Parallelogramm mit $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_3Q_4}$. Folglich können wir eine Abbildung $L(f) : V(\mathcal{E}^n) \rightarrow V(\mathcal{E}^n)$ definieren durch

$$L(f)(\vec{u}) = L(f)(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{f(P_1)f(P_2)} = \overrightarrow{Q_1Q_2}.$$

Wir nennen $L(f)$ die zu f assoziierte *Vektorabbildung* oder *vektorielle Abbildung*.



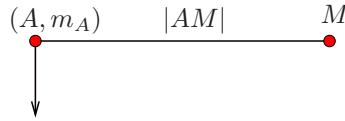
Satz 1. Jede Vektorabbildung $L(f) : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ ist eine lineare Abbildung.

Beweis. Für zwei Vektoren \vec{u}, \vec{v} seien P_1, P_2 und P_3 drei Punkte mit $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{v} = \overrightarrow{P_2P_3}$ und Q_1, Q_2, Q_3 seien ihre Bildpunkte unter f . Dann ist einerseits $L(f)(\vec{u} + \vec{v}) = L(f)(\overrightarrow{P_1P_3}) = \overrightarrow{Q_1Q_3}$ und andererseits

$$L(f)(\vec{u}) + L(f)(\vec{v}) = \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2Q_3} = \overrightarrow{Q_1Q_3},$$

also $L(f)(\vec{u} + \vec{v}) = L(f)(\vec{u}) + L(f)(\vec{v})$. Betrachte nun einen Vektor \vec{u} und eine reelle Zahl t sowie drei Punkte P_1, P_2 und P_3 , die $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ und $t\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_3}$ erfüllen. Dann ist $L(f)(t\vec{u}) = L(f)(\overrightarrow{P_1P_3}) = \overrightarrow{Q_1Q_3}$ und $t \cdot L(f)(\vec{u}) = t \cdot L(f)(\overrightarrow{P_1P_2}) = t \overrightarrow{Q_1Q_2}$. Weil f eine affine Abbildung ist, sind diese Vektoren gleich. Es folgt $t L(f)(\vec{u}) = L(f)(t\vec{u})$, d.h. $L(f)$ ist eine lineare Abbildung. \square

Wir betrachten zwei Punktmassen m_A und m_B , die in den Punkten A und B konzentriert sind und dort alleine der nach unten wirkenden Schwerkraft unterliegen. Nach dem Hebelgesetz ist das Drehmoment, welches in einem Punkte M durch die Masse m_A angelegt wirkt, proportional zum Produkt aus Hebelarm und Hebellast, also proportional zu $m_a \cdot |AM|$.



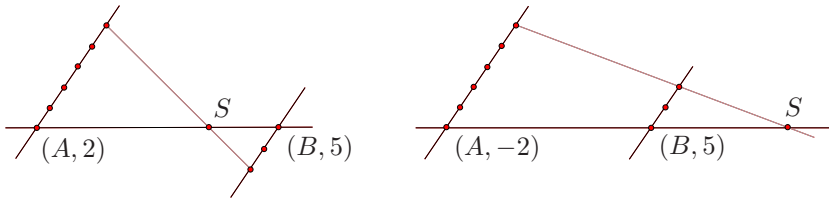
Der Schwerpunkt S des Systems der beiden gewichteten Massenpunkte (A, m_A) und (B, m_B) ist nun derjenige Punkt zwischen A und B , für den die beiden Drehmomente genau gleich sind. In Vektorschreibweise ist also S eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$m_A \cdot \overrightarrow{SA} + m_B \cdot \overrightarrow{SB} = 0.$$

Insbesondere muss das Verhältnis der Abstände von A bzw. B zu S invers proportional zum Verhältnis der Massen sein,

$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{m_B}{m_A}.$$

Lässt man die Möglichkeit einer „negativen“ Schwerkraft zu (oder denkt man statt an Massen an elektrisch geladene Teilchen), so müssen m_A und m_B nicht notwendig positiv sein, sondern können jeden beliebigen reellen Wert annehmen. Allerdings muss man dann $m_A \neq -m_B$ voraussetzen, denn die Gleichung $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB}$ hat im Fall $A \neq B$ keine Lösung. Aufgrund des Strahlensatzes kann man S für rationales m_A und m_B mittels zweier paralleler Geraden durch A und B ganz leicht konstruieren:



Mit dieser Motivation können wir nun den *gewichteten Schwerpunkt* eines Systems von Massenpunkten erklären. Seien im \mathcal{E}^n gewichtete Punkte $(A_1, m_1), \dots, (A_p, m_p)$ mit $m_i \in \mathbb{R}$ gegeben und bezeichne $m := \sum_{i=1}^p m_i$ die Summe der Gewichte m_i , die wir *Masse* des Systems nennen wollen. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathcal{E}^n \rightarrow V(\mathcal{E}^n)$ durch

$$f(M) := \sum_{i=1}^p m_i \cdot \overrightarrow{MA_i}, \quad M \in \mathcal{E}^n.$$

Ist $M' \in \mathcal{E}^n$ ein weiterer Punkt, so ergibt eine leichte Umformung

$$(*) \quad f(M) = \sum_{i=1}^p m_i \cdot (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i}) = m \cdot \overrightarrow{MM'} + f(M').$$

Der gewichtete Schwerpunkt dieses Systems wäre nun derjenige Punkt S , für den $f(S) = 0$ gilt. Hierzu ist eine Fallunterscheidung nötig. Gilt $m = 0$, so ist die Abbildung f konstant; entweder alle Punkte oder aber gar kein Punkt erfüllt die

Bedingung $f(S) = 0$. Ein Schwerpunkt lässt sich in diesem Fall nicht eindeutig definieren. Ist dagegen $m \neq 0$, so sei $O \in \mathcal{E}^n$ ein beliebiger fester Punkt. Die Bedingung $f(S) = 0$ ist nach Gleichung (*) äquivalent zu $f(O) = m \overrightarrow{OS}$, so dass S sich in der Tat eindeutig durch

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{m} f(O) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^p m_i \overrightarrow{OA_i}$$

definieren lässt.

Definition 2 (Gewichteter Schwerpunkt). In Fall $m \neq 0$ heißt S der *gewichtete Schwerpunkt* oder das *Baryzentrum* der gewichteten Punkte $(A_1, m_1), \dots, (A_p, m_p)$. Sind alle Gewichte $m_i \neq 0$ gleich, so heißt S einfach nur *Schwerpunkt* oder *Isobaryzentrum*.

Die folgende Eigenschaft besagt, dass man in einem großen System von Massenpunkten zunächst die gewichteten Schwerpunkte von Teilsystemen bilden und alleine aus diesen – gewichtet mit den jeweiligen Teilmassen – den Gesamtschwerpunkt bestimmen kann.

Satz 2 (Assoziativität gewichteter Schwerpunkte). *Sei*

- (1) \mathcal{S}_A ein System von p gewichteten Punkten $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)$, $\alpha := \sum \alpha_i \neq 0$ mit gewichtetem Schwerpunkt S_A sowie
- (2) \mathcal{S}_B ein System von q gewichteten Punkten $(B_1, \beta_1), \dots, (B_q, \beta_q)$, $\beta := \sum \beta_i \neq 0$ mit gewichtetem Schwerpunkt S_B ,

und gelte weiterhin $\alpha + \beta \neq 0$. Dann ist der Schwerpunkt des Gesamtsystems von gewichteten Punkten $\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$ genau der Schwerpunkt des zweielementigen Systems $(S_A, \alpha), (S_B, \beta)$.

Beweis. S_A und S_B erfüllen die Gleichungen

$$\alpha \overrightarrow{OS_A} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{OA_i}, \quad \beta \overrightarrow{OS_B} = \sum_{i=1}^q \beta_i \overrightarrow{OB_i}.$$

Wählt man für O den gewichteten Schwerpunkt S des Gesamtsystems $\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$ und addiert diese beiden Identitäten, so ergibt sich

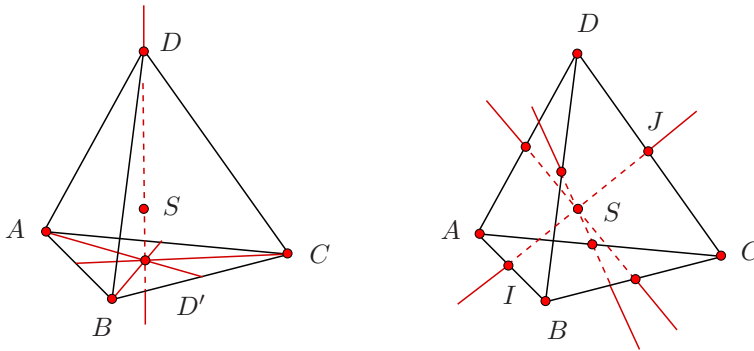
$$\alpha \overrightarrow{SS_A} + \beta \overrightarrow{SS_B} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{SA_i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \overrightarrow{SB_i} = 0$$

nach Definition von S . Damit ist alles bewiesen. \square

Beispiel 1. Mit Hilfe von Satz 2 sieht man leicht ein, dass die Seitenhalbierenden im Dreieck sich in einem einzigen Punkt (nämlich dem Schwerpunkt) im Verhältnis 2 : 1 schneiden. Dieses Ergebnis hatten wir zuvor schon aus dem Satz von Ceva hergeleitet (siehe Satz 21). Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in der Ebene und S sein Schwerpunkt, also der gewichtete Schwerpunkt des Systems $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$. Seien weiterhin A', B' und C' die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB . Der Schwerpunkt des Teilsystems $(A, 1), (B, 1)$ ist genau C' mit Teilmasse 2, so dass S nach Satz 2 auch der Schwerpunkt von $(C', 2), (C, 1)$ ist; insbesondere liegt S

auf der Geraden $G(C, C')$ und S teilt die Strecke CC' im Verhältnis $2 : 1$. Analog zeigt man, dass S auch auf $G(A, A')$ und $G(B, B')$ liegt und dort die gleiche Teilungseigenschaft hat.

Beispiel 2. Vier nicht komplanare Punkte A, B, C und D des \mathcal{E}^3 bilden ein Tetraeder. Sei S ihr Schwerpunkt, also der gewichtete Schwerpunkt des Systems $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$. Jeweils drei Ecken des Tetraeders bilden ein Dreieck; sei zum Beispiel D' der Schwerpunkt von $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$. Nach Satz 2 liegt S auf der Geraden $G(D, D')$ und erfüllt $3\overrightarrow{SD'} + \overrightarrow{SD} = 0$, er schneidet die Strecke DD' also im Verhältnis $3 : 1$. Ebenso liegt S auf jeder anderen Verbindungsgeraden des Schwerpunkts einer Seitenfläche mit der gegenüberliegenden Ecke. Sei weiterhin I der Schwerpunkt von $(A, 1), (B, 1)$ (also der Mittelpunkt) und J der Schwerpunkt von $(C, 1), (D, 1)$. In dieser Situation liefert Satz 2, dass S auf $G(I, J)$ liegt und Schwerpunkt von $(I, 2), (J, 2)$ ist. S ist damit der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zweier gegenüberliegender Kantenmittelpunkte.



2.2. Projektionen und ihre Eigenschaften

Wir erinnern daran, dass eine beliebige Abbildung $f : X \rightarrow X$ einer beliebigen Menge X in sich *Projektion* genannt wird, falls $f^2 = f$ gilt. Betrachtet man die Bildmenge $\text{im}(f)$ von f , so bewegt die Abbildung f keinen Punkt daraus. Uns interessieren zwei Fälle. Ist $X = V$ ein Vektorraum und $L : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung des Vektorraumes in sich mit $L^2 = L$, so nennen wir L eine *Vektorprojektion*. Ist dagegen $X = \mathcal{E}^n$ der affine Punktraum und $p : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ eine affine Abbildung mit $p^2 = p$, so nennen wir p eine *Punktprojektion*. In der Ebene ist das Bild jeder nichttrivialen Projektion stets eindimensional, im Raum kann es dagegen ein- oder zweidimensional ausfallen. Dies führt hier zu zwei Typen von Projektionen. Wir erläutern jetzt die unterschiedlichen Projektionsmöglichkeiten in der Ebene und im Raum.

Definition 3. Seien G und γ nicht parallele Geraden in der Ebene. Durch jeden Punkt M geht genau eine zu γ parallele Gerade, welche dann die Gerade G in genau einem Punkt M' schneidet. Wir nennen M' das Bild von M unter der *Parallelprojektion* (oder auch *Schrägprojektion*) auf G entlang γ . Die entsprechende

Abbildung $\mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ schreiben wir p , $p(M) = M'$. Sie erfüllt $p^2 = p$, und ihr Bild besteht aus der Geraden G . Falls γ orthogonal zu G ist, ist p die *Orthogonalprojektion* auf G .

Definition 4 (Bild 1). Sei π eine Ebene in \mathcal{E}^3 und γ eine Gerade, welche nicht parallel zu π ist. Durch jeden Punkt M von \mathcal{E}^3 geht genau eine Gerade, die zu γ parallel ist und dann die Ebene π in einem Punkt M' schneidet. M' heißt das Bild von M unter der Parallelprojektion auf π entlang γ , die zugehörige Abbildung $\mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$ bezeichnen wir wieder mit p . Im Fall $\gamma \perp \pi$ handelt es sich um die Orthogonalprojektion auf die Ebene π .

Definition 5 (Bild 2). Sei π eine Ebene im \mathcal{E}^3 und G eine Gerade, die π schneidet. Durch einen Punkt M von \mathcal{E}^3 geht genau eine zu π parallele Ebene, und deren Schnittpunkt M' mit G heißt das Bild von M unter der Parallelprojektion auf G entlang der Ebene π .

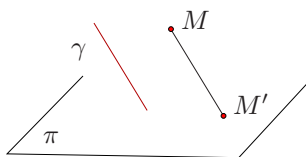


Bild 1

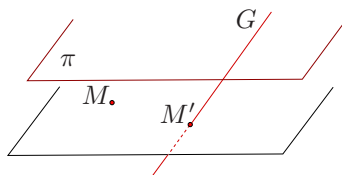


Bild 2

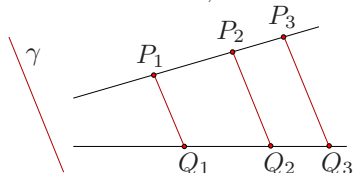
Satz 3. Jede dieser drei Punktprojektionen ist eine affine Abbildung im euklidischen Raum.

Beweis. Es genügt, die eine affine Abbildung charakterisierende Eigenschaft für drei Punkte zu beweisen. Dazu verwenden wir den Strahlensatz beziehungsweise sein Analogon im Raum (*Satz des Thales*) in der jeweiligen Situation. Wir diskutieren alle drei Fälle separat.

Parallelprojektion in der Ebene. Aus $\overrightarrow{P_1P_2} = t \overrightarrow{P_1P_3}$ folgt nach dem orientierten Strahlensatz

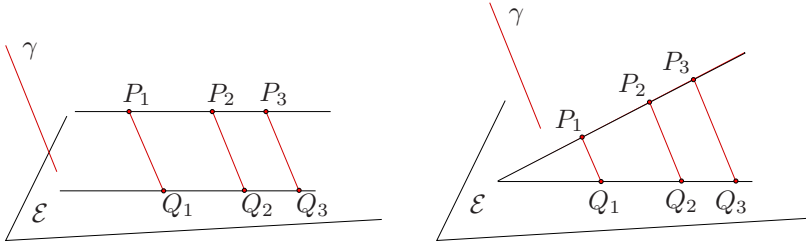
$$t = \frac{P_1P_2}{P_1P_3} = \frac{Q_1Q_2}{Q_1Q_3}.$$

Da Q_1, Q_2 und Q_3 außerdem kollinear sind, bedeutet dies $\overrightarrow{Q_1Q_2} = t \overrightarrow{Q_1Q_3}$.



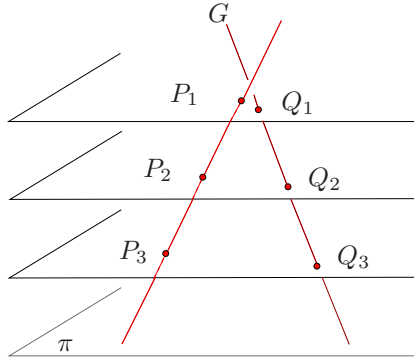
Parallelprojektion auf eine Ebene entlang einer Geraden. Es sind zwei Fälle möglich. Liegen alle drei Punkte P_i auf einer zu π parallelen Geraden, so geht z.B. durch P_1 eine eindeutige zu γ parallele Gerade. Zusammen mit der

Verbindungsgeraden der Punkte P_i definiert diese Gerade eine Ebene, und die Behauptung reduziert sich auf die Betrachtung der ebenen Parallelelogramme $P_1P_2Q_2Q_1$ und $P_1P_3Q_3P_1$, so dass nichts mehr zu beweisen ist.



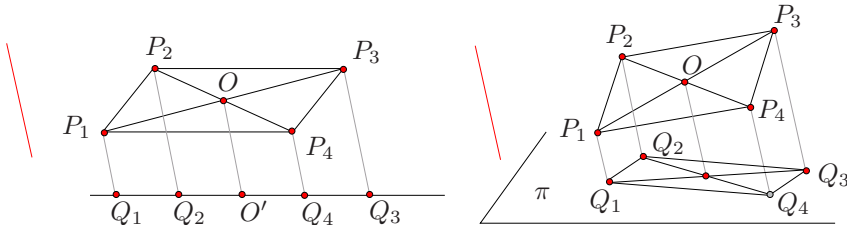
Im zweiten möglichen Fall ist die Verbindungsgerade der Punkte P_i nicht zu π parallel, sie schneidet daher π in genau einem Punkt, durch den auch die Verbindungsgerade der Bildpunkte Q_i verläuft. Diese beiden sich schneidenden Geraden definieren eine Ebene, und die Behauptung reduziert sich erneut auf den ebenen Fall.

Parallelprojektion auf eine Gerade entlang einer Ebene. Hier benötigt man nun den Strahlensatz im Raum (Satz von Thales), da die P_i und Q_i nicht komplanar zu sein brauchen. Er liefert $|t| = |P_1P_2|/|P_1P_3| = |Q_1Q_2|/|Q_1Q_3|$; da aber die relative Lage der Punkte erhalten bleibt, folgt $\overrightarrow{Q_1Q_2} = t \overrightarrow{Q_1Q_3}$.



□

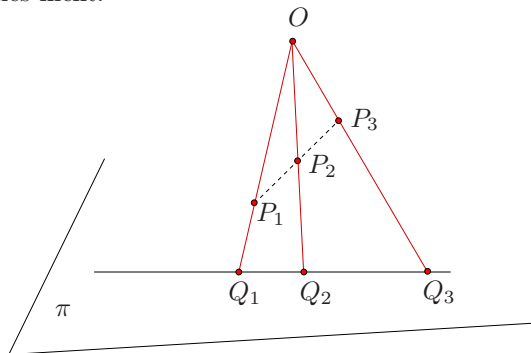
Projektionen bilden Parallelegramme in (eventuell entartete) Parallelegramme ab. Nachstehendes Bild verdeutlicht dies.



Affine Projektionen definieren lineare Abbildungen im Vektorraum $V(\mathcal{E}^n)$. Diese nennt man die *Vektorprojektion*.

Korollar 1. *Jede assoziierte Vektorabbildung $L(p) : V(\mathcal{E}^n) \rightarrow V(\mathcal{E}^n)$ einer Punktprojektion p ist eine Vektorprojektion, d.h. eine lineare Abbildung mit $L^2(p) = L(p)$. Ist die ursprüngliche Punktprojektion eine Orthogonalprojektion, dann gilt zudem $\ker(L(p)) = (\operatorname{im}(L(p)))^\perp$.*

Bemerkung 1. Die *Zentralprojektionen* wurden in der oben besprochenen Liste der Projektionen bewusst weggelassen, weil sie keine affinen Abbildungen sind. Wir erinnern kurz an die Definition der Zentralprojektion mit Mittelpunkt O auf eine Ebene oder Gerade: Sind ein Punkt O sowie eine Ebene $\pi \subset \mathcal{E}^3$ bzw. eine Gerade $G \subset \mathcal{E}^2$, die O nicht enthalten, gegeben, so wählt man als Bildpunkt M' eines Punktes M , der nicht in π bzw. G liegt, den eindeutigen Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $G(O, M)$ mit π bzw. G . Die Punkte von π bzw. G werden auf sich selbst abgebildet. Im folgenden Bild sieht man sofort, dass Zentralprojektionen keine affinen Abbildungen sind: P_2 teilt die Strecke P_1P_3 in der Mitte, die Bildpunkte tun dies nicht.



Zentralprojektionen erhalten die Lagebeziehungen, aber nicht die Maßverhältnisse. Trotzdem sind sie in der Geometrie und ihren Anwendungen nützlich, z. B. zur Modellierung von punktförmigen Lichtquellen.

2.3. Zentrische Streckungen und Translationen

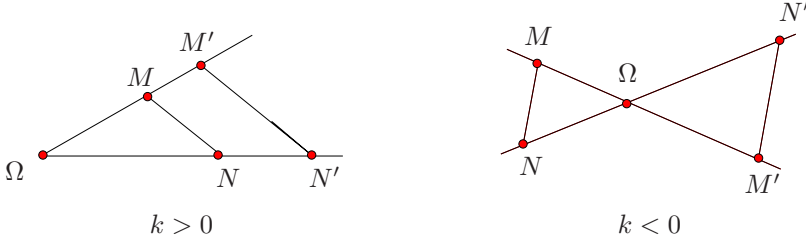
Eine bijektive Abbildung einer beliebigen Menge X auf sich nennt man auch eine *Transformation* und die Menge aller Bijektionen von X auf sich bildet eine Gruppe. Im Folgendem benutzen wir diesen Begriff im euklidischen Raum.

Definition 6. Sei Ω ein Punkt des affinen Raums \mathcal{E}^n und $k \neq 0$ eine reelle Zahl. Die *zentrische Streckung* mit *Zentrum* (oder *Mittelpunkt*) Ω und *Streckfaktor* (oder einfach nur *Faktor*) k ist als diejenige Abbildung $h_{(\Omega, k)} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$ definiert, die einem Punkt M den durch $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ eindeutig definierten Bildpunkt M' zuordnet¹. Umgekehrt ist das Urbild von M' derjenige Punkt M , der $\overrightarrow{\Omega M} =$

¹Der Buchstabe h steht für die im lateinischen Sprachraum übliche Bezeichnung, etwa *homothétie* im Französischem oder *homothety* im Englischen.

$k^{-1}\overrightarrow{\Omega M'}$ erfüllt. Daher ist $h_{\Omega,k}$ eine Transformation mit der Inversen $h_{(\Omega,k)}^{-1} = h_{(\Omega,1/k)}$.

Die Fälle $k > 0$ und $k < 0$ sind grundsätzlich zu unterscheiden:



Desweiteren gilt offensichtlich:

- (1) $h_{(\Omega,k)} \circ h_{(\Omega,k')} = h_{(\Omega,kk')}$;
- (2) $h_{(\Omega,1)} = \text{Id}_{\mathcal{E}^n}$;
- (3) $h_{(\Omega,-1)} = s_{\Omega}$ ist die Punktspiegelung an Ω ;
- (4) $h_{(\Omega,k)}(\Omega) = \Omega$, d. h. Ω ist ein Fixpunkt von $h_{(\Omega,k)}$.

Zentrische Streckungen lassen sich charakterisieren durch ihre Wirkung auf ein Punktepaar. Betrachte zwei Punkte $M, N \in \mathcal{E}^n$ mit Bildpunkten M', N' unter $h_{(\Omega,k)}$. Es ist $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ und $\overrightarrow{\Omega N'} = k \overrightarrow{\Omega N}$, also $\overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M})$, d. h. $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$. Im Fall $k = 1$ ist $M = M'$ und $N = N'$ und die Identität $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ sicher richtig. Es gibt aber noch weitere Transformationen des \mathcal{E}^n , die diese Eigenschaft haben, die Translationen. Im folgenden Satz beweisen wir, dass es keine weiteren Abbildungen mit dieser Eigenschaft gibt.

Satz 4 (Charakterisierung der zentrischen Streckungen und Translationen). *Sei f eine Transformation des affinen Raumes \mathcal{E}^n , die für beliebige Punkte M, N mit Bildpunkten M', N' die Relation $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ für ein festes $k \neq 0$ erfüllt.*

- (1) Falls $k = 1$ ist, ist f eine Translation.
- (2) Falls $k \neq 1$ ist, ist f eine zentrische Streckung.

Beweis. Sei A ein fest gewählter Punkt mit Bildpunkt A' . Nach Voraussetzung erfüllt jeder weitere Punkt M mit Bild M' die Relation $\overrightarrow{A'M'} = k \overrightarrow{AM}$. Fügen wir noch einen weiteren Punkt M_0 ein, so schreibt sich dies

$$\overrightarrow{M_0 M'} - \overrightarrow{M_0 A'} = k(\overrightarrow{M_0 M} - \overrightarrow{M_0 A}), \quad \text{also} \quad \overrightarrow{M_0 M'} - k \overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{M_0 A'} - k \overrightarrow{M_0 A}.$$

Für $k = 1$ folgt $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, d. h. f ist eine Translation um den Vektor $\overrightarrow{AA'}$. Anderenfalls betrachten wir den eindeutigen Punkt Ω auf der Geraden $G(A, A')$, welcher durch die Forderung $\overrightarrow{\Omega A'} = k \overrightarrow{\Omega A}$ bestimmt wird. Wählen wir nunmehr speziell $M_0 = \Omega$, so ergibt sich $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$, d. h. f ist die Streckung um k und mit dem Zentrum Ω . \square

Korollar 2. *Zentrische Streckungen und Translationen im \mathcal{E}^n sind affine Abbildungen.*

Beweis. Sind A, B, C drei Punkte mit $\overrightarrow{AC} = t \overrightarrow{AB}$, so gilt für deren Bildpunkte A', B', C' unter einer zentrischen Streckung oder Translation $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{AC}$ für geeignetes $k \neq 0$. Daraus folgt aber

$$\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{AC} = k(t \overrightarrow{AB}) = t(k \overrightarrow{AB}) = t \overrightarrow{A'B'}. \quad \square$$

Ebenso ist die Charakterisierung aus Satz 4 ausreichend um einzusehen, dass zentrische Streckungen und Translationen gemeinsam eine Gruppe bilden, *ohne* dass das Ergebnis der jeweiligen Verknüpfungen im Detail bekannt sein muss (für die Ebene werden wir sie noch ausführlich beschreiben).

Korollar 3. *Die zentrischen Streckungen und die Translationen bilden gemeinsam eine nicht abelsche Gruppe von Transformationen des affinen Raumes \mathcal{E}^n .*

Beweis. Seien f und f' zwei Abbildungen aus der Menge der zentrischen Streckungen und der Translationen sowie $M, N \in \mathcal{E}^n$ mit Bildpunkten M_1, N_1 unter f und Bildpunkten M_2, N_2 unter $f' \circ f$. Folglich existiert ein $k \neq 0$ derart, dass $\overrightarrow{M_1 N_1} = k \overrightarrow{MN}$ sowie ein $k' \neq 0$ derart, dass $\overrightarrow{M_2 N_2} = k' \overrightarrow{M_1 N_1}$ gilt. Daraus folgt aber $\overrightarrow{M_2 N_2} = kk' \overrightarrow{MN}$, und Satz 4 impliziert, dass $f' \circ f$ entweder eine zentrische Streckung oder eine Translation ist. \square

Ebenso leicht folgert man aus der charakterisierenden Eigenschaft der zentrischen Streckungen und Translationen:

Korollar 4. *Sei f eine zentrische Streckung oder eine Translation.*

- (1) *Das Bild einer Geraden G unter f ist eine zu G parallele Gerade.*
- (2) *Das Bild einer Ebene π unter f ist eine zu π parallele Ebene.*
- (3) *Das Bild eines Dreiecks unter f ist ein zum ursprünglichen Dreieck ähnliches Dreieck.*
- (4) *Das Bild eines Kreises unter f ist ein Kreis.*
- (5) *Das Bild einer Kugel unter f ist wieder eine Kugel.*

Die Verknüpfung zweier Translationen ist offenbar wieder eine Translation und hängt von der Verknüpfungsreihenfolge nicht ab. Allgemein wollen wir eine Translation um den Vektor \vec{v} mit $t_{\vec{v}}$ bezeichnen. Wir beschränken uns von nun an auf die Ebene \mathcal{E}^2 und bestimmen zunächst die Verknüpfung zweier zentrischer Streckungen mit verschiedenen Zentren.

Satz 5. *Betrachte zwei zentrische Streckungen $h_1 = h_{(\Omega_1, k_1)}$ und $h_2 = h_{(\Omega_2, k_2)}$ im \mathcal{E}^2 .*

- (1) *Im Fall $k_1 k_2 = 1$ ist $h_2 \circ h_1$ eine Translation,*

$$h_{(\Omega_2, k_2)} \circ h_{(\Omega_1, k_1)} = t_{(1-k_2)} \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}.$$

Speziell ist die Verknüpfung zweier zentrischer Spiegelungen eine Translation um den Vektor $2 \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$.

- (2) *Im Fall $k_1 k_2 \neq 1$ ist $h_2 \circ h_1$ eine zentrische Streckung,*

$$h_{(\Omega_2, k_2)} \circ h_{(\Omega_1, k_1)} = h_{(\Omega, k_1 k_2)},$$

Elementargeometrie

Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht

Agricola, I.; Friedrich, Th.

2015, XII, 234 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-06730-4