

Inhalt

42 – ein Geleitwort von Peter Gritzmann	xi
Vorwort	xiii
Vorwort zur ergänzten Neuauflage	xvii

1

Brigitte Lutz-Westphal

Optimal zum Ziel: Das Kürzeste-Wege-Problem	1
1 U-Bahn-Fahrten, Schulwege und die Reise von Datenpaketen . . .	1
Problem 1 – U-Bahn fahren	1
Problem 2 – Den Schulweg oder den Weg zur Arbeit optimieren	2
Problem 3 – Datenpakete verschicken	3
2 Die Qual der Wahl: Was soll optimiert werden?	3
3 Alle Möglichkeiten probieren: Enumeration	4
4 Graphen und Graphenisomorphie	6
Graphen und Wege	6
Das Graphenlabor	8
Graphenisomorphie	10
Matrizen	14
5 Die Breitensuche	16
Erste Ideen für einen »Weg-mit-minimaler-Anzahl-von-Kanten-Algorithmus«	16
Die Froschperspektive und die Lochblende	18
Formulierung der Breitensuche	20
Blättertausch und Rollenspiel: Überprüfen der Formulierung	24
6 Der Algorithmus von Dijkstra	26
Gewichtete Graphen	26
Den Algorithmus von Dijkstra nacherfinden	28

7	Mehr über optimale Wege	33
8	Vertiefung: Korrektheitsbeweise	35
	Korrektheitsbeweis für die Breitensuche	35
	Korrektheitsbeweis für den Algorithmus von Dijkstra	37

2

Brigitte Lutz-Westphal

	Günstig verbunden: Minimale aufspannende Bäume	39
1	Leitungsnetze planen, Straßen erneuern und Computer verkabeln	39
	Problem 1 – Leitungen erneuern	39
	Problem 2 – Straßenbeläge kostengünstig verbessern	41
	Problem 3 – Telefonleitungen mieten	41
	Problem 4 – Computernetzwerke verkabeln	42
2	Das Problem modellieren	42
3	Bäume	44
	Eindeutigkeit der Wege	45
	Die Anzahl der Baumkanten	46
	Die Anzahl der aufspannenden Bäume	50
4	Die Tiefensuche	53
	Der Algorithmus	53
	Korrektheitsbeweis	56
	Das Daumenkino und noch einmal die Lochblende	56
	Exkurs: Ariadne – die erste Informatikerin	58
	Enge Verwandte: Tiefensuche und Breitensuche	60
5	Die Algorithmen von Kruskal und Prim	62
	Kosten kommen ins Spiel	62
	Zwei »gierige« Vorgehensweisen	63
6	Steinerbäume	65
7	Vertiefung: Korrektheitsbeweise für die Algorithmen von Kruskal und Prim	66

3

Brigitte Lutz-Westphal

	Mathematik für die Müllabfuhr: Das chinesische Postbotenproblem	69
1	Tourenplanung für Müllabfuhr, Postzustellung und Museen	69
	Problem 1 – Müllabfuhr optimieren	69
	Problem 2 – Das chinesische Postbotenproblem	70
	Problem 3 – Ein Museum planen	71

2	Modellierung durch Graphen	71
	Welche Informationen werden zur Lösung der Aufgabe benötigt?	71
	Wie genau soll das Modell werden?	74
3	Das chinesische Postbotenproblem	76
4	Eulergraphen und Eulertouren	77
	Die Müllabfuhr, die Königsberger Brücken und Leonhard Euler	77
	Algorithmen für Eulertouren	79
	Figuren in einem Zug zeichnen	84
5	Knotengrade	84
	Die Anzahl der ungeraden Knoten	85
	Ein weiterer Beweis für die Anzahl der Blätter im Baum . . .	87
	Mehr über Knotengrade	87
6	Matchings: Was die Müllabfuhr mit Partnerwahl zu tun hat . . .	89
7	Die Lösung für Müllautos und andere Anwendungen	91
8	Thema mit Variationen: Andere Postbotenprobleme	93

4

Martin Grötschel

	Schnelle Rundreisen: Das Travelling-Salesman-Problem	95
1	Problem 1 – Städtereisen	95
	Die Modellierung als Graph	96
2	Problem 2 – Das Bohren von Leiterplatten	98
3	Löcher bohren: Die Zielfunktion	101
4	Der Ursprung des Travelling-Salesman-Problems	106
5	Lösungsmethoden	108
	Exakte Algorithmen: Enumeration	109
	Exakte Algorithmen: Ganzzahlige Programmierung	111
	Greedy-Algorithmen	115
	Approximationsalgorithmen für das STSP	118
	Verbesserungsverfahren	123
6	Vertiefung	124
	Die Nichtapproximierbarkeit des TSP	124
	Zufall und das TSP	126
7	Lösungen und Literaturhinweise	128

5

Timo Leuders

Wenn es Mathematikern zu bunt wird: Färbeprobleme	131
1 Landkarten, Fische, Handys und Botschafter	131
Problem 1 – Landkartenfärbung	133
Problem 2 – Fischgesellschaften	133
Problem 3 – Handynetze	135
Problem 4 – Diplomatenkarussell	135
Wie passt das alles zusammen?	136
2 Ideen, Begriffe und Zusammenhänge	137
Graphen als Modelle	138
Ein kleiner Abstecher oder: »Da bist du platt«	142
Reichen vier Farben denn nun immer? Plättbarkeit und Färbbarkeit	148
Wie sieht es aber nun mit 4 Farben aus?	153
3 Wie knackt man die Färbungsprobleme praktisch?	154
Fingerübungen	154
Jetzt wird es handgreiflicher: Färbelgorithmen	157
Von der Heuristik zum Algorithmus	164
»Vorwärts, und nicht vergessen!«	165
Wie aus einem Beweis ein Algorithmus wird	168

6

Stephan Hußmann

Mit Mathematik spielend gewinnen: Kombinatorische Spiele	171
1 Mit Mathematik spielend gewinnen	171
Spiel 1 – Bridg-It	171
Spiel 2 – Shannon-Switching-Game	172
Spiel 3 – Trianguli	173
Spiel 4 – Hex	173
2 Spiele mit mathematischer Strategie gewinnen	174
Bridg-It – Zugänge zur Graphentheorie	175
Kann das Spiel jemals unentschieden enden?	176
Wie kann eine geeignete Gewinnstrategie aussehen?	180
Wer beginnt, der gewinnt	181
3 Shannon-Switching-Game	183
4 Trianguli	191
5 Hex	197

7

Stephan Hußmann

Wer passt zu wem? Matchings	203
1 Jobs und Tanzkurse – immer eine Frage der richtigen Zuordnung	203
Problem 1 – Jobverteilung	203
Problem 2 – Tanzkurs	205
2 Eine Entdeckungsreise durch die Welt der Matchings	205
Auf welcher Seite stehst du? – Zweigeteilte Graphen	206
3 Stellen und Bewerber	210
Jetzt einmal gierig!	212
Perfekt matchen	213
Gute Nachbarschaftsverhältnisse	214
Jetzt wird geheiratet	216
Immer abwechselnd	218
Knoten statt Kanten	224
Eine Decke voller Knoten	226
4 Ein kurzer Ausblick: Matchings auf gewichteten Graphen	228

8

Stephan Hußmann

Wie viel passt noch in die Leitung? Flüsse und Netzwerke	233
1 Von Flüssen und Gewinnchancen	233
Problem 1 – Energietransport	234
Problem 2 – Handballmeisterschaft	236
2 Wie viel Wasser passt in den Fluss?	237
Viele Wege führen zum Ziel	240
Fluss und Kapazität	241
Welche Wege gibt es überhaupt?	244
Von verschiedenen Standorten auf das Problem schauen	246
Alltagserfahrungen nutzbar machen	246
Netzwerkschnitte	247
Vorwärts oder Rückwärts	248
Wie lässt sich ein Fluss maximieren?	251
Kleinster Schnitt trifft größten Fluss	253
Auf der Suche nach einem Algorithmus	254
3 Wer wird erster?	257
Spiele und Mannschaften	258

9

Martin Grötschel

Das Problem mit der Komplexität: $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?	265
---	-----

10

Andreas Brieden und Peter Gritzmann

Von Ackerbau und polytopalen Halbnormen: Diskrete Optimierung für die Landwirtschaft	275
1 Problem – Flurbereinigung	275
2 Lösung durch computergestützte Enumeration?	278
3 Modellierung	279
Die Nebenbedingungen	279
Geometrisch/zahlentheoretische Interpretation der zulässigen Menge	283
Wahl der Zielfunktion	286
Abstandsmessung	288
Abstandsmaximierung	291
Polytopale Halbnormen	294
Zusammenfassung des Algorithmus	299
4 Umsetzung in der Praxis	300
Optimierungsvorschlag	300
Postoptimierung vor Ort	301
5 Fazit	304

Ausgewählte Aufgaben	305
----------------------	-----

Lösungshinweise	325
-----------------	-----

Literatur	341
-----------	-----

Index	345
-------	-----

Diskrete Mathematik erleben
Anwendungsbasierte und verstehensorientierte
Zugänge

Hußmann, S.; Lutz-Westphal, B. (Hrsg.)

2015, XVII, 347 S. 204 Abb., 100 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-658-06992-6