Vom Satz …

2 Entdecken, Prüfen und Begründen

In vielen auch aktuell relevanten didaktischen Ansätzen spielt das entdeckende Lernen eine große Rolle (s. zum Beispiel Freudenthal 1977, Bruner 1981, Winter 1991, Wittmann 1981). Jeder Ansatz fokussiert den unabhängig Lernenden, der mathematische Zusammenhänge eigenständig zu konstruieren in der Lage ist. Eine theoretische Grundlage für diese Forderungen bildet der Konstruktivismus (s. von Glasersfeld 1998).

Trotz vehementen Forderungen nach einer solchen Form des Unterrichts mangelt es sowohl der wissenschaftlichen Mathematik als auch der Mathematikdidaktik an theoretischen Grundlagen, welche die Rationalität einer (öffentlich gewordenen) Entdeckung erfassen lassen. Hinsichtlich der Analyse von Begründungen sind solche Begriffe sowohl durch die mathematische Logik als auch durch die mathematikdidaktische Argumentationstheorie (u. a. Schwarzkopf 2000, Krummheuer 1997) gegeben. Zum Entdecken hingegen existieren viele Arbeiten, die pädagogisch-psychologische oder kognitionspsychologische Begriffe nutzen, um Gründe für die Betonung des Entdeckens darzulegen bzw. um Problemlösestrategien oder -phasen herauszuarbeiten. Erkenntnistheoretische Begriffe (im Sinne von philosophisch-logischen Begriffen) wurden zur Erfassung des Entdeckens jedoch noch nicht genügend genutzt, so dass die „Logik des Entdeckens“ weitgehend im Dunkeln bleibt. Vielfach werden vage Begriffe wie „Intuition“ (s. Fishbein 1999; Hersh 1997, S. 7) verwendet, wenn es um die Beschreibung dessen geht, was eine Entdeckung ausmacht. Das Entdecken zu mystifizieren, indem es der Intuition zugeschrieben wird, erlaubt jedoch kaum ein Verständnis für die Rationalität der Entdeckungen von Lernenden. Peirce schreibt zugespitzt: „We have no power of Intuition, but every knowledge is logically determined by previous cognitions“ (CP 5.265).

Für Bruner ist eine

> „[...] Entdeckung ihrem Wesen nach ein Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen [...]. Dies so, daß man die Möglichkeit hat, über das Gegebene hinauszugehen, das so zu weiteren neuen Einsichten kombiniert wird“ (ebd. 1981, S. 16).

Das „Neuordnen“ oder „Transformieren“ des gegebenen Wissens kann kein deduktives Ableiten des neuen Wissens aus dem alten Wissen sein. Wie wird dann aber die Intersubjektivität des Wissens gewährleistet? Welche Rationalität liegt der Erkenntnisgewinnung zu Grunde?

Was eine “Entdeckung” ist bzw. wie diese begrifflich zu fassen ist, konnte mit der Theorie der Abduktion des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce (1839-1914) beschrieben werden. Während für eine ausführliche Betrachtung dieser begrifflichen Schärfung des vormaligen Lernprinzips auch

M. Meyer, *Vom Satz zum Begriff*, Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 18, DOI 10.1007/978-3-658-07069-4_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

hinsichtlich der philosophischen Grundlagen auf Meyer (2007a) verwiesen werden muss, soll hier das dort entwickelte Begriffsnetz nur in seinen Grundzügen skizziert werden. Konkret werden hierbei betrachtet:

- Entdeckungen, charakterisiert durch die Schlussform Abduktion,
- Begründungen, charakterisiert durch die Schlussform Deduktion und (als potentielle Vorstufe des Begründens)
- Prüfungen, charakterisiert durch die Schlussform Induktion.

Bei der Darlegung der theoretischen Grundlagen wird insbesondere der Wahrheitsanspruch des Entdeckten thematisiert: Eine Entdeckung kann allein für sich keine Wahrheit beanspruchen. Das Produkt des Prozesses ist unsicher und muss überprüft werden, um einen Gültigkeitsanspruch zu erlangen. Beim entdeckenden Lernen sind Entdeckungen und Begründungen daher notwendig im Zusammenspiel zu betrachten: Während es einer Entdeckung ohne Begründung an Sicherheit fehlt, widerspricht das Begründen ohne vorherige Entdeckung dem Kern eines (aktiv-)entdeckenden Lernens.

Ziel der folgenden Abschnitte ist nicht die Ausschärfung der jeweiligen Begriffe, sondern vielmehr die Betrachtung der jeweiligen Werkzeuge, die später im (re-)konstruktiven Sinn zur interpretativen Analyse von Schulbüchern, zur Gestaltung von Aufgaben und zur Analyse von Schüleräußerungen bei der Bearbeitung dieser Aufgaben genutzt werden.[3]

2.1 Die Abduktion als Charakteristikum des Entdeckens

Die Abduktion wurde innerhalb der Mathematikdidaktik schon vereinzelt als Schlussform zur Rekonstruktion von Schüleräußerungen verwendet. Auch wenn sich einige Autorinnen und Autoren bei ihren Analysen ebenfalls auf Peirce beziehen, so zeigen die begrifflichen Fassungen der Abduktion deutliche Unterschiede. Die Unterschiede gründen darin, dass sich auch bei Peirce eine Entwicklung der Beschreibung der Abduktion nachzeichnen lässt. Diese Entwick-

[3] Als Grundlage vieler meiner Arbeiten zur Didaktik der Mathematik wurden die Inhalte dieses Kapitels schon in Meyer 2007a und b, 2008, 2009a, 2010a, b und d, Meyer und Voigt 2008 und 2009 veröffentlicht. Die Inhalte wurden so zusammengefasst, dass sie als Grundlage dieser Arbeit dienen können. Für tiefergehende theoretische Betrachtungen sei auf Meyer (2007a) verwiesen.

lung soll zunächst skizziert werden, bevor die Abduktion als Schlussform zur Charakterisierung des Entdeckens beschrieben wird.

2.1.1 Zur Entwicklung der Abduktion bei Peirce

Die Abduktion wurde von Ch. S. Peirce als dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion dargestellt. Fisch (1982) schreibt eindrucksvoll:

> „Seine größte Einzelentdeckung bestand darin, daß dasjenige, was er zuerst *Hypothese* und später *Abduktion oder Retroduktion* nannte, eine besondere Art des Arguments darstellt, sich sowohl von der Deduktion als auch von der Induktion unterscheidet und in der Mathematik wie in den Naturwissenschaften unentbehrlich ist." (Fisch 1982, S. 21)

Die verschiedenen Namen zu dem, was Peirce später als Abduktion bezeichnet, gehen mit einer Veränderung der Konzeptualisierungen dessen einher, was als Abduktion und als Induktion zu verstehen ist (s. Fann 1970, Magnani 2001). Zunächst betrachtete Peirce die Induktion als Schluss von gegebenen Einzelfällen zu einem allgemeinen Gesetz. Diese Auffassung der Induktion als gesetzesgenerierende Schlussform (heute auch als „unvollständige Induktion" bekannt) im Sinne eines „was ein paar Mal gilt, gilt immer" ist bis heute sehr verbreitet und wurde in der Mathematikdidaktik wiederholt zur Analyse angewendet (u. a. Winch 1913, Olander und Robertson 1973, Pedemonte 2007).

In seinen späteren Schriften (zu einem Zeitpunkt, als er die Abduktion noch entsprechend ihres Wahrheitsgehaltes als „Hypothesis" bezeichnete) stellt Peirce jedoch fest: „in almost everything I printed before the beginning of this century I more or less mixed up Hypothesis and Induction" (Peirce, CP 5.171).

Mit Beginn des 19. Jahrhunderts ändert Peirce seine Beschreibung und spricht der Induktion die Möglichkeit der Gesetzesgenerierung ab. Die Abduktion betrachtet er fortan als „the process of forming an explanatory hypothesis. It is the only logical operation which introduces any new idea" (CP 5.171). Der vormals als gesetzesgenerierend betrachteten Induktion kommt nun im Dreischritt von Abduktion (Hypothese bilden), Deduktion (Folgerungen aus der Hypothese ziehen) und Induktion einzig der Charakter der entscheidenden Schlussform zur Prüfung einer Hypothese zu. Eine Induktion kann entsprechend eine Hypothese bestätigen, wenn deren notwendige Konsequenzen eingetreten sind („enumerative Induktion", Lauth und Sareither 2002, S. 75ff; s. Abschnitt 2.3). Eine Hypothese gilt es hingegen zu widerlegen, wenn deren notwendige Konsequenzen nicht auftreten („eliminative Induktion", Lauth und Sareither 2002, S. 77ff; s. Abschnitt 2.3).

2.1.2 Die Abduktion als Schlussform

Die hier präsentierte Theorie der Abduktion beruht vorrangig auf zwei Punkten. Zum einen definiert Peirce selbst die „perfectly definite logical form” (CP 5.188) wie folgt:

> „The surprising fact, C, is observed;
> But if A were true, C would be a matter of course,
> Hence, there is a reason to suspect that A is true.” (CP 5.189, 1903)

Zum anderen formulierten die beiden deutschen Logiker Hempel und Oppenheim Bedingungen für wissenschaftliche Erklärungen: „Das Explanans muss mindestens ein allgemeines Gesetz enthalten“, und „das Explanandum muß tatsächlich rein logisch aus dem Explanans ableitbar sein“ (Stegmüller 1976, S. 452). In einer älteren Fassung der Abduktion berücksichtigt Peirce ebenfalls die Existenz allgemeiner Zusammenhänge (unter dem Begriff „rule“; CP 2.623, 1878). Die Ansätze von Peirce sowie Hempel und Oppenheim zusammenfassend lässt sich feststellen, dass wir bei einer Abduktion ausgehend von einem beobachteten Phänomen auf ein allgemeines Gesetz und einem das Phänomen erklärenden konkreten Fall schließen (s. Abb. 2.1). Da wir das Explanandum (das zu erklärende Phänomen) aus dem Explanans (dem erklärenden Gesetz und Fall) logisch ableiten können sollen (s. Zitat nach Stegmüller), wird das Phänomen durch die Abduktion zu einer konkreten Konsequenz des Gesetzes. Hierdurch bekommt das vormals erklärungsbedürftige und somit erkenntnisleitende Phänomen durch die vollzogene Abduktion seine logische Bedeutung als Resultat.

Phänomen (Resultat):	$R(x_0)$
Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$
Fall:	$F(x_0)$

Abbildung 2.1 Die allgemeine Form der Abduktion[4]

[4] Diese formale Darstellung der Abduktion beinhaltet die Variablen x und i. Damit wird die Universalität der Schlussform, wie sie in der Philosophie bedeutsam ist, eingeschränkt. Jedoch hat die Spezifizierung den Vorteil, dass die Anwendbarkeit im Bereich der Schulmathematik erleichtert wird. Fast alle Sätze der Schulmathematik lassen sich in die Form $\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$ transformieren, wenn mitbedacht wird, dass Äquivalenzaussagen als Kombinationen von Implikationen verstanden werden und die Variable i nicht nur für natürliche Zahlen stehen muss (sie kann auch für etwas nicht Abzählbares stehen). Auch sei angemerkt, dass in der wissenschaftlichen Diskussion verschiedene Schemata der Abduktion existieren (s. Schurz 2008). Das Gesetz der Abduktion beschreibt einen Zusammenhang zwischen zwei allgemeinen Urteilen. Dieser Zusammenhang wird in dieser Arbeit auch „Satz“ oder (vorrangig im Kontext der Schulbuch-

Das Schema in Abbildung 2.1 mag andeuten, dass bei der Abduktion mittels eines Gesetzes auf einen erklärenden Fall geschlossen wird. Zwar benötigen wir das Gesetz, um den Fall in der Kommunikationssituation plausibel zu machen, jedoch verhält es sich bei dem kognitiven Prozess des Entdeckens anders. So schreibt Peirce zu seiner Darstellung der Abduktion (s. Zitat oben):

> „Thus, A cannot be abductively inferred, or if you prefer the expression, cannot be abductively conjectured until its entire content is already present in the premise, ‚If A were true, C would be a matter of course'." (Peirce, CP 5.189)

Eco (1985, S. 295) bezeichnet die Verbindung von Gesetz und Fall als eine Art „Chiasmus": Wir erkennen sie gleichzeitig. Wir erschließen nicht den Fall mittels des Gesetzes, denn wenn das Gesetz präsent ist, dann muss der Fall ebenso präsent sein, zumal er in dem Antezedens (der Bedingung) des Gesetzes enthalten ist. Umgekehrt kann der konkrete Fall aber nur durch das allgemeine Gesetz ermittelt werden. Entsprechend ist das Gesetz ein Teil der Erklärung und nicht eine Prämisse des kognitiv zu vollziehenden Schlusses.

Der kognitive Prozess des Entdeckens beginnt also mit nur einer Prämisse, dem beobachteten Phänomen. Dieses Phänomen erscheint uns durch die Abduktion als eine Folgerung (Resultat) des assoziierten Gesetzes, wenn das Gesetz bewusst ist. Abduktiv zu erklärende bzw. bereits erklärte Phänomene sind *an sich* bereits Resultate eines zugrundeliegenden Gesetzes, welches nicht notwendig dem durch die Abduktion vom Individuum assoziierten oder gebildeten Gesetz entsprechen muss, also auch unabhängig von unseren individuellen Erkenntnisleistungen. Aber sie werden als Resultate eines (womöglich auch anderen) Gesetzes *für uns* nur durch unsere Erkenntnisleistungen und damit durch unsere kognitive Perspektive (re-)präsent.

Andererseits verwenden wir das Gesetz in der öffentlichen Kommunikationssituation, wenn wir unsere Entdeckung plausibel machen wollen: Wir schließen dann auf der Basis der Kenntnis von Phänomen (Resultat) und Gesetz auf den zu erklärenden Fall, um diesen plausibel zu machen. Entsprechend lässt sich das Schema des Schlusses differenzierter betrachten, wie in Abbildung 2.2 dargestellt wird.

---

analyse) auch „Merksatz" genannt. Ein „Satz" im Sinne dieser Arbeit muss also kein bereits bewiesener Satz sein. Es kann sich auch lediglich um eine Vermutung handeln. Da sich das präsentierte Schema bei der Rekonstruktion empirischer Phänomene bewährt hat, wird es in der vorliegenden Arbeit verwendet.

Resultat:	$R(x_0)$	Phänomen (Resultat):	$R(x_0)$
Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$	Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$
Fall:	$F(x_0)$	Fall:	$F(x_0)$

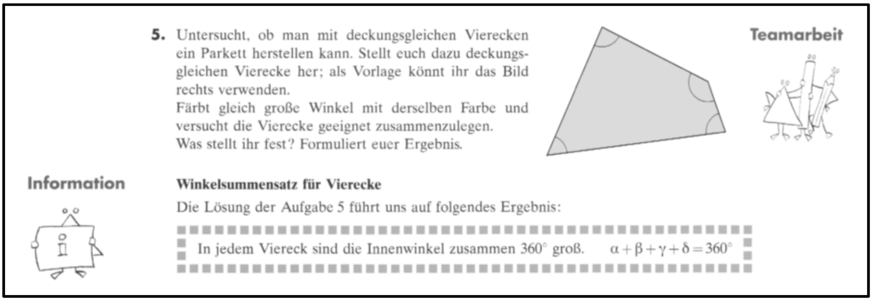
Abbildung 2.2 Schemata der Abduktion (links: das Schema zur öffentlichen Plausibilisierung einer Abduktion, rechts: das Schema der kognitiven Generierung einer Abduktion)

Das Schema der kognitiven Generierung einer Abduktion (rechts in Abb. 2.2) macht besonders deutlich, dass mittels dieser Schlussform auch Gesetze neu – zur Klärung des beobachteten Phänomens – erschlossen werden können. Das Aufstellen des Gesetzes erfolgt versuchsweise: Auch ein anderes Gesetz könnte ursächlich für das beobachtete Resultat gewesen sein. Ein anderes Gesetz würde einen anderen Fall mit sich bringen. Die Abduktion als Schluss von einer beobachteten Wirkung zu einer möglichen Ursache führt lediglich zu einem möglichen, keinem sicheren Fall.

Der Begriff „Gesetz“ ist hier entsprechend in einem sehr weiten Sinn zu verstehen: Gesetze müssen nicht wahre Sätze im mathematischen Sinn sein. Sie können nur plausibel sein oder gar falsch. Die einzigen Bedingungen, denen Gesetze bei der Abduktion genügen müssen, sind, dass sich das konkrete Resultat logisch aus ihnen ableiten lässt (als eine Konsequenz des assoziierten oder generierten Gesetzes) und der Fall ein konkretisiertes Antezedens des Gesetzes bildet.

Die beiden Schemata der Abduktion (s. Abb. 2.2) werden im weiteren Verlauf zu unterschiedlichen Zwecken verwendet. Sollen Lernende zur Entdeckung eines mathematischen Zusammenhanges beispielsweise durch die Aufgabe im Schulbuch angeregt werden, so erfolgt die Analyse mittels des Schemas der kognitiven Generierung einer Abduktion (rechts in Abb. 2.2). Hierdurch soll angedeutet werden, dass eine entsprechende Abduktion von den Lernenden noch zu vollziehen ist bzw. erwartet wird. Statt in dieser Situation von einem „erklärungsbedürftigen bzw. erkenntnisleitenden Phänomen“ zu sprechen, welches durch die Abduktion der Lernenden seinen logischen Status als Resultat eines Gesetzes bekommt, wird dies der sprachlichen Einfachheit halber direkt als „Resultat“ bezeichnet. Hierdurch soll ebenfalls deutlich werden, dass das erkenntisleitende Phänomen einem von der Konstrukteurin bzw. von dem Konstrukteur der Aufgabe intendierten logischen Status unterliegt bzw. zu unterliegen hat. Werden hingegen in der Interaktion Abduktionen öffentlich plausibilisiert, so erfolgt die Rekonstruktion mittels des Schemas, bei dem das Gesetz als Prämisse des (öffentlichen) Schlusses auftaucht (links in Abb. 2.2). Hierdurch soll deutlich werden, dass eine solche Abduktion bereits zuvor kognitiv vollzogen wurde und nun durch die Veröffentlichung plausibel gemacht wird.

Zur Verdeutlichung der Abduktion sei der Schulbuchauszug in Abbildung 2.3 betrachtet. Bei der Bearbeitung der Aufgabe 5 können viele Dinge entdeckt werden. Für die Entdeckung des Winkelsummensatzes, der im Schulbuch angezielt wird, ist entscheidend, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Aufmerksamkeit auf die gefärbten Winkel ihrer Vierecke richten und erkennen, dass die vier Innenwinkel des Vierecks den Vollwinkel ergeben.



5. Untersucht, ob man mit deckungsgleichen Vierecken ein Parkett herstellen kann. Stellt euch dazu deckungsgleichen Vierecke her; als Vorlage könnt ihr das Bild rechts verwenden.
Färbt gleich große Winkel mit derselben Farbe und versucht die Vierecke geeignet zusammenzulegen.
Was stellt ihr fest? Formuliert euer Ergebnis.

Teamarbeit

Information

Winkelsummensatz für Vierecke

Die Lösung der Aufgabe 5 führt uns auf folgendes Ergebnis:

In jedem Viereck sind die Innenwinkel zusammen 360° groß. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Abbildung 2.3 Auszug aus „Mathematik heute 7. Realschule. NRW“ (Griesel und Postel 2001, S. 107f)

Mittels der in Abbildung 2.4 dargestellten Abduktion gelingt es Lernenden, den Merksatz ausgehend von dem oben thematisierten Phänomen zu entdecken:

Resultat:	An den Ecken innerhalb der konkreten Parkettierung ergeben vier verschiedenfarbige Winkel einen Vollwinkel.
Gesetz:	Wenn die Innenwinkel eines beliebigen Vierecks zusammengefügt werden, ergeben sie einen Vollwinkel.
Fall:	Die vier verschiedenfarbigen Winkel an jeder Ecke innerhalb der konkreten Parkettierung sind die Innenwinkel des gewählten konkreten Vierecks.

Abbildung 2.4 Eine kreative Abduktion zum Erkennen des Merksatzes[5]

[5] In Abweichung von der Darstellung im Schulbuch ist der Merksatz als Implikation formuliert, damit die Analyse der logischen Zusammenhänge verständlicher wird. Auch ist die Implikation geometrisch formuliert, während im Schulbuch der Winkelsummensatz arithmetisch gefasst ist. Wie zuvor beschrieben wird zudem die erst mit der Abduktion einhergehende begriffliche

Obige Abduktion stellt ein Beispiel dafür dar, wie ein beobachtetes Phänomen mittels eines neuen Gesetzes erklärt wird. Eine solche Abduktion, mit der nicht nur ein Fall, sondern auch ein Gesetz neu entdeckt wird, nennt Eco (1985, S. 301) „kreative Abduktion“. Hiervon unterscheidet er solche Abduktionen, bei denen ein bekanntes Gesetz angewendet wird (ebd., S. 300f; s. Meyer 2007a, S. 45ff). Bei solchen Abduktionen wird ausgehend von einem beobachteten Phänomen ein ursächlicher Fall mittels eines bekannten Gesetzes unterstellt (s. Meyer 2007a, S. 45f). Dieser Typ von Abduktion spielt in den weiteren Analysen keine Rolle, zumal beispielsweise einführende Wege in den Schulbüchern rekonstruiert werden sollen, bei denen die Lernenden einen Merksatz (mittels kreativer Abduktion) finden sollen. Kreative Abduktionen lassen deutlich erkennen, welche Potentiale dieser Schluss birgt. So lassen sich mit diesem Schluss verschiedene Hypothesen bilden:

1. ein möglicherweise gültiges Gesetz,
2. ein unterstellter Zusammenhang zwischen dem Gesetz und dem Resultat und
3. ein möglicherweise gültiger Fall, welcher auf der Basis des unterstellten Gesetzes zu dem beobachteten Phänomen (welches dann als Resultat des Gesetzes erscheint) passt.

Sollen die Lernenden ausgehend von dem Schulbuch einen mathematischen Zusammenhang (einen Merksatz) erkennen, so erfolgt dies zumeist als Gesetz einer kreativen Abduktion. Denkbar wäre zudem auch dessen Entdeckung als Fall einer Abduktion. Solche Entdeckungswege ließen sich bei der Schulbuchanalyse (s. Kapitel 3) jedoch nicht rekonstruieren. Im Kontext der Darstellung eines allgemeinen Ansatzes zur Begriffsbildung in Kapitel 6 wird diese Möglichkeit noch von Bedeutung sein.

Die theoretische Betrachtung der Abduktion zeigt deutlich, dass sich die Abduktion nicht als logischer Schluss im Sinne der formalen Logik betrachten lässt. Schlüsse, die neue Elemente beinhalten, genügen einer formalen Logik nicht. Die Abduktion gibt vielmehr die philosophisch-logische Rationalität des Entdeckens wieder. Wenn als rational nur deduktive Logik verstanden werden soll, dann müsste mit Popper (2005, S. 7) der Entdeckungszusammenhang ausschließlich der Psychologie zugeschrieben werden, womit die Chance der Rekonstruktion von Entdeckungsprozessen vertan wäre. Diese Aussonderung von Entdeckungsprozessen aus der erkenntnistheoretischen Betrachtung ließ sich

Bestimmung der erklärungsbedürftigen und somit erkenntnisleitenden Phänomene als Resultat(e) des Gesetzes zu Gunsten der Lesbarkeit hier und im Folgenden nicht in den rekonstruierten Schemata berücksichtigt.

Springer

http://www.springer.com/978-3-658-07068-7

Vom Satz zum Begriff
Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht
Meyer, M.
2015, XIII, 199 S. 68 Abb., 4 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-07068-7