

Philipp Ullmann, Goethe-Universität Frankfurt

Zusammenfassung

Das Grundvorstellungskonzept ist merkwürdig ambivalent. Einerseits hat es sich als schul- und forschungspraktisch anschlussfähig erwiesen, andererseits wird es im Theoriediskurs nur zögerlich rezipiert. Das ist wesentlich dem Entstehungskontext geschuldet: Weil Grundvorstellungen das Lernen vor allem individual- und entwicklungspsychologisch in den Blick nehmen, sind sie für neuere theoretische Debatten wenig attraktiv, die Lernen als kollektive soziale Praxis verstehen.

Mit dem Ansatz der *situated cognition* vermittele ich im Beitrag zwischen psychologischem und sozialwissenschaftlichem Forschungsparadigma, fundiere das Grundvorstellungskonzept praxeologisch und zeige exemplarisch, wie eine solche Perspektive für mathematikdidaktische Überlegungen fruchtbar gemacht werden kann: An fünf idealtypischen Praxen der Legitimierung von Geometrieunterricht arbeite ich jeweils eine Grundvorstellung zur Schulgeometrie heraus, um daraus eine (mögliche) Perspektive auf den Geometrieunterricht des 21. Jahrhunderts zu entwickeln.

2.1 Grundvorstellungen – eine robuste didaktische Kategorie

Grundvorstellungen als didaktische Kategorie wurden vor zwei Jahrzehnten durch Peter Bender und Rudolf vom Hofe wiederbelebt.³ Geleitet von einem psychologisch-konstruktivistischen Paradigma suchte man damals in der Mathematikdidaktik nach Model-

² Ich bedanke mich herzlich bei Peter Bender, Gerhard Bierwirth, Rudolf Sträßer und Emese Vargyas für ihre wertvollen Anmerkungen. Lutz Führer verdanke ich darüber hinaus die Anregung, mich genauer mit der babylonischen Mathematik auseinanderzusetzen. Matthias Ludwig schließlich danke ich für die Ermunterung, mich in den geometriedidaktischen Diskurs einzumischen.

³ Vom Hofe (1995, S. 13) verweist dabei auf Bender, der das Konzept wiederum 20 Jahre zurückdatiert und dabei auf Heinz Griesel verweist (vgl. Bender 1991, S. 48).

len mathematischen Verstehens, wobei Verstehen bedeutete, „dass die jeweils intendierten Wissensinhalte, Fertigkeiten und Fähigkeiten vollständig, adäquat und unter vertretbarem Aufwand vom Lernenden entwickelt werden“ (Dörfler 1988, S. 56). Für das Mathematik-Lehren ergab sich daraus die Frage, wie die Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und individueller Begriffsbildung hergestellt werden könne.

Grundvorstellungen als „Elemente der Vermittlung bzw. als Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffsbildung des Lernenden“ (vom Hofe 1995, S. 98) stellten eine Antwort auf diese Frage dar. Ausgehend von der Beobachtung, dass seit Anfang des 19. Jahrhunderts – also mit Beginn der Etablierung der Schulpflicht – die methodischen Prämissen des Rechenunterrichts vor stetig sich wandelnden psychologischen Hintergrundtheorien relativ konstant blieben, arbeitete vom Hofe ganz pragmatisch drei dieser methodischen Konstanten heraus, nämlich Sinnkonstituierung, Anschaulichkeit und Anwendungsbezug (ebenda, S. 97 f.), und vereinte sie unter dem Dach des Grundvorstellungsbegriffs.⁴

Aufgrund seiner Anschaulichkeit, Praktikabilität und weitgehenden Theoriefreiheit (vgl. ebenda, S. 125 f.) hat sich das Grundvorstellungskonzept sowohl schul- als auch forschungspraktisch als ausgesprochen anschlussfähig erwiesen,⁵ so dass ich es als ‚robuste‘ didaktische Kategorie bezeichnen möchte.⁶ Der hinter einer solchen Robustheit stehende Pragmatismus ist aus einer theoretischen Perspektive durchaus sinnvoll und nützlich, solange die damit einhergehende Komplexitätsreduktion nicht als abschließend, sondern als wiederum ausbaufähig verstanden wird.⁷

Diese einschränkende Bedingung legt es nahe, die theoretische Leerstelle des Grundvorstellungskonzeptes in den Blick zu nehmen: Grundvorstellungen erklären nicht, *wie* das letztlich beabsichtigte Verstehen von Mathematik stattfindet,⁸ sondern postulieren le-

⁴ In der Tat lassen sich – eine gutwillige Lektüre vorausgesetzt – bereits bei Pestalozzi, vom Hofes frühestem Gewährsmann, alle drei Aspekte finden und (als didaktische Fingerübung) sogar ‚Kopf, Herz und Hand‘ oder, wie es im Original heißt: „Herz, Geist und Hand“ (vgl. etwa Pestalozzi 1819, S. 39 & 40) zuordnen. Zu Pestalozzis allgemeinpädagogischem Ansatz vgl. Pestalozzi (1801), auf die Mathematik bezogen siehe Pestalozzi (1803). Zu ‚Kopf, Herz und Hand‘ bei Pestalozzi vgl. Osterwalder (1995).

⁵ Für die Schulpraxis kann auf zahlreiche Unterrichtsvorschläge verwiesen werden (exemplarisch die beiden ml-Themenhefte *Grundvorstellungen* (Nr. 78, 1996) und *Grundvorstellungen entwickeln* (Nr. 118, 2003)); für die Forschungspraxis auf die PALMA-Studie (vgl. Pekrun et al. 2006) sowie Publikationen aus diesem Umfeld (wiederum exemplarisch die (kumulative) Habilitation *Grundbildung durch Grundvorstellungen* von Michael Kleine (2007) oder die Dissertation von Sebastian Wartha (2007)).

⁶ In freier Anlehnung an Bender (1991, S. 54), der im Kontext von *tacit models* von Robustheit spricht und dabei die drei Kriterien Einfachheit, Verankerung in der Lebenswelt und Anwendungserfolg nennt. Nicht gedacht ist hier an gesellschaftlich robustes Wissen im Sinne Nowotnys (2006).

⁷ In der heute gängigen Lehrpraxis scheint es ja mitnichten abwegig, beispielsweise die verschiedenen Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff zu essentialisieren und der Reihe nach (ggf. einschließlich der zugehörigen Übersetzungsprozesse) abzuarbeiten.

⁸ Dieses Problem wird dadurch etwas verwischt, dass der Charakter der *Vermittlung* von Grundvorstellungen zwischen mathematischen Begriffen und Sachzusammenhängen (vom Hofe 1995, S. 98) unversehens in das *Verstehen* der SchülerInnen übersetzt wird, indem rhetorisch der ‚Kern des Sachzusammenhanges‘ und der ‚Kern des mathematischen Begriffs‘ parallelisiert werden (ebenda,

diglich, *dass* es so stattfinden *könne*. So schreibt vom Hofe ganz explizit: „Grundannahme des hier vertretenen Konzepts ist es, [...] dass sich Grundvorstellungen ausbilden lassen.“ (ebenda, S. 123) und verweist lakonisch auf „jahrhundertelange didaktische Erfahrung“ (ebenda, S. 97) – was durchaus ein gewichtiges Argument darstellt, jedenfalls wenn man sich auf den Geltungsbereich seiner Untersuchung beschränkt: die Volksschulrechenmethodik.⁹ Bender, der beide Sekundarstufen vor Augen hat, nimmt die Frage nach dem ‚Wie?‘ viel wichtiger und investiert folgerichtig einiges an Theoriearbeit, um bei dem Problem der Vermittlung weiterzukommen.¹⁰

Die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche von Heinrich Bauersfeld, die auch vom Hofe referiert, könnte hier weitere Einsicht ermöglichen. Immerhin stellt Bauersfeld ein ganzes Theorienbündel zur Verfügung, um die Mathematikdidaktik aus der von ihm selbst diagnostizierten Einseitigkeit zu befreien: Es gelte, die weitgehende Beschränkung auf das (psychologisch gefasste) Individuum zu überwinden und die soziale Dimension des Lernens in die didaktischen Analysen mit einzubeziehen (vgl. Bauersfeld 1983, S. 12).¹¹ Ausgangspunkt ist dabei die Einsicht, dass jedes Wissen situativ gebunden ist.¹² Für das Mathematik-Lehren ergibt sich daraus allerdings sofort als wesentliche Frage, wie in einem konkreten Kontext erworbenes Wissen auf andere Situationen übertragen bzw. kontextübergreifend integriert werden kann.

S. 125). In späteren Veröffentlichungen wird theoretisch nachgelegt und das Grundvorstellungskonzept in Beziehung zum Ansatz der *mental models*, der *schemes* und des *conceptual change* gesetzt (vgl. Kleine et al. 2005). Das gibt immerhin einen Hinweis; die hier folgende Kritik aber bleibt davon unberührt.

⁹ Dementsprechend findet das Grundvorstellungskonzept in der Mathematikdidaktik überwiegend in den Inhaltsbereichen der vormaligen Volksschulmathematik Verwendung, v. a. in der Bruchrechnung.

¹⁰ Exemplarisch deutlich wird das in der Bewertung von Anwendungen beim Aufbau von Grundvorstellungen. Während etwa vom Hofe (1995, S. 98) in diesem Zusammenhang ohne Bedenken Welt und Mathematik parallelisiert und von „Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen“ spricht und davon, „reale Sachkonstellationen bzw. Sachzusammenhänge zu beschreiben“, betont Bender (1991, S. 56) eher die Gefahr, dass die echten Anwendungen innewohnenden Sachstrukturen „die mathematische Begrifflichkeit überlagern und deren psychologische Grundlegung stören können“, und verweist zum Aufbau von Grundvorstellungen auf Einkleidungen (wobei er sich u. a. auf Arbeiten zur Metapher und Metonymie in der Mathematikdidaktik von Hans-Georg Steiner und Heinrich Bauersfeld bezieht). Dieses Beispiel ist besonders instruktiv, wenn man die spätere Integration der Grundvorstellungen in den Modellierungskreislauf vor Augen hat (vgl. Kleine et al. 2005, S. 229).

¹¹ In diesem Sinne stellt Bauersfeld zu integrierende Forschungsbereiche einer umfassenden Interaktionstheorie des Lernens zusammen: 1.) nicht-kognitive Aspekte, 2.) die metonymische Fortsetzbarkeit sozialer Interaktion, 3.) die Partikularität und zugleich Verallgemeinerungsfähigkeit der Sprache und 4.) Veranschaulichungen; weiter Elemente 5.) der Kommunikationstheorie, 6.) der Identitätstheorie, 7.) der Psychoanalyse und 8.) der Intelligenztheorie und schließlich 9.) Fragen des Lern-Transfers (vgl. Bauersfeld 1983, S. 27-48).

¹² So leitet Bauersfeld (1983, S. 1) seinen Aufsatz mit einem entsprechenden Zitat von Thomas Seiler ein. Bauersfeld spricht allerdings lieber von ‚Bereichsgebundenheit‘, was ihn zum Begriff der ‚Subjektiven Erfahrungsbereiche‘ führt.

2.2 Situated Cognition – eine analytische Perspektive

Verstehen von Mathematik – darin sind sich Bauersfeld, Bender und vom Hofe mit den Rechenmethodikern des 19. Jahrhunderts einig – lebt von Sinnkonstitution. Sinn aber – und damit wird das 19. Jahrhundert zurückgelassen – ist eine zutiefst soziale Kategorie und damit immer auf Interaktion und Intentionalität bezogen. Dass infolge dieser Perspektivverschiebung die Objektivierbarkeit mathematischen Wissens ein theoretisches Problem darstellt, dessen sind sich Bauersfeld und Bender wohl bewusst,¹³ bleiben aber dem (individual)psychologischen Ansatz letztlich treu.¹⁴

Ich will hier einen etwas anderen Weg beschreiten und das Grundvorstellungskonzept mit dem theoretischen Ansatz der *situated cognition* in Verbindung bringen.¹⁵ Ausgehend von der Einsicht, dass sich *situatedness* nicht auf situative Gebundenheit reduzieren lässt, denkt dieser Ansatz die soziale Dimension des Lernens radikal weiter: Die Aneignung von Wissen wird nicht vom Individuum aus verstanden, sondern von einer *community of practice*. Der Lernforscher Etienne Wenger, der diesen Begriff gemeinsam mit der Sozialanthropologin Jean Lave geprägt hat, formuliert prägnant:

Communities of practice sind Gruppen von Personen, die ein Interesse an oder eine Leidenschaft für etwas teilen, das sie tun, und die durch regelmäßige Interaktion lernen, es besser zu machen.¹⁶

Unter diesem Blickwinkel erscheint Wissen grundsätzlich nicht als ein abstraktes, objektives Substrat, dessen individuelle kognitive Aneignung irgendwie in soziale Praxis eingebettet ist, sondern als ein Produkt oder besser: als Teil der sozialen Praxis einer *community of practice*.¹⁷ Damit ist auch die Frage nach dem Transfer von Wissen falsch gestellt, weil es kein Substrat gibt, das transferierbar wäre – und in der Tat zeigt sich ja, dass man in einem veränderten Kontext je neu zum Wissenden werden muss. Mit Hegel könnte man also sagen: Es gibt kein Wissen *an-sich*, weil jedes *an-sich* immer schon *für-uns* ist.

Im Fall mathematischen Wissens bedeutet das: Mathematisches Wissen, oder besser: die verschiedenen, miteinander konkurrierenden Formen mathematischen Wissens sind nichts anderes als die geronnenen Praxen unterschiedlicher *communities of practice*, in denen Personen als Mathematiktreibende interagieren – seien es MathematikerInnen, Lehramtsstudierende oder SchülerInnen. Dass sich aus diesem Gemenge heraus die Idee eines objektiven Wissens etablieren konnte, ist Ergebnis eines langwierigen und komplexen geschichtlichen

¹³ Bauersfeld führt in diesem Zusammenhang zahlreiche linguistische Ansätze ins Feld, während Bender (1991, S. 51) hier vor allem auf Dörfler (1988) verweist.

¹⁴ Das ist auch konsequent, wenn man auf den diagnostischen Einsatz von Grundvorstellungen in (Groß-)Studien oder im Klassenzimmer abzielt.

¹⁵ Zu *situated cognition* vgl. Robbins & Aydede (2009) sowie Kirshner & Whitson (1997); zur mathematikdidaktischen Rezeption dieses Ansatzes siehe Watson & Winbourne (2008) sowie Watson (1998).

¹⁶ Das Zitat steht auf Wengers Homepage <http://www.ewenger.com/theory/> < 10.01.14>. Eine in gewissem Sinne präzisere Definition findet sich bei Lave & Wenger (1991, S. 97 f.); vgl. auch Ullmann (2013).

¹⁷ Dafür scheint sich das Bild der ‚Ähnlichkeit‘ zu eignen (vgl. Dietzsch & Ullmann 2013) – womit man wieder bei Metapher und Metonymie als analytischem Instrument angekommen ist.

Prozesses, in dessen Verlauf vermittelt historisch sich wandelnder Sicherungssysteme soziale Praxen stabilisiert wurden.¹⁸ Als effektivstes Sicherungssystem der Moderne hat sich im 19. Jahrhundert die Schule und namentlich der Mathematikunterricht etabliert: Dies ist der Ort, an dem – gesellschaftsübergreifend – die Praxen der Objektivierung und Abstrahierung maßgeblich eingeübt worden sind und immer noch werden (vgl. Ullmann 2008).

Mit dieser Kontextuierung ist eine Lösung für das Problem der Objektivierbarkeit zumindest angedeutet; jedenfalls aber ist die theoretische Leerstelle des Grundvorstellungskonzeptes gefüllt: Mathematik zu verstehen bedeutet nichts anderes als ein kompetentes Mitglied einer *community of practice* Mathematik-Treibender zu sein.¹⁹ Eine solche praxeologische Verschiebung des theoretischen Blickes aber bereitet zugleich auch den Weg für neue Anwendungen, indem sie nahe legt, die Kategorie der Grundvorstellung versuchsweise auf sich selbst anzuwenden.

Grundvorstellungen als robuste didaktische Kategorie, so meine These, sind ein rhetorisches Werkzeug, das im Diskurs des Mathematiklehrens und -lernens der Legitimierung und fachlichen Akzentuierung dient. Solchermaßen objektiviert gilt es, ihre Einbettung in sozio-kulturelle Praxen aufzudecken, um sie theoretischer Reflektion und praktischer Gestaltung zugänglich zu machen.

Als einen ersten Schritt in diese Richtung werde ich im Folgenden am Beispiel der Geometrie idealtypisch fünf Grundvorstellungen zum Geometrieunterricht herausarbeiten, die sich historisch innerhalb diskursiver Praxen herausgebildet bzw. stabilisiert haben und im gegenwärtigen Unterricht auf die ein oder andere Art fortwirken. Durch die einheitliche theoretische Rahmung werden Parallelen und Querbezüge deutlich, die den Überlegungen zu einem künftigen Geometrieunterricht zuträglich sein mögen.²⁰

2.3 Grundvorstellungen zur Schulgeometrie

G1: Geometrie als Schule des rechten Sehens

In einem gesellschaftlichen Umfeld, das in der Tradition der Aufklärung Sehen als dominante Form empirischer Welterkenntnis akzeptiert, liegt es nahe, Geometrie in den Dienst einer methodischen Reflektion dieser scheinbar unmittelbaren Erkenntnisweise zu stellen. So nimmt es nicht Wunder, dass der einstige Volksschuldiskurs diese Verbindung von Sehen und Erkennen aufgriff und sich auf dem Weg zu einer ‚Bildung für alle‘ zu eigen machte.²¹

¹⁸ Für die Naturwissenschaften ist dieser Prozess bereits überzeugend aufgearbeitet worden (vgl. etwa Daston & Galison 2007 oder Latour 2007); eine Übertragung auf die Mathematik ist naheliegend, aber aufgrund des deutlich weiter zurückreichenden Untersuchungszeitraumes und der sich dadurch verschärfenden Quellenlage erheblich schwieriger. Einen Eindruck davon geben die Ausführungen im ► Abschn. G3: Geometrie als Schule des regelgeleiteten Gehorsams.

¹⁹ Womit das ‚Wie?‘ des (schulischen) Initiations-Prozesses empirischer Untersuchung zugänglich wird.

²⁰ Trotzdem es um die Tradition des Geometrieunterrichts in Deutschland geht, werde ich im Folgenden die Gedanken gelegentlich weit spannen; daher kann ich sie nur in erster Annäherung belegen, greife aber nach Möglichkeit vertraute Bilder auf.

²¹ Was sich ideengeschichtlich dann wiederum im Grundvorstellungskonzept widerspiegelt, wie am Schlagwort der ‚Anschaulichkeit‘ deutlich wird.

Zwei Protagonisten sind es, die den pädagogischen Diskurs über den Bildungswert der Schulgeometrie hinsichtlich der Elementarbildung um 1800 bestimmen: Johann Heinrich Pestalozzi und Johann Friedrich Herbart. Obwohl von grundverschiedenem Charakter – der eine pädagogischer Praktiker aus Überzeugung, der andere philosophischer Theoretiker aus Leidenschaft – gehen beide von derselben Prämisse der Kantianischen Aufklärung aus: dass nämlich „*die Anschauung das absolute Fundament aller Erkenntniß sey*“ (Pestalozzi 1801, IX. Brief, S. 282) bzw. „*die Wichtigste unter den bildenden Beschäftigungen des Kindes und des Knaben*“ (Herbart 1804, Einleitung, II. Teil, S. 8). Beide weisen dem Anfangsunterricht die Aufgabe zu, die Kinder zu rechter (d. h. strukturierter bzw. strukturierender) Wahrnehmung ihrer Lebenswelt zu führen, wobei die Geometrie durch ihre unmittelbare Anschaulichkeit eine herausgehobene Mittlerrolle spielt.

Pestalozzi denkt dabei an eine Elementarbildung im Sinne heutiger *literacy*, wenn er schreibt:

Zahl, Form und Sprache sind gemeinsam die Elementarmittel des Unterrichts, indem sich die ganze Summe aller *äussern* Eigenschaften eines Gegenstandes, im Kreise seines Umrisses, und im Verhältniß seiner Zahl vereinigen, und durch Sprache meinem Bewußtseyn eigen gemacht werden. Die Kunst [des Unterrichtens] muß es also zum unwandelbaren Gesetz ihrer Bildung machen, von diesem dreyfachen Fundamente auszugehen und dahin zu wirken:

1. Die Kinder zu lehren, jeden Gegenstand, der ihnen zum Bewußtseyn gebracht ist, als Einheit, d.i. von denen gesondert, mit denen er verbunden erscheint, ins Aug zu fassen.
2. Sie die Form eines jeden Gegenstandes, d.i. sein Maaß und sein Verhältniß kennen zu lehren.
3. Sie, so früh als möglich, mit dem ganzen Umfang der Worte und Namen aller von ihnen erkannten Gegenständen bekannt zu machen. (Pestalozzi 1801, VI. Brief, S. 164 f.)

Herbart dagegen zielt mehr auf (durchaus wissenschafts-propädeutisch zu verstehende) Begriffsbildung:

Alles, was zur *Auffassung der Gestalten durch Begriffe*, von den größten Köpfen aller Zeiten geleistet worden ist: das findet sich gesammelt in einer großen Wissenschaft, in der Mathematik. Diese ist es also, unter deren Schätzen die Pädagogik für jenen Zweck vor allen Dingen zuerst nachzusuchen hat, wenn sie nicht Gefahr laufen will, sich in vergeblichen Bemühungen zu erschöpfen. (Herbart 1804, Einleitung, III. Teil, S. 17 f.)

Und weiter:

Die Strenge der Beweise ist nicht für kleine Knaben; – desto mehr ist für sie die mannig[fa]ltige Versinnlichung von Zahlen, Brüchen, Rechnungen, zu denen die Dreiecke beständig veranlassen. Diese Gelegenheit, *der Arithmetik mehr Deutlichkeit* zu verschaffen, muß, so weit es nur möglich ist, benutzt werden. (Ebenda, Erster Abschnitt, II. Teil, S. 72)

Dass die Welt nach Maß und Zahl geordnet ist, dieser Gedanke ist so alt wie das Zählen und Messen; neu aber war um 1800 die aufklärerische Hoffnung, dass ein ‚ABC der Anschauung‘ durch eine Elementarisierung dieser Ordnung beitragen könne zu einem Denken, das in den objektiven Kategorien von Maß und Verhältnis gründet und mit abstrakten Begriffen operiert, und damit wiederum zu einer besseren oder zumindest: ausgewogeneren Welt.²²

²² Diese Anschauung wird bei Pestalozzi wie auch bei Herbart ganz selbstverständlich nicht nur durch (Zu-)Sehen und (Nach-)Sprechen, sondern auch durch eigenes Handeln geschult, wie die einschlägigen Anleitungen zu Zeichenübungen belegen (vgl. Pestalozzi 1803 und Herbart 1804). Gerade bei Pestalozzi wird dieser Aspekt oft übersehen.

G2: Geometrie als Schule des verständigen Denkens

Eine etwas andere Akzentuierung erhielt die Schulgeometrie an den Höheren Schulen, aus deren Absolventen sich im 19. Jahrhundert die (Bildungs-)Eliten, vor allem aber die Führungsriege eines umfang- und einflussreichen Beamtenapparates rekrutierten. Statt der Anschaulichkeit des Sehens soll die Strenge des Denkens eingeübt werden, gleichfalls idealistisch überhöht (und als aristokratie-nah geehrt). Das zeigt sich bereits an den bis in die klassische Antike zurückreichenden Spuren, die dieser Tradition eingeschrieben werden. So lässt Platon im *Staat* den Sokrates, der sich im Gespräch mit Glaukon befindet, die Geometrie preisen:

Sokrates: Sie [die Geometrie] hätte nach deinem Zugeständnis, mein Lieber, die Kraft, die Seele zum Sein hinzuziehen, und wäre eine Bildung für einen wissenschaftlichen Kopf und um Seelen zum Wesen der Dinge hin zu leiten, die wir jetzt ungebührlicherweise nur auf das Irdische hin halten.

Glaukon: Ja, sagte er, sie ist jenes im höchsten Grade.

Sokrates: Im höchsten Grade, fuhr ich fort, müssen wir also darauf achten, dass die Bürger in deinem Staat auf keine Weise der Geometrie abhold sind, denn auch die Nebengewinne sind nicht unbedeutend.

Glaukon: Welche denn? fragte er.

Sokrates: Erstlich der, den du schon erwähntest, erwiderte ich, der praktische Gewinn für den Krieg, zweitens wird außerdem bekanntlich in Bezug auf jedes andere Lernen, um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied sein zwischen einem, der sich mit Geometrie befasst hat, und dem, der es nicht getan hat.

Glaukon: Ja wahrhaftig, ein himmelhoher, bemerkte er. (Platon: Der Staat, VII. Buch, <http://www.opera-platonis.de/Politeia7.html>. < 10.1.14 >)

Über Euklids *Elemente* als maßgebliches Lehrwerk über Jahrhunderte hinweg muss an dieser Stelle kaum ein weiteres Wort verloren werden, nicht zuletzt im Kontext der Geometrie als einer der *septem artes liberales*: Aus vorgegebenen Prämissen präzise formulierte und klar strukturierte Schlüsse abzuleiten – das war zu allen Zeiten gefragt, in denen bürokratische Herrschaftsgebilde auf eine gebildete Beamtenschaft angewiesen waren, und spätestens mit den *Elementen* fiel ein Gutteil dieser Ausbildung der Geometrie zu.²³ In diesem Geiste hielt der Geometrieunterricht im 19. Jahrhundert auch in die reformierten preussischen (später: alle deutschen) Gymnasien ab Klasse 7 Einzug.²⁴

Ganz in der Tradition des Denken-Lehrens galt die Geometrie über Jahrhunderte als *die* voll ausgebildete Wissenschaft schlechthin und war dem Rationalismus und der Auf-

²³ Die Ablösung dieser Art von Erkenntnis vom Irdischen (vgl. Platons Ideenlehre) mag durchaus auch im Sinne der Herrschenden erwünscht gewesen sein, die ihren Beamten gerne Zugriff auf die Wahrheit gewährten, solange diese ihnen nicht die Macht streitig machten.

²⁴ Die Praxis des (mathematischen) Beweisens, nach breitem wissenschaftshistorischen Konsens wohl erstmals im antiken Griechenland in Erscheinung getreten, spielte bei der Etablierung der Mathematik als objektive Wissenschaft wohl eine, wenn nicht gar die zentrale Rolle und prägte den gymnasialen Geometrieunterricht nachhaltig.

klärung Vorbild einer jeglichen Wissenschaft.²⁵ Aber auch innermathematisch wurde nach der Etablierung der Mathematik als universitäre Wissenschaft²⁶ in diesem Sinne argumentiert. Anhand der Mathematik sollten die SchülerInnen den schrittweisen Aufbau einer axiomatischen Wissenschaft (mit)erleben. Dieser Gedanke war bis Mitte des 20. Jahrhunderts lebendig und durchdrang auch noch die *new maths*-Bewegung der 1970er Jahre. Gegenwärtig hat die Strenge des Beweisens keine Konjunktur und tritt hinter dem Argumentieren und Begründen zurück – vielleicht ein Hinweis auf eine demokratisierende Praxis.

G3: Geometrie als Schule des regelgeleiteten Gehorsams

Ein weiterer Aspekt, der in den beiden vorhergehenden Abschnitten bereits angeklungen ist, hängt mit dem Schulkontext als solchem zusammen. Die Praxis des Schule-Haltens ist immer eine andere als diejenige, auf die Schule vorzubereiten beansprucht, weil und wodurch das zu Lernende eine andere Rahmung erfährt. Insofern etabliert Schule eine spezifische *community of practice*, die sich durch eine Form des regelgeleiteten Gehorsams auszeichnet, in der der Wissenschaftshistoriker Peter Damerow die Wiege der geometrisch-mathematischen Abstraktion vermutet.

In seiner Lesart babylonischer mathematischer Keilschrifttexte aus dem dritten vorchristlichen Jahrtausend weist Damerow darauf hin, wie sich neben den in Verwaltungstexten dokumentierten geometrischen Berechnungen mit einem ersichtlichen praktischen Zweck

auch andersartige Texte [finden], die keinem erkennbaren Verwaltungsziel dienten und Ansätze zur Verselbständigung der Methoden der Feldmesser vom praktischen Zweck ihrer Messungen und Berechnungen erkennen lassen. Sie stammen vermutlich aus dem Schulkontext [...]. (Damerow 2001, S. 257)

Und weiter:

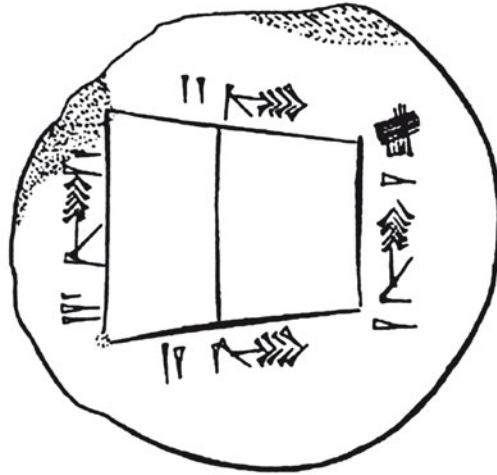
Trotz der kleinen Zahl dieser Texte lässt sich die Natur der diesen Explorationen inhärenten Abstraktionsprozesse gut rekonstruieren. Sie haben ihre Grundlage in einer gegenüber den praktischen Zielsetzungen der Verwaltung verselbständigten Verwendungen der Techniken der Feldmesser. Es sind vor allem die Techniken der Flächenzerlegung und der Flächenberechnung. Solche Techniken wurden im Schulkontext auf Problemstellungen angewandt, die sich nicht prinzipiell von den charakteristischen Problemen der Feldmesser unterschieden, aber nicht mehr an praktischen Zielen orientiert waren, sondern ohne Rücksicht auf realistische Bedingungen formuliert wurden. (Ebenda, S. 270)

²⁵ Zu denken ist etwa an den Fortschritt der Erkenntnis *more geometrico* bei Descartes bzw. an Kants berühmte Vorrede zur zweiten Auflage der *Kritik der reinen Vernunft*.

²⁶ Die nicht zufällig zeitgleich mit der Etablierung des Volksschulmathematikunterrichts zu Beginn des 19. Jahrhunderts einsetzte (vgl. Ullmann 2008, S. 167-178).

Abb. 2.1 Altakkadische Tafel IM 58045 mit dem vermutlich ältesten Beleg für eine theoretisch motivierte Feldteilung. Damerow (2001), S. 263.

Bildrechte: Aage Westenholz. Der Abdruck erfolgt mit freundlicher Genehmigung



Inmitten der Zwänge des Vor- und Nachmachens einer ent- bzw. neu kontextuierten Praxis, inmitten eines Beschulungsformates, das auch die Meister-Lehre prägt²⁷ und bis heute – vielgeschmäht, aber vielleicht nicht ganz zu Unrecht – im Schulunterricht nachwirkt, finden sich also die ersten Spuren der Abstraktion.²⁸

Dass dieser in ihrer viertausendjährigen Entstehungsgeschichte eine Dialektik von Freiheit und Zwang eingeschrieben wurde, bleibt natürlich auch Herbart nicht verborgen, der schreibt:

Aber aus dem Bemerken entsteht die *Kenntnis der Natur der Dinge*; – hieraus entsteht weiter Unterwerfung gegen wohlerkannte *Nothwendigkeit*, – diese Unterwerfung, dieser Zwang, den *Rousseau* einzig billigte und empfahl; – entsteht noch weiter überlegtes Handeln, besonnene Wahl der Mittel zum Zweck. (Herbart 1804, S. 8)

Und doch hat sich die Beziehung von Mathematik und Welt verschoben, wenn nicht gar verkehrt. Die Mathematik hat sich als paradigmatisches Regelgebilde und Sprache der Abstraktion etabliert und übt den im Prozess ihres Entstehens inkorporierten Zwang nun selbst aus, sowohl auf die Lebenswelt als auch auf die Sprechenden. So konstatiert der Wissenschaftshistoriker Herbert Mehrstens:

Die Sprache Mathematik ist diktatorisch, denn die Zeichen und die Regeln werden gesetzt, und zwar so gesetzt, daß keine Uneindeutigkeiten erlaubt sind und kein Widerspruch zwischen den Regeln zu erwarten ist. Daß Mathematik anwendbar ist, kommt geradewegs aus dieser Struktur. Immer, wenn ich Vor-Schriften machen und möglichst gewiß sein will, daß sie eingehalten werden, kann ich mich der Befehlsstruktur der Sprache Mathematik bedienen. (Mehrstens 1990, S. 13)

Und weiter:

Die Sprache Mathematik ist als symbolisches Regelgebilde zwingend; wer sich darauf einläßt, sie zu sprechen, kann sich den Diktaten der Regel nicht entziehen. Zugleich aber ist diese

²⁷ Zu denken ist etwa an Adam Rieses „Machs wie vorgethan!“ oder Alfred Dürers „Thue im also!“

²⁸ Ausführlicher zur babylonischen Mathematik vgl. Høyrup (2002) sowie Robson (1999).

Sprache disponibel, ihre Gesetze sind gesetzt und können umgesetzt und umformuliert werden. (Ebenda, S. 477)

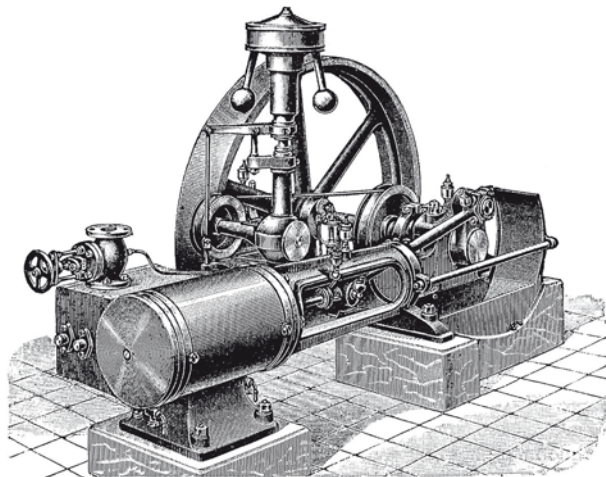
Geometrie ist also (auch) das paradigmatische Modell idealistischer Freiheit als Einsicht in die Notwendigkeit.

G4: Geometrie als Schule der technischen Naturbeherrschung

In einer Gesellschaft, die im Verlauf des 19. Jahrhunderts immer stärker durch den Zusammenschluss von Wissenschaft, Technik und Verwertung geformt wird, und in der Technik und Wissenschaft zur ersten Produktivkraft werden (vgl. Habermas 1969a), scheint es beinahe überflüssig, auf die Rolle geometrischen Wissens im Kontext technischer Anwendungen hinzuweisen. Die Dampfmaschine, Symbol der Industriellen Revolution, ist ja nachgerade die Stahl gewordene Transformation einer geradlinigen in eine kreisförmige Bewegung. Und die Beispiele angewandter Geometrie lassen sich – zumal wenn man den Blick ausweitet auf weitere Schlüsseltechnologien der Industrialisierung, wie optische, elektrotechnische oder chemische Industrie – unbegrenzt mehren.

Abb. 2.2 Die Dampfmaschine ist im 19. Jahrhundert Sinnbild und Verkörperung der Industriellen Revolution.

Bild: Meyers Großes Konversations-Lexikon (©1905–1909), gemeinfrei.



Doch die Erfahrung zeigt, dass gerade der Verwertungsaspekt der technischen Anwendbarkeit in der (Schul-)Geometrie oft unterbelichtet bleibt. Dafür gibt es verschiedene Ursachen. Zunächst ein generelles Bemühen der schulisch-akademischen Mathematik, sich frei von den Niederungen (und Fehlschlägen) der Anwendung zu halten. Dann die bildungsbürgerliche Tradition, die ihr Augenmerk immer schon mehr der formalen als der materialen (revolutionsverdächtigen) Bildung zuwandte. Schließlich die Erfahrungen zweier Weltkriege und einer Mathematikdidaktik, die sich im Dritten Reich Anwendungsorientierung auf die Fahnen schrieb.²⁹

²⁹ Zum ersten und dritten Punkt vgl. Ullmann (2008); zum zweiten Aspekt ► Abschn. G2: Geometrie als Schule des verständigen Denkens.

Geometrie zwischen Grundbegriffen und
Grundvorstellungen

Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Ludwig, M.; Filler, A.; Lambert, A. (Hrsg.)

2015, XI, 211 S. 80 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-06834-9