

Kapitel 2

Folgen und Reihen

Hauptziel dieses Kapitels ist es, Sie mit dem Konvergenzbegriff vertraut zu machen, *dem zweifellos wichtigsten Begriff der gesamten Analysis*. So gut wie alle der in späteren Kapiteln folgenden Überlegungen werden darauf aufbauen.

Um zu erläutern, worum es geht, appelliere ich wieder an Ihre Schulkenntnisse. Irgendwann wurde bestimmt die Zahl π eingeführt¹⁾, denken Sie etwa an die Formel

$$\text{Kreisumfang} = 2 \text{ mal } \pi \text{ mal Radius.}$$

Bei der Anwendung dieser Formel auf konkrete Situationen standen Sie dann vor dem Problem, für π einen Zahlenwert einzusetzen, d.h. statt π eine Dezimalzahl zu wählen, die „genügend nahe bei π “ liegt. Die Anzahl der Stellen hinter dem Komma (d.h. die Güte der Approximation) wird sich nach der Problemstellung richten. Für die meisten praktischen Zwecke wird „ $\pi \approx 3.14$ “ genügend genau sein, in jedem Fall wird übliche Taschenrechnergenauigkeit („ $\pi \approx 3.141592654$ “) ausreichen. Noch weit besser ist der Wert

$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445$
9230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709
3844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644
6229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712
0190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458
7006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330
5305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861
1738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793
8183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179
8609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271
4526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014,

doch *ganz genau* ist der immer noch nicht. Schlimmer noch: Man kann beweisen, dass π nicht rational ist, und insbesondere kann keine noch so lange Dezimalzahl den genauen Wert von π wiedergeben.

¹⁾In unserer Analysis ist es bis dahin allerdings noch ein weiter Weg, wir werden π erst in Definition 4.5.14 kennen lernen.

Von diesem Beispiel lernen wir:

- Es gibt Problemstellungen, bei denen man mit Approximationen zufrieden sein muss.
- Derartige Approximationen stehen im Idealfall in jeder gewünschten Genauigkeit (wenigstens im Prinzip) zur Verfügung. Im π -Beispiel etwa kann sich jeder aus den nachstehenden π -Approximationen

$$\begin{array}{l} 3.14 \\ 3.141 \\ 3.1415 \\ 3.14159 \\ 3.141592 \\ \vdots \end{array}$$

einen für sein spezielles Problem genügend genauen Wert aussuchen.

- Für die Anwendungen ist der genaue Wert völlig unerheblich. Zur Lösung aller praktischen Probleme ist es mehr als ausreichend, die ersten 10 Stellen nach dem Komma zu kennen, insbesondere, da die anderen in die Rechnung eingehenden Daten (Radius usw.) mit wesentlich größeren Fehlern behaftet sind.

Für uns wird es im Folgenden darum gehen, diese doch noch recht vagen Vorüberlegungen zur Grundlage einer geeigneten Theorie werden zu lassen. *Abschnitt 2.1* wird Ihnen sehr einfach vorkommen, dort wird die für die mathematisch genaue Beschreibung von Approximations-Phänomenen fundamentale Definition vorgestellt, der *Folgenbegriff*. Nach der Behandlung von Beispielen und einigen Bezeichnungsweisen geht es dann in *Abschnitt 2.2* weiter mit der Frage, wie denn

„ x liegt nahe bei y “

präzisiert werden kann. Wir werden das als „der Abstand zwischen x und y ist klein“ interpretieren, müssen uns dazu allerdings Gedanken machen, was „Abstand“ eigentlich bedeutet. Für \mathbb{R} ist das noch recht einfach, \mathbb{C} macht schon wesentlich mehr Mühe.

Dann aber steht der wichtigsten Definition der Analysis nichts mehr im Wege: *Wir können sagen, was es heißt, dass eine Folge konvergent ist.* Erste mit dieser Begriffsbildung zusammenhängende Ergebnisse werden anschließend diskutiert. *Abschnitt 2.3* ist dem Zusammenhang zwischen der Vollständigkeit von \mathbb{R} und Konvergenzaussagen gewidmet. Da spielt ein spezieller Typ von Folgen eine wichtige Rolle: *Cauchy-Folgen*. Die sind wichtig für die gesamte Analysis, wir werden sie sehr ausführlich behandeln.

Vollständigkeit lässt sich auch durch eine ordnungstheoretische Eigenschaft ausdrücken. Wir beginnen mit einem *Eckkurs über Ordnungsrelationen*, in dem

die Begriffe *Supremum* und *Infimum* eingeführt werden. Danach wird dann gezeigt, dass es eine Reihe von gleichwertigen Versionen der Vollständigkeit gibt, die ich Ihnen in Kapitel 1 noch nicht zumuten wollte, die sich aber wesentlich besser einsetzen lassen werden als Dedekindsche Schnitte.

Es ist dann nicht weiter schwer, durch Anwendung der bis dahin erzielten Resultate die wichtigsten Ergebnisse der *Reihenrechnung* zu erhalten: In *Abschnitt 2.4* werden wir mit Hilfe des Konvergenzbegriffs erklären, welche Zahl mit $x_1 + x_2 + \dots$ gemeint ist, wenn x_1, x_2, \dots eine Folge von Zahlen ist.

Einige *Ergänzungen* sind in *Abschnitt 2.5* zusammengestellt. Wir werden zunächst die aus der Schule bekannte Darstellung von Zahlen als *Dezimalzahlen* mit Hilfe der Reihenrechnung streng begründen. Danach kümmern wir uns um die Frage, was denn eine (endliche oder unendliche) Summe bedeuten soll, wenn keine Reihenfolge vorgegeben ist. Anschließend wird darauf hingewiesen, dass viele unserer Ergebnisse in der *Sprache der Linearen Algebra* sehr einprägsam formuliert werden können. (Keine Sorge, wenn Sie diese Vorlesung noch nicht gehört haben. Es werden Ihnen zwar einige Aha-Erlebnisse entgehen, alles Weitere werden Sie aber auch trotzdem gut verstehen können.) Abschnitt 2.5 schließt mit einem Versuch, den Begriff „Konvergenz“ etwas allgemeiner zu fassen.

2.1 Folgen

Obwohl uns vorerst nur Zahlenfolgen interessieren, definieren wir gleich Folgen in beliebigen Mengen:

Definition 2.1.1. Sei M eine Menge. Unter einer Folge in M verstehen wir eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow M$.

Folge

Da es sich um einen Spezialfall der Abbildungsdefinition handelt, ist alles zu beachten, was Sie über Abbildungen gelernt haben (siehe Kapitel 1 ab Definition 1.2.2): Man hat mehrere Möglichkeiten, eine Abbildung zu definieren, und einige Fallen sind auch zu vermeiden. Hinzu kommt, dass der Definitionsbereich \mathbb{N} ist, Definitionen können damit auch durch vollständige Induktion vorgenommen werden.

Allerdings: Die Schreibweise ist etwas anders als bei Abbildungen. Die heißen doch f, g usw., und das, was einem x zugeordnet wird, bezeichnet man mit $f(x)$. Bei Abbildungen würde man „der Zahl 4 wird 16 zugeordnet“ als „ $f(4) := 16$ “ schreiben, bei Folgen verwendet man Indizes, schreibt also „ $a_4 := 16$ “ oder „ $x_4 := 16$ “, je nachdem, ob die Folge durch ein „ a “ oder ein „ x “ oder sonstwie bezeichnet werden soll²⁾. Die Abbildung $n \mapsto n^2$ könnte man also als Folge dadurch definieren, dass man $a_n := n^2$ setzt. Meint man die Folge insgesamt, so verwendet man noch Klammern, schreibt also (a_n) und spricht von der „Folge der a_n “. Einige weitere, in der mathematischen Literatur gebräuchliche Bezeichnungen sind nachstehend durch die Folge $n \mapsto 2n$ illustriert:

(a_n)

²⁾Gesprochen wird das übrigens einfach als „a vier“ oder „x vier“.

- $(2n)_{n \in \mathbb{N}}$ („die Folge zwei n , n aus \mathbb{N} “).
- $(2n)_{n=1}^{\infty}$ („die Folge zwei n , n von 1 bis unendlich“).
- $(2, 4, 6, 8, \dots)$.

(Pünktchen sind im Interesse einer suggestiven Darstellung wieder legitim, wenn das Bildungsgesetz leicht zu entschlüsseln ist.)

Lassen Sie sich nicht durch das Zeichen „ ∞ “ für „unendlich“ irritieren, das hat absolut keine inhaltliche Bedeutung. Hier wird nichts unendlich groß, es soll nur ausgedrückt werden, dass die Indizes n immer weiter wachsen.

Um ganz sicherzugehen, dass Sie die neue Schreibweise verstanden haben, folgen noch einige einfache *Beispiele zur Illustration*:

- Sei $a_n := (-1)^{n+1}$. Dann ist (a_n) die Folge $(1, -1, 1, -1, \dots)$, das 212-te Folgenglied ist -1 .
- Die Folge $(\frac{1}{4n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ kann auch als $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{36}, \frac{1}{64}, \dots)$ geschrieben werden.
- $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ entsteht durch das Bildungsgesetz „eine Null, zwei Nullen, drei Nullen, usw., und dazwischen immer eine Eins“. Das nächste Folgenglied wäre damit eine 0, aber es ist bei dieser Darstellung nicht sofort klar, was – zum Beispiel – das 1 000 000-te Folgenglied ist.
- Durch $a_1 := 1$, $a_{n+1} := 2a_n + 1$ für $n \geq 1$ wird eine Folge (a_n) durch vollständige Induktion definiert. Die ersten Folgenglieder lauten $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.

Hier noch zwei Beispiele für etwas komplizierte Folgen, nämlich eine *Funktionenfolge* und eine *Mengenfolge*:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Damit ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der Menge aller Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Das erste Folgeelement ist die Abbildung $x \mapsto x$, das zweite die Abbildung $x \mapsto x^2$ usw.
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid -n \leq x \leq n\}$. Diesmal kommen also als Folgenglieder Teilmengen von \mathbb{R} heraus, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist damit eine Folge in der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von \mathbb{R} (vgl. Seite 11).

Vorläufig werden wir es nur mit Folgen von reellen und komplexen Zahlen zu tun haben, Sie haben noch eine Weile Zeit, sich an solche etwas komplizierteren Beispiele zu gewöhnen.

Es ist wichtig, dass Sie sich konkret gegebene Folgen *anschaulich vorstellen* können.

Dazu haben Sie *zwei Möglichkeiten*: Erstens können Sie eine Folge in M als eine Art *Spaziergang in M* interpretieren: Sie starten bei a_1 , sind im nächsten Schritt bei a_2 , dann bei a_3 , usw.

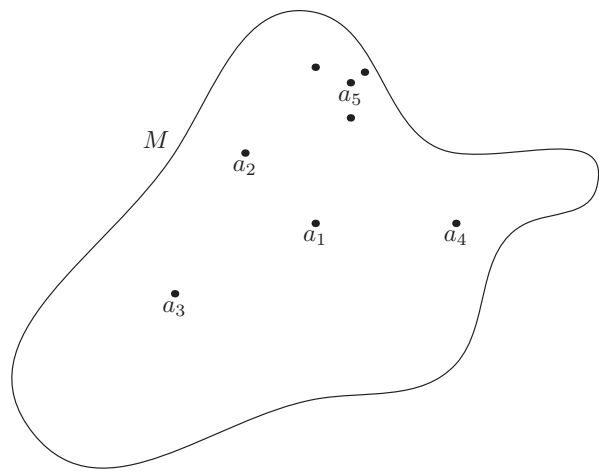


Bild 2.1: Folge als Spaziergang

Zweitens können Sie – wenn M eine Teilmenge von \mathbb{R} ist – den *Graphen* der die Folge definierenden Abbildung (das ist eine Teilmenge von $\mathbb{N} \times M$) als Veranschaulichung wählen. Betrachten Sie etwa als Beispiel die Folge $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$:

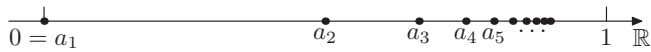


Bild 2.2: $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, erste Möglichkeit

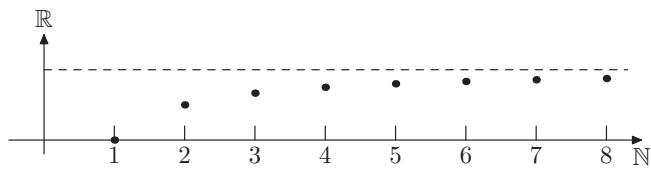


Bild 2.3: $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, zweite Möglichkeit

Je nach Situation wird eher die erste Variante – bei der man die Folge Schritt für Schritt verfolgt – oder die zweite – da liegt die Folge als Ganzes vor – zur Veranschaulichung eines Sachverhalts günstiger sein.

Ist eine Folge vorgelegt, so gibt es mehrere Verfahren, daraus neue Folgen zu konstruieren. Besonders hervorzuheben ist der *Übergang zu Teilfolgen*: Aus einer Folge erhält man eine Teilfolge, wenn man an der Reihenfolge der Elemente nichts ändert, aber evtl. einige Elemente auslässt, quasi überspringt:

Folge:	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	...
Teilfolge:		*			*	*		*	*			*	...

Alle nachstehenden Beispiele sind Teilfolgen von $(1, 2, 3, 4, \dots)$:

$$\begin{aligned}
 &(1, 3, 5, 7, \dots), \\
 &(1, 2, 3, 4, 5, \dots), \\
 &(1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots), \\
 &(1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots).
 \end{aligned}$$

Wichtig ist also, dass wirklich nur Elemente der Ausgangsfolge – und zwar jeweils höchstens einmal – verwendet werden und die Reihenfolge unbedingt erhalten bleibt. Ansonsten gibt es keine Einschränkungen, insbesondere darf man auch *alle* Folgenglieder wiederverwenden oder beliebig große Lücken lassen.

Drei Gegenbeispiele: Die Folgen $(1, 1, 2, 4, 6, 8, \dots)$, $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$ und $(1, -1, 2, -1, 3, -1, \dots)$ sind *keine* Teilfolgen von $(1, 2, 3, 4, \dots)$, denn bei der ersten Folge taucht die 1 doppelt auf, bei der zweiten wird die Reihenfolge verändert und bei der dritten gibt es sogar Folgenglieder, die gar nicht in der Ausgangsfolge zu finden sind.

?

Testen Sie, ob Sie Teilfolgen identifizieren können: Welche der folgenden Beispiele sind Teilfolgen von $(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots)$?

$$\begin{aligned}
 &(1, 1, 1, 1, \dots), \\
 &(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots), \\
 &(1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, \dots).
 \end{aligned}$$

Obwohl es nun intuitiv klar sein sollte, was eine Teilfolge ist, fehlt noch eine mathematisch präzise Formulierung. Die ist leider etwas schwerfällig:

Teilfolge

Definition 2.1.2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen in der Menge M . $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit

- (i) φ ist strikt monoton, d.h. $\varphi(n) < \varphi(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, und
- (ii) $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle n .

Durch die erste Forderung ist sichergestellt, dass die Reihenfolge erhalten bleibt, die zweite garantiert, dass nur Elemente von (a_n) in (b_n) auftreten.

Die „offensichtliche“ Teilfolge $(4, 16, 36, \dots)$ von $(1, 4, 9, 16, \dots)$ ist auch im strengen Sinne eine, man muss nur $\varphi(n) = 2n$ für alle n wählen. Beachten Sie, dass Sie mitunter mehrere Möglichkeiten haben, ein geeignetes φ auszuwählen. Man kann zum Beispiel $(1, 1, 1, \dots)$ auf viele verschiedene Weisen als Teilfolge von $(1, -1, 1, -1, \dots)$ darstellen.

Der Vollständigkeit halber ist noch auf den Begriff „Umordnung einer Folge“ hinzuweisen. In diesem Fall behält man die Folgenglieder alle bei, durchläuft sie aber evtl. in einer anderen Reihenfolge.

Z.B. sind $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$, $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ und die Folge $(100, 99, \dots, 2, 1, 200, 199, \dots, 101, 300, \dots)$ Umordnungen der Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$, *nicht* jedoch $(3, 2, 5, 4, 7, 6, \dots)$ oder $(1, 1, 2, 2, \dots)$ ³⁾. Auch hier ist die präzise Definition etwas mühsam:

Definition 2.1.3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen in der Menge M . $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Umordnung von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine bijektive Abbildung⁴⁾ $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit:

Umordnung

$$b_n = a_{\varphi(n)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man kann auf diese Weise durch Übergang zu Teilfolgen und Umordnungen aus einer einzigen Folge viele neue gewinnen. Das kann man auch iterieren, zum Beispiel eine Teilfolge einer Teilfolge oder eine Umordnung einer Teilfolge betrachten. Manchmal führt das nicht zu wirklich neuen Folgen, denn:

- Jede Teilfolge einer Teilfolge von (a_n) ist eine Teilfolge von (a_n) .
- Eine Umordnung einer Umordnung von (a_n) ist eine Umordnung von (a_n) .

Intuitiv ist das klar, wenn ein strenger Beweis gewünscht wird, der die vorstehenden Definitionen verwendet, ist das auch nicht besonders schwierig. Die erste Aussage folgt daraus, dass die Verknüpfung von monotonen Funktionen wieder monoton ist: Gilt für φ und ψ die Bedingung 2.1.2(i), so auch für $\psi \circ \varphi$. Für die zweite muss man im Wesentlichen nur nachweisen, dass Verknüpfungen bijektiver Abbildungen wieder bijektiv sind.

Und wozu das alles? Später wird es manchmal wichtig sein zu wissen, dass gewisse „schöne“ Eigenschaften von Folgen dann auch für alle Teilfolgen und alle Umordnungen gelten, ein Beispiel dafür ist Konvergenz. Auch wird es vorkommen, dass manchmal die Eigenschaften von Teilfolgen einer Folge eine Rolle spielen, um die Folge selbst besser zu verstehen. Und deswegen haben wir diese Konstruktionen gleich zu Beginn angesprochen.

2.2 Konvergenz

Convergence is our business
(Anzeige der Telekom, Herbst 2002)

Mit Hilfe des Folgenbegriffes sind wir in der Lage, einen Teil unserer Vorüberlegungen zur Zahl π zu Beginn dieses Kapitels zu präzisieren: Wir haben doch,

³⁾Die erste dieser beiden Folgen ist keine Umordnung, weil die 1, das erste Folgenglied, nicht verwendet wurde, beim zweiten Beispiel wurden Folgenglieder mehrfach aufgeführt.

⁴⁾vgl. Definition 1.10.1.

als wir π durch

$$\begin{aligned} &3.14 \\ &3.141 \\ &3.1415 \\ &3.14159 \\ &3.141592 \\ &\vdots \end{aligned}$$

„besser und besser“ beschreiben wollten, die durch

$$a_n := \text{„Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ auf } n + 1 \text{ Stellen“}$$

definierte Folge (a_n) betrachtet, um dadurch „für immer größere“ n die Zahl π durch a_n „immer genauer“ zu approximieren.

Wie aber kann man das mathematisch präzise ausdrücken? Wir behandeln dazu zunächst die Frage, was denn eigentlich der „*Abstand zweier Zahlen*“ genau bedeutet. Aus technischen Gründen diskutieren wir den Fall reeller und komplexer Zahlen getrennt, der zweite ist deswegen etwas schwieriger zugänglich, weil wir uns als Vorbereitung um die Existenz von Wurzeln kümmern müssen. Danach, in Definition 2.2.9, ist es dann Zeit für die wichtigste Definition dieses Buches.

Der Abstand zweier Zahlen: reelle Zahlen

Wie könnte man den *Abstand* zweier reeller Zahlen definieren? Dazu lassen wir uns von unserer außermathematischen Erfahrung leiten. Stellen Sie sich etwa vor, Sie würden an einem Autobahnwegweiser vorbeifahren und dort die folgenden Angaben finden:

HAMBURG	23 KM
HANNOVER	177 KM
GÖTTINGEN	284 KM

Es ist dann klar, wie Sie daraus den Abstand zwischen je zweien dieser Städte ermitteln können, man muss nur die Differenz der Zahlen in der „richtigen“ Reihenfolge bilden.

Diese Erinnerung wird nun in eine Definition für „Abstand zweier Zahlen“ umgeschrieben, Sie finden sie im zweiten Teil von

Definition 2.2.1. x und y seien reelle Zahlen.

$|x|$

(i) Wir definieren $|x|$ (gesprochen „ x Betrag“ oder „Betrag von x “) durch

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

(ii) Unter dem Abstand zwischen x und y verstehen wir die Zahl $|x - y|$.
(Je nachdem, welche der Zahlen die größere ist, gilt also $|x - y| = x - y$ oder $|x - y| = y - x$.)

Bemerkungen und Beispiele:

1. Zum Beispiel sind $|5| = 5$, $|0| = 0$ und $|-2234.21| = 2234.21$.

2. Im Laufe der Analysis und in späteren Vorlesungen werden Sie noch viele Beispiele für Abstandsdefinitionen kennen lernen (z.B. zwischen Funktionen oder zwischen Vektoren). Sie werden feststellen, dass alle diese Definitionen direkt von 2.2.1(i) abhängen oder auf irgendeine andere Weise die *ordnungstheoretischen Eigenschaften von \mathbb{R}* ausnutzen (vgl. die Definition des Betrages in \mathbb{C} oder die Beispiele zu metrischen Räumen in Kapitel 3). Kurz: *Der Ausgangspunkt aller konkreten Abstands begriffe ist die Ordnungsstruktur auf \mathbb{R} .*

3. Wegen $|x| = |x - 0|$ kann $|x|$ als „Entfernung von x zur Null“ oder als die „Länge von x “ aufgefasst werden. Genau genommen wurde also zunächst so etwas wie die „Größe“ einer Zahl erklärt – das ist der Betrag –, und dann wurde der Abstand zweier Zahlen als „Größe“ der Differenz festgesetzt. Dieses Verfahren werden wir in Kapitel 3 in komplizierteren Räumen kopieren.

4. $x \mapsto |x|$ kann als Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} aufgefasst werden, entsprechend $(x, y) \mapsto |x - y|$ als Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach \mathbb{R} .

Hier die für das Folgende wichtigsten Eigenschaften von Betrag und Abstand:

Satz 2.2.2. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $|x| \geq 0$, und aus $|x| = 0$ folgt $x = 0$.
- (ii) $|xy| = |x||y|$.
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).
- (i)' $|x - y| \geq 0$, und aus $|x - y| = 0$ folgt $x = y$.
- (ii)' $|x - y| = |y - x|$.
- (iii)' $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

**Dreiecks-
ungleichung**

Beweis: (i) Der erste Teil folgt sofort durch Fallunterscheidung: Ist $x < 0$, so ist $|x| = -x$, und das ist wegen Satz 1.4.3(v) eine positive Zahl. Und für $x \geq 0$ stimmt x mit $|x|$ überein.

Den zweiten Teil beweisen wir durch logische Kontraposition: Aus $x \neq 0$ folgt $|x| > 0$. Das geht wieder am Bequemsten durch Fallunterscheidung: In beiden möglichen Fällen, also $x < 0$ oder $x > 0$, folgt sofort aufgrund der Definition, dass $|x| > 0$ ist.

(ii) Für die Vorzeichen von x, y gibt es vier Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, y \geq 0, \\ x &\geq 0, y < 0, \\ x &< 0, y \geq 0, \\ x &< 0, y < 0. \end{aligned}$$

Die behauptete Gleichheit ist für jeden dieser vier Fälle nachzuprüfen; alles, was zum Beweis benötigt wird, steht in Satz 1.4.3. Hier als Beispiel die Argumentation im Fall $x < 0, y < 0$: $(-x)(-y)$ stimmt erstens nach Definition mit $|x||y|$ überein, darf zweitens durch xy ersetzt werden (Satz 1.3.6(x)), ist drittens positiv (Satz 1.4.3(vi)) und damit viertens nach Definition gleich dem Betrag von xy . In Formeln:

$$|x||y| = (-x)(-y) = xy = |xy|.$$

?

Versuchen Sie sich zur Übung am Beweis der verbleibenden drei Fälle.

(iii) Aus der Betragsdefinition ergibt sich sofort die auch in späteren Beweisen nützliche Bemerkung

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b, \quad -a \leq b \Rightarrow |a| \leq b. \quad (2.1)$$

Das folgt sofort aus der Definition des Betrages, denn $|a|$ ist ja eine der Zahlen a oder $-a$. Da offensichtlich $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$ (Beweis durch Fallunterscheidung) und analog $y \leq |y|$ und $-y \leq |y|$ gilt, folgt durch Addition dieser Ungleichungen

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

So erhalten wir mit Hilfe von (2.1): $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(i)' Das folgt sofort aus (i).

(ii)' Diese Aussage ergibt sich aus (ii):

$$\begin{aligned} |x - y| &\stackrel{1.3.6(\text{iv})}{=} |(-1)(y - x)| \\ &\stackrel{(\text{ii})}{=} |-1||y - x| \\ &\stackrel{1.4.3(\text{vi})}{=} 1 \cdot |y - x| \\ &= |y - x|. \end{aligned}$$

(iii)' Wegen (iii) gilt:

$$\begin{aligned} |x - z| &= |(x - y) + (y - z)| \\ &\leq |x - y| + |y - z|. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Die als *Dreiecksungleichung* bezeichneten Ungleichungen (iii) bzw. (iii)' sind ein unerlässliches Beweis-Hilfsmittel in der Analysis: Wenn man zeigen will, dass „ x nahe bei z “ ist, so braucht man wegen der Dreiecksungleichung nur zu zeigen, dass für irgendein geeignetes y „ x nahe bei y “ und „ y nahe bei z “ liegt.

Um die Bezeichnung „Dreiecksungleichung“ einzusehen, müssen wir bis zur Herleitung eines entsprechenden Resultats für \mathbb{C} warten. Dann kann die Ungleichung wirklich als andere Formulierung dafür aufgefasst werden, dass in einem

Dreieck die Summe zweier Seitenlängen mindestens so groß ist wie die dritte (vgl. die Bemerkung nach Satz 2.2.7 auf Seite 105).

Der Abstand zweier Zahlen: komplexe Zahlen

Die Analysis soll im Folgenden, wann immer möglich, gleichzeitig für \mathbb{R} und \mathbb{C} entwickelt werden, und daher benötigen wir eine passende Definition für die „Größe“ einer komplexen Zahl.

Die Idee ist einfach, für die Definition von „Größe“ werden wir eine Anleihe bei der Elementargeometrie machen und den *Satz von Pythagoras* verwenden. Schreibt man nämlich eine komplexe Zahl z als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten haben die Länge $|x|$ bzw. $|y|$, und die Länge der Hypotenuse ist doch sicher ein aussichtsreicher Kandidat für die „Größe von z “:

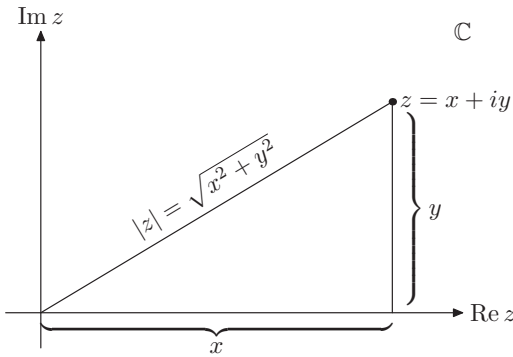


Bild 2.4: Satz des Pythagoras

Folglich sollte man $|z|$ als die Wurzel aus $x^2 + y^2$ definieren. Leider ist das Wurzelzeichen bisher aber noch nicht behandelt worden. Wir werden uns daher als Vorbereitung damit auseinander zu setzen haben, erst dann wird es mit dem Problem „Abstandsdefinition auf \mathbb{C} “ weitergehen können.

Was ist denn \sqrt{a} für eine reelle Zahl $a \geq 0$? Das ist doch die eindeutig bestimmte Zahl $b \geq 0$, deren Quadrat gleich a ist. Wenn wir wüssten, dass es ein eindeutig bestimmtes b gibt, dürfen wir wieder „taufen“⁵⁾, es soll natürlich \sqrt{a} genannt werden. Im nächsten Lemma zeigen wir in Teil (i) die Eindeutigkeit und in Teil (ii) die – viel schwieriger einzusehende – Existenz.

Lemma 2.2.3. *Sei $a \geq 0$ eine reelle Zahl.*

- (i) *Es gibt höchstens ein $b \geq 0$ in \mathbb{R} mit $b^2 = a$. Genauer: Aus $b_1^2 = b_2^2 = a$ und $b_1, b_2 \geq 0$ folgt $b_1 = b_2$.*
- (ii) *Es existiert ein $b \geq 0$ in \mathbb{R} mit $b^2 = a$.*

⁵⁾ Vgl. Seite 32.

Beweis: (i) Im Fall $b_1 = b_2 = 0$ sind wir sofort fertig. Ist mindestens eine der Zahlen b_1, b_2 von Null verschieden, gilt etwa $b_1 > 0$, so folgt $b_1 + b_2 > 0$, und damit ist $b_1 + b_2 \neq 0$. Weiter folgt aus $b_1^2 = b_2^2$, dass

$$0 = b_1^2 - b_2^2 = (b_1 + b_2)(b_1 - b_2),$$

und Satz 1.3.6(vii) („Körper sind nullteilerfrei“) liefert uns $b_1 - b_2 = 0$, d.h. $b_1 = b_2$.

(ii) Dieser Beweisteil ist nun wirklich kompliziert⁶), erstmals wird das Vollständigkeitsaxiom heranzuziehen sein.

Was ist zu tun? Wir suchen doch – bei vorgelegtem a – ein $b \geq 0$ mit einer speziellen Eigenschaft (nämlich $b^2 = a$), haben aber als tiefer liegende Existenzaussage lediglich zur Verfügung, dass in \mathbb{R} Schnitzzahlen für Dedekindsche Schnitte existieren.

Die einzig Erfolg versprechende Lösungsmethode wird also darin bestehen, einen Dedekindschen Schnitt so geschickt zu definieren, dass das Quadrat der Schnitzzahl gerade a ist. Wir wollen natürlich den Dedekindschen Schnitt

$$(\{x \mid x \leq \sqrt{a}\}, \{x \mid x > \sqrt{a}\}) \quad (2.2)$$

erhalten, doch wäre dieser Schnitt nicht definiert (denn die Existenz von \sqrt{a} soll ja gerade erst bewiesen werden). Wir werden also (2.2) so umformulieren, dass das Wurzelzeichen nicht mehr vorkommt. Das ist durch Quadrieren unter Beachtung einiger plausibler ordnungstheoretischer Zusätze nicht schwer, wir betrachten nämlich statt (2.2) die Mengen

$$(\{x \mid x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq a\}, \{x \mid x > 0 \text{ und } x^2 > a\}) \quad (2.3)$$

und behaupten dann:

1. Durch (2.3) wird ein Dedekindscher Schnitt in \mathbb{R} definiert.
2. Für die zugehörige Schnitzzahl b , deren Existenz durch das Vollständigkeitsaxiom 1.8.2 garantiert ist, gilt $b^2 = a$.

Die Einzelheiten dazu sind eher langwierig als schwierig:

Beweis von 1.: Nachzuweisen sind die Eigenschaften 1.8.1(i), (ii) und (iii) für Dedekindsche Schnitte, zur Abkürzung werden wir

$$A := \{x \mid x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq a\} \text{ und } B := \{x \mid x > 0 \text{ und } x^2 > a\}$$

setzen.

- zu 1.8.1(i): Es ist $A \neq \emptyset$, denn 0 gehört nach Definition zu A . Es gilt auch $B \neq \emptyset$, denn wegen $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a$ ist $a+1 \in B$.

⁶Sehr viel später werden wir als Anwendung des Zwischenwertsatzes eine (vom gleich anstehenden Beweis unabhängige) andere Beweismöglichkeit kennen lernen. Man vergleiche Korollar 3.3.7.

- zu 1.8.1(ii): Seien $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$ vorgelegt, wir haben $x_1 < x_2$ zu beweisen.

Am einfachsten geht das indirekt. Wir nehmen also $x_1 \geq x_2$ an und erhoffen uns nach einiger Rechnung einen Widerspruch:

Es ist $x_2 > 0$, und durch Anwendung einfacher Rechenregeln für Ungleichungen (vgl. Satz 1.4.3) erhalten wir daraus

$$x_1^2 \geq x_2^2 \geq 0.$$

$x_2 > 0$ impliziert auch $x_1 > 0$, und damit muss $x_1^2 \leq a$ gelten. Es folgt

$$a \geq x_1^2 \geq x_2^2 > a$$

und damit der Widerspruch $a > a$.

- zu 1.8.1(iii): Für $x \in \mathbb{R}$ gibt es drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} x &\leq 0, \\ x &> 0 \text{ und } x^2 \leq a, \\ x &> 0 \text{ und } x^2 > a. \end{aligned}$$

In den beiden ersten Fällen gehört x zu A , im dritten Fall zu B .

Insgesamt: (A, B) ist wirklich ein Dedekindscher Schnitt:

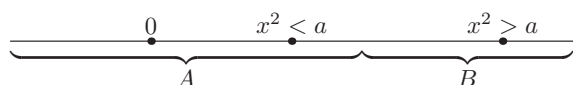


Bild 2.5: Der Dedekindsche Schnitt zur Wurzeldefinition

Beweis von 2.: Sei b die zu (A, B) gehörige Schnitzzahl, d.h. für $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ ist $x_1 \leq b \leq x_2$. Wir behaupten, dass $b^2 = a$ gilt und zeigen das durch ein ordnungstheoretisches Argument⁷⁾.

Wie zeigt man $x = y$? (Ein erstes Resumé)

Es kommt oft vor, dass man für zwei Zahlen x und y nachweisen möchte, dass $x = y$ gilt. Bisher stehen uns dafür die folgenden Techniken zur Verfügung:

1. *Direkter Beweis:* Man rechne einfach $x = x_1 = x_2 = \dots = x_n = y$ für geeignete x_1, \dots, x_n . Dabei wird in jedem Schritt eine einfache Umformung vorgenommen, und am Ende hat sich das x wirklich in das y transformiert. Logische Rechtfertigung für dieses Beweisprinzip ist die Transitivität der Gleichheitsrelation: „Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch untereinander gleich.“

Mit dieser Technik werden die meisten Induktionsbeweise geführt.

⁷⁾Es handelt sich um eine Präzisierung der Überlegungen, die wir am Ende von Abschnitt 1.8 angestellt haben, um die Nicht-Existenz einer Schnitzzahl für einen ähnlichen Schnitt in \mathbb{Q} einzusehen.

2. Beweis durch Umformen: Da geht man von einer schon als richtig erkannten Identität $a = b$ aus und formt solange um – durch Addition der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung, Subtraktion usw. – und, bis man zu $x = y$ gekommen ist.

3. Beweis durch Nachweis von definierenden Eigenschaften: Ein typisches Beispiel war der Beweis von Satz 1.3.6(ii): $0 \cdot x$ hat die Eigenschaften eines neutralen Elements, die sind eindeutig bestimmt, folglich muss $0 \cdot x = 0$ gelten.

Ähnlich geht es immer dann, wenn man weiß, dass genau ein x mit der Eigenschaft E existiert: Kommt dann ein weiteres y mit E ins Spiel, so muss $x = y$ sein.

4. Ordnungstheoretischer Beweis, falls x und y reelle Zahlen sind: Für je zwei reelle Zahlen x und y gilt doch aufgrund der definierenden Eigenschaften eines Positivbereichs, dass $x = y$ gefolgert werden darf, falls gleichzeitig $x \leq y$ und $y \leq x$ gilt. Außerdem ist stets eine der drei Aussagen $x < y$, $x = y$ oder $y < x$ wahr. Wenn es also gelingt zu zeigen, dass *nicht* $x < y$ und auch *nicht* $y < x$ sein kann, so muss $x = y$ gelten.

Wer es aus formalen logischen Gründen einsehen möchte, muss die Aussage

$$[(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p) \wedge (\neg r)] \Rightarrow q$$

beweisen. Es empfiehlt sich, noch einmal den Beweis von Satz 1.3.6(v) nachzulesen und sich zu überzeugen, dass das zugrunde liegende logische Prinzip wieder einmal nichts weiter ist als etwas trocken aufgeschriebene Lebenserfahrung.

(Die Fortsetzung folgt: auf Seite 115.)

In unserem Fall ist zu zeigen, dass nicht $b^2 > a$ und auch nicht $b^2 < a$ sein kann.

Angenommen, es wäre $b^2 > a$. Wir beachten zunächst, dass wegen $0 \in A$ notwendig $b \geq 0$ sein muss. Da $b^2 > a$ sein soll, ist $b = 0$ nicht möglich, es ist also $b > 0$.

Wir suchen uns eine Zahl ε mit den folgenden drei Eigenschaften:

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon, \\ 0 &\leq b - \varepsilon, \\ 2\varepsilon b &\leq b^2 - a. \end{aligned}$$

(So ein ε gibt es wirklich, man kann ε zum Beispiel als die kleinere der beiden Zahlen $b/2$, $(b^2 - a)/2b$ wählen.)

Dann ist $b - \varepsilon \in B$, denn $b - \varepsilon$ ist positiv und

$$\begin{aligned} (b - \varepsilon)^2 &= b^2 - 2\varepsilon b + \varepsilon^2 \\ &\stackrel{\varepsilon > 0}{>} b^2 - 2\varepsilon b \\ &\stackrel{\text{Wahl von } \varepsilon}{\geq} a. \end{aligned}$$

Da b als Schnitzzahl links von allen Elementen aus B liegt, folgt $b - \varepsilon \geq b$ und damit $\varepsilon \leq 0$ im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.

Also gilt *nicht* $b^2 > a$.

Im Falle $b^2 < a$ verfahren wir ganz analog. Wir wählen ein ε mit

$$\begin{aligned} 0 &< \varepsilon, \\ \varepsilon &\leq 1, \\ 2\varepsilon b + \varepsilon + b^2 &\leq a. \end{aligned}$$

(Etwa: ε ist die kleinere der Zahlen $1, (1/2)(a - b^2)/(2b - 1)$; es ist zu beachten, dass b wegen $0 \in A$ nicht negativ sein kann, wir also wirklich durch $2b + 1 > 0$ dividieren dürfen.)

Es ist dann $b + \varepsilon \in A$:

$$\begin{aligned} (b + \varepsilon)^2 &= b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon^2 \\ &\stackrel{\varepsilon \leq 1}{\leq} b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon \\ &\stackrel{\text{Wahl von } \varepsilon}{\leq} a. \end{aligned}$$

Andererseits muss $x \leq b$ für jedes $x \in A$ gelten (insbesondere also $b + \varepsilon \leq b$), und daraus erhalten wir den Widerspruch $\varepsilon \leq 0$. Folglich gilt *nicht* $b^2 < a$.

Das war sehr technisch, insbesondere sehen die an die ε gestellten Bedingungen nicht sehr plausibel aus. Sie ergeben sich aber fast zwangsläufig, wenn man von $(b - \varepsilon)^2 > a$ bzw. $(b + \varepsilon)^2 < a$ ausgeht und dann daraus durch Rückwärtsrechnen die Forderungen herleitet.

Damit ist der Beweis vollständig geführt. □

Wegen Lemma 2.2.3(i) und (ii) gibt es zu $a \geq 0$ *genau ein* $b \geq 0$ mit $b^2 = a$. Das führt zu

Definition 2.2.4. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Das nach Lemma 2.2.3 eindeutig bestimmte $b \geq 0$ mit $b^2 = a$ wird mit \sqrt{a} (lies: „Wurzel aus a “) oder $a^{1/2}$ bezeichnet.

\sqrt{a}

Für spätere Zwecke zeigen wir den

Satz 2.2.5. *Es seien a und b reelle Zahlen mit $a, b \geq 0$, weiter sei c eine beliebige reelle Zahl.*

- (i) *Die Gleichung $x^2 = a$ hat die Lösungen $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$, weitere Lösungen gibt es nicht.*
- (ii) *Es gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.*
- (iii) *Es ist $\sqrt{c^2} = |c|$.*
- (iv) *Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.*

Beweis: (i) Es ist klar, dass \sqrt{a} und $-\sqrt{a}$ Lösungen dieser Gleichung sind: \sqrt{a} nach Definition, und $-\sqrt{a}$ wegen $(-x)^2 = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Umgekehrt: Ist y irgendein Element aus \mathbb{R} mit $y^2 = a$, so folgt:

- Falls $y \geq 0$, so muss $y = \sqrt{a}$ gelten (Teil (i) des Lemmas 2.2.3).
- Falls $y < 0$, so muss $y = -\sqrt{a}$ sein, denn dann ist $-y > 0$ sowie $(-y)^2 = y^2 = a$, also $-y = \sqrt{a}$.

(ii) Wir wenden das dritte der im Kasten auf Seite 101 beschriebenen Beweisprinzipien an. Wegen der schon bewiesenen Eindeutigkeit der Wurzel ist nur zu zeigen, dass $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ und $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = ab$ gilt. Beides ist aber offensichtlich richtig.

(iii) Man beachte nur, dass $|c| \geq 0$ ist und dass

$$|c|^2 = \begin{cases} c^2 & \text{falls } c \geq 0 \\ (-c)^2 = c^2 & \text{falls } c < 0. \end{cases}$$

Wie im vorstehenden Beweis folgt $\sqrt{c^2} = |c|$.

(iv) Wäre $\sqrt{b} < \sqrt{a}$, so folgte nach Multiplikation mit \sqrt{b} , dass $b < \sqrt{a}\sqrt{b}$. Analog würde sich nach Multiplikation mit \sqrt{a} die Ungleichung $\sqrt{a}\sqrt{b} < a$ ergeben, zusammen also $b < \sqrt{a}\sqrt{b} < a$ im Widerspruch zur Voraussetzung $a \leq b$. \square

Damit Sie angesichts der vielen technischen Einzelheiten den *Überblick* nicht verlieren: *Der Wurzel-Exkurs ist zu Ende*, wir kommen wieder zurück zum Problem, den Abstandsbegriff in \mathbb{C} zu entwickeln. Wegen Satz 2.2.5 ist ein Definitionsversuch mit Satz-von-Pythagoras-Hintergedanken⁸⁾ zumindest sinnvoll. Dass das sogar erfolgreich ist, wird sich gleich zeigen.

⁸⁾Beachten Sie: Wir setzen an keiner Stelle die Gültigkeit des Satzes von Pythagoras voraus, er motiviert nur unser Vorgehen.

Definition 2.2.6.

(i) Sei $z \in \mathbb{C}$, z geschrieben als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Unter $|z|$ („ z Betrag“ oder „Betrag von z “) verstehen wir dann die Zahl $\sqrt{x^2 + y^2}$.
(Man beachte dazu, dass $x^2 + y^2$ wegen Satz 1.4.3(vii) nicht negativ ist, $\sqrt{x^2 + y^2}$ ist also wirklich definiert.)

 $|z|$

(ii) Für $z, w \in \mathbb{C}$ verstehen wir unter dem Abstand zwischen z und w die Zahl $|z - w|$.

Der nachstehende Satz entspricht Satz 2.2.2:

Satz 2.2.7. Für $z, w, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $|z| \geq 0$, und aus $|z| = 0$ folgt $z = 0$.

(ii) $|zw| = |z||w|$.

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(i)' $|z - w| \geq 0$, und aus $|z - w| = 0$ folgt $z = w$.

(ii)' $|z - w| = |w - z|$.

(iii)' $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ (Dreiecksungleichung).

Bemerkungen: 1. Jetzt können Sie verstehen, wie die Dreiecksungleichung zu ihrem Namen gekommen ist. Von z_1 nach z_3 geht es auf dem direkten Weg am schnellsten, der Umweg über z_2 führt zu einer mindestens genauso langen Wegstrecke.

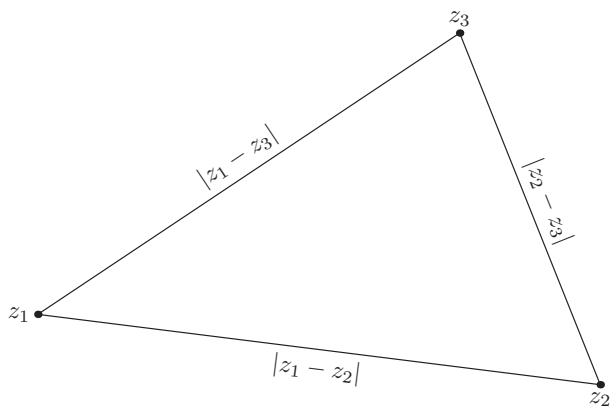


Bild 2.6: Die Dreiecksungleichung: $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$

2. Es ist darauf hinzuweisen, dass die neue Definition mit Definition 2.2.1 verträglich ist: Fassen wir $x \in \mathbb{R}$ als Element von \mathbb{C} auf, so ist es völlig egal, ob wir $|x|$ nach Definition 2.2.1 oder nach Definition 2.2.6 berechnen. Das ist gerade der Inhalt von Satz 2.2.5(iii).

3. Die Ungleichung in Satz 2.2.7(iii) wird ebenfalls Dreiecksungleichung genannt, es handelt sich um den Spezialfall von (iii)', wenn z_2 gleich Null ist. Allgemeiner ergibt sich übrigens leicht

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|,$$

und daraus

$$|z_1 + z_2 + z_3 + z_4| \leq |z_1 + z_2 + z_3| + |z_4| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|,$$

usw., also eine Vierecksungleichung, Fünfecksungleichung, ...

Beweis des Satzes: (i) Nach Definition der Wurzel gilt $|z| \geq 0$. Zum Beweis des zweiten Teils der Behauptung nehmen wir an, dass für ein z die Gleichung $|z| = 0$ gilt. Das bedeutet $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ und damit $x^2 + y^2 = 0$, wobei $z = x + iy$ mit reellen x, y geschrieben ist. Das ist – wieder wegen eines ordnungstheoretischen Argumentes, nämlich wieder wegen Satz 1.4.3(vii) – nur möglich, wenn x und y beide gleich Null sind, d.h. wenn $z = 0$ gilt.

(ii) z bzw. w seien als $z = x + iy$ bzw. $w = x' + iy'$ geschrieben (mit reellen n Zahlen x, y, x', y'). Es ist dann $zw = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$, also

$$|zw| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}.$$

Die Behauptung läuft also auf die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2}$$

hinaus. Die aber ergibt sich aus Satz 2.2.5(ii) und der direkt auszurechnenden Identität

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2.$$

(iii) Wir schreiben z und w wie im Beweis von (ii). Die Aussage in (iii) bedeutet dann gerade, dass

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \geq \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2}.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung behandeln wir sie so, wie Sie es aus Wurzelgleichungen aus der Mittelstufe (Quadrieren usw.) gewohnt sind, und zwar so lange, bis etwas offensichtlich Richtiges dasteht. Dann wird das Ganze in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben, wobei jeder Schritt zu begründen ist. Dieses „Rückwärtsrechnen“ ist fast immer der einzige Weg, um zu einer erfolgversprechenden Beweisidee zu kommen.

Im vorliegenden Fall starten wir mit

$$(xy' - yx')^2 \geq 0,$$

das ist das Endergebnis beim Rückwärtsrechnen, diese Ungleichung folgt aus Satz 1.4.3(vii). Umformen ergibt (nach der Addition von $x^2x'^2 + y^2y'^2$ auf beiden Seiten der Ungleichung)

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \geq (xx' + yy')^2,$$

und durch – wegen Satz 2.2.5(ii) gerechtfertigtes – Wurzelziehen auf beiden Seiten erhalten wir

$$\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} \geq |xx' + yy'| \geq xx' + yy'.$$

Nun wird mit 2 multipliziert, und auf beiden Seiten der Ungleichung wird die Zahl $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$ addiert. Das führt uns zu

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \right)^2 \geq (x + x')^2 + (y + y')^2.$$

Nochmalige Anwendung von Satz 2.2.5(ii) liefert schließlich die Behauptung.

(i)', (ii)', (iii)' ergeben sich sofort aus (i), (ii), (iii) wie im analogen Fall des Satzes 2.2.2. \square

Ich darf nun um Ihre konzentrierte *Aufmerksamkeit für die nächste Definition* bitten. Es wird darum gehen, zu präzisieren, dass eine vorgegebene Folge eine Zahl a „besser und besser approximiert“, so wie etwa π durch $(3.14, 3.141, \dots)$ approximiert wird.

Dabei werden wir im ersten Schritt (Definition 2.2.8) erklären, was es heißt, dass eine Folge der Null „beliebig nahe“ kommt und erst dann in Definition 2.2.9 „ (a_n) konvergiert gegen a “ als „ $(a_n - a)$ konvergiert gegen Null“ definieren.

Was also soll für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (z.B. in \mathbb{R}) bedeuten, dass sie der Null „beliebig nahe“ kommt? Intuitiv ist das klar, wenn Sie an konkrete Beispiele denken: $(1, 0.1, 0.01, \dots)$ kommt sicher der Null „beliebig nahe“, $(1, 0, 1, \dots)$ oder gar $(1, 2, 3, \dots)$ aber sicher nicht. Wie aber soll diese Intuition präzisiert werden? Wenn Sie nicht darauf kommen, trösten Sie sich: Bis zur nachstehenden Definition vergingen mehrere Jahrhunderte, in denen die Mathematiker den Konvergenzbegriff nur intuitiv verwenden konnten.

\mathbb{K}

Da wir nicht alles zweimal sagen wollen, nämlich einmal für \mathbb{R} und dann noch einmal für \mathbb{C} , treffen wir für den Rest dieses Buches die folgende *Vereinbarung*: Das Symbol \mathbb{K} steht stellvertretend für \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Kommt \mathbb{K} in einer Aussage mehrfach vor, so soll immer der gleiche Körper gemeint sein, also immer \mathbb{R} oder immer \mathbb{C} . Falls Ihnen das am Anfang Schwierigkeiten macht, sollten Sie überall \mathbb{K} durch \mathbb{R} ersetzen.

Definition 2.2.8 (sehr, sehr wichtig!). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . Wir sagen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (oder gegen Null konvergiert), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|a_n| \leq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Nullfolge

Diese Definition muss ausführlich erläutert werden, es folgen daher zahlreiche

Bemerkungen und Beispiele:

\forall, \exists

1. Bisher war es nicht nötig, unsere Aussagen durch die Einführung geeigneter neuer Symbole besser zu strukturieren. Definition 2.2.8 (und analog viele weitere noch zu besprechende Sachverhalte) werden übersichtlicher, wenn wir als Abkürzungen „ \forall “ für „für alle“ und „ \exists “ für „es existiert“ schreiben (der Gültigkeitsbereich dieser so genannten „*Quantoren*“ wird meist darunter geschrieben). Das Zeichen „ \forall “ muss nicht weiter erläutert werden, zur Abkürzung „ \exists “ sollte man ergänzen, dass sie als „es existiert *mindestens ein* ... mit ...“ gemeint ist.

Definition 2.2.8 kann unter Verwendung dieser neuen Kürzel so geschrieben werden:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge} \stackrel{\text{Definition}}{\iff} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n| \leq \varepsilon,$$

dabei wird der rechts stehende Ausdruck auch gleichwertig in der Variante

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq \varepsilon$$

verwendet.

Beachten Sie, dass Quantoren wirklich nur Abkürzungen im Interesse einer übersichtlicheren Schreibweise sind. Es wäre ziemlich sinnlos, Quantoren-Formeln stur auswendig zu lernen. Wichtig ist, dass Sie den *Inhalt* der Aussage verstehen.

2. Hier ein erstes Beispiel, es ist leider trivial⁹⁾: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_n = 0$ für $n \geq \hat{n}$, wobei \hat{n} eine natürliche Zahl ist. Von irgendeinem Index an besteht die Folge also aus lauter Nullen, man spricht auch von einer *abbrechenden Folge*. (Ist zum Beispiel $(a_n) = (1, 2, \dots, 100, 0, 0, 0, \dots)$, so könnte man $\hat{n} = 101$ wählen.)

Das ist dann eine Nullfolge, denn unabhängig von ε hat das durch $n_0 := \hat{n}$ definierte n_0 die gewünschten Eigenschaften. Es ist natürlich nicht verboten, n_0 durch eine größere Zahl zu ersetzen.

3. Als wichtigeres Beispiel betrachten wir die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, also $(1, 1/2, 1/3, \dots)$. Wir behaupten, dass es sich um eine Nullfolge handelt.

Dazu sei irgendein $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Aufgrund des Archimedesaxioms – genauer, wegen der in Satz 1.7.3(i) bewiesenen Folgerung daraus – gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \varepsilon$. Da für $n \geq n_0$ auch $1/n \leq 1/n_0$ ist und $1/n = |1/n|$ gilt, heißt das gerade: Für $n \geq n_0$ ist $|1/n| \leq \varepsilon$. Und das beweist die Behauptung.

⁹⁾ „Trivial“ bedeutet soviel wie „ganz fürchterlich einfach“. Dummerweise kann man sehr unterschiedlicher Meinung darüber sein, ob eine bestimmte Aussage nun trivial ist oder nicht. Auch Ihnen wird die Erfahrung nicht erspart bleiben, dass Sie eine Aussage lesen, die mit „Es ist trivial, dass ...“ anfängt, Sie aber keinen blassen Schimmer haben, wie man das denn begründen könnte. Varianten des Themas sind Sätze wie „Offensichtlich ist ...“ oder „Es ist leicht zu sehen, dass ...“. In *diesem* Buch allerdings ist versucht worden, das Wort „trivial“ nur in wirklich gerechtfertigten Fällen zu verwenden.

Die weitere Entwicklung der Analysis wird zeigen, dass $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht irgendein x -beliebiges Beispiel einer Nullfolge ist. Diese Folge ist vielmehr so etwas wie der Urvater aller konkret zu behandelnden Nullfolgen und folglich – weil „Konvergenz“ mit Hilfe von „Nullfolge“ definiert werden wird – aller konvergenten Folgen. Konvergenzbeweise werden darauf hinauslaufen, dass irgendwo „ $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge“ ausgenutzt werden wird. Besonders simple Folgen wie die abbrechenden Folgen im vorstehenden Beispiel betrifft das natürlich nicht.

Das ist natürlich nicht allzu überraschend, denn „ $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge“ ist äquivalent zum Archimedesaxiom und das ist das einzige Axiom, das die Existenz natürlicher Zahlen mit geeigneten Eigenschaften sichert, wie sie in der Definition „Nullfolge“ gefordert werden.

Zusammenhang zum Archimedesaxiom

Für belastbare Leser: Eben haben wir gesehen, dass aus dem Archimedesaxiom folgt, dass $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Umgekehrt gilt das auch. Hätten wir den Betrag und den Begriff „Nullfolge“ in beliebigen angeordneten Körpern eingeführt (wörtlich wie in 2.2.1 bzw. 2.2.8), so kann man beweisen, dass aus „ $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge“ das Archimedesaxiom folgt. (Haben Sie eine Beweisidee?) Kurz „ $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge“ ist nichts weiter als eine Umformulierung des Archimedesaxioms.

?

4. Für „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge“ schreibt man auch

lim

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ („Limes a_n für n gegen unendlich gleich Null“),
- oder $\lim a_n = 0$ („Limes a_n gleich Null“),
- oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ („ a_n gegen 0 für n gegen unendlich“),
- oder $a_n \rightarrow 0$ („ a_n geht gegen Null“);

wieder hat das Symbol „ ∞ “ keinerlei inhaltliche Bedeutung.

5. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . Je nachdem, ob Sie sich $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als „Spaziergang in \mathbb{K} “ oder durch den Graphen vorstellen (vgl. die Bemerkungen nach Definition 2.1.1 auf Seite 93), erhalten Sie für „ $a_n \rightarrow 0$ “ folgende Veranschaulichung:

- Die erste Möglichkeit (s. Bild 2.7):
„ $a_n \rightarrow 0$ “ bedeutet, dass außerhalb der Menge $\{x \mid |x| \leq \varepsilon\}$ ¹⁰⁾ höchstens endlich viele Folgenglieder liegen, nämlich schlimmstenfalls $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$.
- Die zweite Möglichkeit (Bild 2.8)¹¹⁾:
Die Aussage „ $a_n \rightarrow 0$ “ kann man sich so vorstellen, dass außerhalb jedes ε -Streifens (das ist der Bereich zwischen den Geraden $y = \varepsilon$ und $y = -\varepsilon$) höchstens endlich viele der Punkte (n, a_n) liegen.

¹⁰⁾Diese Menge ist in \mathbb{C} eine Kreisscheibe und in \mathbb{R} die Menge $\{x \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon\}$.

¹¹⁾Die ist nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sinnvoll einzusetzen.

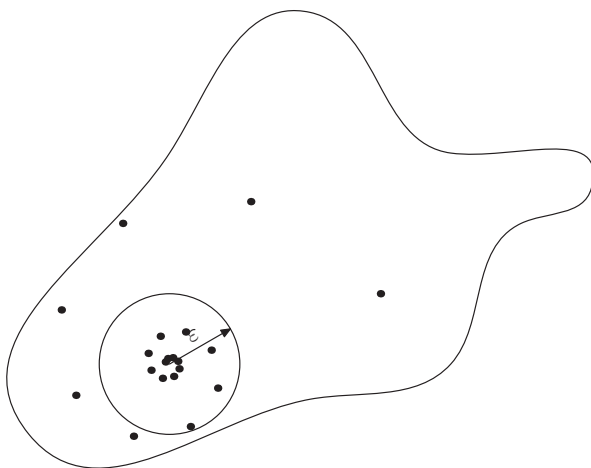


Bild 2.7: Nullfolge

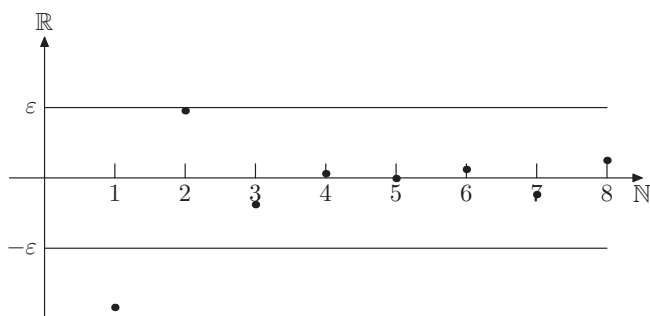


Bild 2.8: Graph einer Nullfolge

6. Für den Nachweis von „ $a_n \rightarrow 0$ “ ist ein „aus p folgt q “-Beweis zu führen, d.h. aus $\varepsilon > 0$ ist zu folgern, dass es ein n_0 mit gewissen Eigenschaften gibt. Sie dürfen dabei wirklich nichts weiter voraussetzen, als dass ε eine positive reelle Zahl ist. Für ein analoges Beispiel denken Sie etwa an den Induktionsschluss bei Induktionsbeweisen.

Folglich hat es Sie nicht zu interessieren, woher Sie Ihr ε bekommen, wie groß es denn nun wirklich ist, usw. Sie sollen einen Beweis liefern, der unabhängig vom konkreten ε klappt und nur $\varepsilon > 0$ ausnutzt, egal ob $\varepsilon = 1000$ oder $\varepsilon = 1/1000!$ ist. Anschaulich dürfen Sie sich daher den Beweis von „ $a_n \rightarrow 0$ “ als Konstruktion eines Automaten vorstellen, der zu gegebenem ε ein n_0 mit den geforderten Eigenschaften auswirft.

Um einen typischen Beweis vorzuführen, behandeln wir die folgende Aussage:

Behauptung: $(1/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Beweis 1 (sehr ausführlich): Wir haben zu zeigen, dass zu *jedem* vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass $|1/\sqrt{n}| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt.

Heimliche Vorüberlegung: $|1/\sqrt{n}| \leq \varepsilon$ bedeutet das gleiche wie $1/n \leq \varepsilon^2$, und für $n \geq n_0$ ist $|1/\sqrt{n}| \leq |1/\sqrt{n_0}| \leq 1/\sqrt{n_0}$. Es wird also reichen, ein n_0 mit $1/n_0 \leq \varepsilon^2$ zu finden.

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist dann auch $\varepsilon^2 > 0$, d.h. aufgrund des Archimedesaxioms existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \varepsilon^2$. Für jedes $n \geq n_0$ ist dann

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon;$$

dabei haben wir Satz 2.2.5(iv) verwendet.

Das beweist $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$. □

Achtung, Bezeichnungen!

Es hat sich eingebürgert, auf eine gewisse Bezeichnungsdisziplin zu achten. So kann das Auge mitdenken, und der Kopf ist frei für die wirklich interessanten Aspekte des Problems. Mathematisch wäre es zum Beispiel völlig korrekt, den Begriff „ (a_n) ist Nullfolge“ durch „Für alle $R > 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \leq x_0$ die Ungleichung $|a_{x_0}| \leq R$ gilt.“ zu definieren. Hätten Sie es aber gleich wiedererkannt?

Es hat übrigens recht lange in der Geschichte der Mathematik gedauert, bis man sich auf sinnvolle Abkürzungen geeinigt hat. Bis ins 15. Jahrhundert wurde noch alles sozusagen „in Prosa“ ausgedrückt, eine übersichtliche Formelsprache setzte sich in größerem Umfang erst im 17. Jahrhundert durch.

Beweis 2 (Standard): Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wähle aufgrund des Archimedesaxioms ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \varepsilon^2$. Es ist dabei zu beachten, dass wegen $\varepsilon > 0$ auch $\varepsilon^2 > 0$ ist. Für $n \geq n_0$ ist dann

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Damit ist $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ bewiesen. □

7. Am vorigen Beispiel ist wieder einmal das „Rückwärtsrechnen“ hervorzuheben: Erst durch Auflösen der gewünschten Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$$

nach $1/n$ kam das Archimedesaxiom ins Spiel. Versuchen Sie sich analog an einem exakten Beweis von $1/2n \rightarrow 0$ oder $1/n^2 \rightarrow 0$. ?

8. Erinnern Sie sich an den Kommentar nach Satz 1.7.3 über die Mathematiker-Hintergedanken zum Buchstaben ε . Anschaulich ist klar, dass Sie es für „große“ ε mit dem Nullfolgen-Nachweis leicht haben werden (nur „mäßig große“ n_0), sich aber anstrengen müssen, wenn ε „sehr klein“ ist (evtl. „riesengroße“ n_0).

9. Das Gegenteil von „für alle x gilt die Aussage A “ ist offensichtlich „es gibt ein x , für das A nicht gilt“, und das Gegenteil von „es gibt ein x mit A “ ist „für alle x gilt A nicht“.

Folglich bedeutet die Aussage „ (a_n) ist keine Nullfolge“:

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft: Wie groß auch immer $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt ist, es gibt ein $n \geq n_0$ mit $|a_n| > \varepsilon$.

Mit Quantoren liest sich das so:

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq n_0} |a_n| > \varepsilon.$$

Wenn Sie also nachweisen wollen, dass eine konkret gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, so müssen Sie ein derartiges „Versager- ε “ angeben (das wir dann meist mit ε_0 bezeichnen werden). Man kann z.B. $\varepsilon_0 := 1/2$ wählen, um einzusehen, dass $(1, 1, \dots)$ und $(1, 0, 1, 0, \dots)$ keine Nullfolgen sind. Für den Beweis von „ $(1/1000, 0, 1/1000, 0, \dots)$ ist keine Nullfolge“ müssen Sie sich um einen kleineren Versager bemühen. Was ist Ihr Vorschlag für ε_0 ?

?

10. Nach so vielen Bemerkungen sollte alles klar sein. Falls immer noch nicht: Lernen Sie die Definition fürs Erste auswendig und hoffen Sie auf ein besseres Verständnis im Laufe Ihrer weiteren Beschäftigung mit der Analysis. Faustregel: Besser auswendig richtig als falsch gemerkt.

Leider ist das keine überflüssige Bemerkung, denn es kommt immer wieder vor, dass manche sich „Nullfolge“ falsch, etwa als

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\varepsilon > 0} \forall_{n \geq n_0} |a_n| \leq \varepsilon$$

?

merken. Welche Folgen werden durch diese falsche Definition eigentlich beschrieben?

Die Definition von „Konvergenz“ ergibt sich quasi als Anhängsel. Nachdem wir wissen, was es bedeutet, dass eine Folge „beliebig klein“ wird, können wir „Konvergenz gegen a “ als „die Abstände zu a werden beliebig klein“ definieren. Genauer:

Definition 2.2.9. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} und $a \in \mathbb{K}$. Wir sagen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, wenn $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt mit: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a . Mit Quantoren:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Folgen, die nicht konvergent sind, heißen divergent.

konvergent

Bemerkungen und Beispiele:

1. Für „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent gegen a “ schreiben wir auch

$$\begin{aligned} & a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (\text{„}a_n \text{ gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich“}), \\ \text{oder} \quad & a_n \rightarrow a \quad (\text{„}a_n \text{ gegen } a\text{“}), \\ \text{oder} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (\text{„Limes } a_n \text{ gleich } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich“}), \\ \text{oder} \quad & \lim a_n = a \quad (\text{„Limes } a_n \text{ gleich } a\text{“}). \end{aligned}$$

2. Die vorstehende Bezeichnungsweise ist verträglich mit der für Nullfolgen, denn die gegen Null konvergenten Folgen sind gerade die Nullfolgen. Das wird manchen spitzfindig vorkommen, aber wenn es nicht so wäre, wüsste man nicht, was die Aussage „ $a_n \rightarrow 0$ “ eigentlich bedeuten soll.

3. Als Beispiel betrachten wir die Folge $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ gilt, denn die Differenz zwischen der Folge und der Zahl 1 ist die Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Das Beispiel ist leider enttäuschend einfach, denn es ist klar, dass Folgen der Form „ a plus Nullfolge“ gegen a konvergieren müssen. (Umgekehrt ist das auch richtig: Gilt $a_n \rightarrow a$, so schreibe man die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als $(a + (a_n - a))_{n \in \mathbb{N}}$. Damit ist (a_n) von der Form „konstante Folge plus Nullfolge“.)

Wie aber sieht es mit Folgen aus, für die ein Kandidat für das a weit und breit nicht in Sicht ist? Wie zeigt man etwa, dass die Folge $(1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots)$ konvergent ist? Diese Folge ist wirklich konvergent, aber erst im nächsten Abschnitt werden wir Methoden kennen lernen, das auch wirklich zu beweisen. Eine Umformulierung des Vollständigkeitsaxioms wird dabei eine ganz wesentliche Rolle spielen.

4. Jetzt können wir sagen, was wir zu Beginn des Kapitels eigentlich gemeint haben: Die Folge $(3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots)$ konvergiert gegen π . Umgekehrt: Konvergenz ist aus dem gleichen Grunde allgemein wichtig wie im konkreten π -Beispiel, denn im Falle $a_n \rightarrow a$ darf in vielen Fällen statt mit a mit den oft besser bekannten a_n (n „genügend groß“) gerechnet werden.

Soweit zur Definition der Konvergenz. Der Rest des Abschnitts ist *ersten Untersuchungen* dazu gewidmet. Wir behandeln

- *Technisches*: Wie kann man einer Folge ansehen, ob sie konvergent ist?
- *Permanenzaussagen*: Wie gewinnt man aus schon bekannten konvergenten Folgen neue?

Die Kombination von Permanenzaussagen mit dem Nachweis einiger exemplarischer Beispiele für Konvergenz (etwa $1/n \rightarrow 0$) liefert uns dann eine Fülle von Beispielen konvergenter Folgen. Diesem Aufbau – fundamentale Beispiele plus Permanenzsätze – werden wir in späteren Kapiteln noch oft begegnen.

Hier der eher technische

Satz 2.2.10. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . Dann gilt

(i)

$$\left(\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n| < \varepsilon \right) \iff a_n \rightarrow 0;$$

dabei haben wir die auf Seite 108 eingeführten Kürzel für „für alle“ und „es existiert“ verwendet.

„ $|a_n| \leq \varepsilon$ “ darf also bei Bedarf durch „ $|a_n| < \varepsilon$ “ ersetzt werden.

(ii) Es gebe ein $K > 0$ mit

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n| \leq K\varepsilon.$$

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Niemand braucht also zu verzweifeln, wenn beim Nullfolgenachweis zunächst nur – zum Beispiel – $|a_n| \leq 3\varepsilon$ gezeigt werden kann.

(iii) Es gebe eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} und ein \hat{n} mit $a_n = b_n$ für $n \geq \hat{n}$, d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unterscheiden sich schlimmstenfalls durch endlich viele Folgenglieder. Ist dann $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Kurz: Das Konvergenzverhalten ist nur abhängig von den a_n mit $n \geq \hat{n}$, wobei \hat{n} beliebig groß sein kann. „Jugendsünden“ einer Folge sind für das Konvergenzverhalten unerheblich.

(iv) Aus $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$ folgt $a = b$. Der Limes ist also eindeutig bestimmt, falls er existiert. Erst aufgrund dieser Tatsache ist man berechtigt, das Zeichen „ $\lim a_n$ “ zu benutzen¹²⁾.

Beweis: (i) „ \Rightarrow “ ist klar, denn aus $|a_n| < \varepsilon$ folgt erst recht $|a_n| \leq \varepsilon$.

Der Beweis von „ \Leftarrow “ wird – zum besseren Verständnis der Konvergenzdefinition – besonders ausführlich behandelt. Wir wissen, dass

$$\forall_{\tilde{\varepsilon} > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n| \leq \tilde{\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Dabei haben wir $\tilde{\varepsilon}$ („ ε Schlange“) statt ε geschrieben, um einer für Anfänger nahe liegenden Begriffsverwirrung zu entgehen. Wir zeigen nun:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

¹²⁾ Anders ausgedrückt: Könnte es vorkommen, dass für eine Folge (a_n) gleichzeitig $\lim a_n = 3$ und $\lim a_n = 4$ ist, so wüsste niemand, welche Zahl mit dem Zeichen $\lim a_n$ gemeint ist.

Sei dazu (irgendein) $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten dann $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon/2$ und wenden unsere Voraussetzung (2.4) für *dieses* $\tilde{\varepsilon}$ an. Das dürfen wir, denn mit ε ist auch $\tilde{\varepsilon} > 0$. Es existiert dann nach Voraussetzung ein n_0 , so dass $|a_n| \leq \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ für alle n mit $n \geq n_0$ ist. Da aber $\varepsilon/2 < \varepsilon$ gilt, folgt daraus $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Die Beweisidee lautet damit in Kurzfassung: Um (2.5) zu zeigen, wenden wir (2.4) für $\varepsilon/2$ an¹³⁾.

(ii) Die Idee ist ähnlich wie im vorigen Beweis, wir dürfen uns also kürzer fassen.

Um $a_n \rightarrow 0$ unter der Annahme zu zeigen, dass die Voraussetzung in (ii) erfüllt ist, wähle man bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gemäß Voraussetzung, aber nicht zu ε , sondern zu ε/K . Das darf man, da $\varepsilon/K > 0$ ist. Für das so gewählte n_0 gilt dann:

$$|a_n| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} \text{ für } n \geq n_0.$$

Wegen $K \cdot (\varepsilon/K) = \varepsilon$ erfüllt *dieses* n_0 die Bedingungen, die wir für den Nachweis der Nullfolgeeigenschaft benötigen. Und damit ist gezeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei konvergent gegen ein $b \in \mathbb{K}$. Wir wollen zeigen, dass auch $a_n \rightarrow b$ gilt und beginnen dazu mit der Vorgabe eines $\varepsilon > 0$. Wegen $b_n \rightarrow b$ finden wir ein n_0 mit $|b_n - b| \leq \varepsilon$, sobald nur $n \geq n_0$ ist. Das bedeutet $|a_n - b| \leq \varepsilon$, wenn $n \geq n_0$ und gleichzeitig $n \geq \hat{n}$ ist, denn dann ist $a_n = b_n$.

Damit haben wir einen Index n_1 (nämlich die größere der beiden Zahlen n_0 , \hat{n}) gefunden, so dass $|a_n - b| \leq \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_1$. Das zeigt $a_n \rightarrow b$.

(iv) Indirekt geht es am leichtesten: Wäre $a \neq b$, so wäre $|a - b|$ strikt positiv. Zu $\varepsilon := |a - b|/3$ gäbe es aufgrund der Konvergenzdefinition ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sowie ein $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon, \\ n \geq \tilde{n}_0 &\Rightarrow |a_n - b| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wählt man nun irgendein n , das gleichzeitig größer als n_0 und als \tilde{n}_0 ist, so folgt

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &= |a - b| \\ &= |(a - a_n) + (a_n - b)| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

also $3\varepsilon \leq 2\varepsilon$ und damit der Widerspruch $\varepsilon \leq 0$. □

¹³⁾Das sollten Sie sich aber nicht als „Setze $\varepsilon := \varepsilon/2$ “ merken!

Wie zeigt man $x = y$? (Fortsetzung von Seite 101)

Inzwischen haben wir weitere Methoden verwendet, um $x = y$ zu zeigen. Wir setzen die Aufstellung von Seite 101 fort:

5. *Der Beweis von $x \leq 0$, falls x eine reelle Zahl ist:* Wenn man zeigen kann, dass $x \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist, so muss $x \leq 0$ gelten.

Begründung: Die Annahme $x > 0$ kann durch Einsetzen von $\varepsilon := x/2$ zu einem Widerspruch geführt werden.

Und daraus folgt: Weiß man schon, dass $x \geq 0$ ist, so darf man aus „ $x \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ “ schließen, dass $x = 0$ sein muss. (Dieser Beweis kann auch verwendet werden, um für komplexe Zahlen z zu zeigen, dass $z = 0$ gilt: Man muss ihn nur für $x := |z|$ führen.)

6. *Beweis von $x = 0$ für reelle oder komplexe x mit Hilfe von Nullfolgen:* Ist $x \geq 0$ und weiß man, dass $|x| \leq a_n$ für alle n gilt, wobei (a_n) eine Nullfolge ist, so muss $x = 0$ gelten. Das folgt aus „5.“, man muss nur genügend große n wählen, um einzusehen, dass die Epsilon-Bedingung erfüllt ist.

Unter einem „*Permanenzsatz*“ versteht man ein Ergebnis, durch das aus den jeweils betrachteten Objekten (hier: konvergente Folgen) mittels für diese Objekte sinnvoller Operationen (hier: Summen, Vielfache, Produkte, ...) neue Objekte gewonnen werden können. Bevor wir den für konvergente Folgen relevanten Permanenzsatz beweisen, zeigen wir als Vorbereitung das folgende Lemma, das auch für sich von Bedeutung ist:

Lemma 2.2.11. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . Ist dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so gibt es ein $M > 0$ mit*

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folgen mit dieser Eigenschaft heißen beschränkt.

Kurz: Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis: (Vgl. Bild 2.9) Sei $a := \lim a_n$. Nach Definition gilt dann

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere gibt es – wenn wir das für $\varepsilon = 1$ anwenden – ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: Aus $n \geq n_0$ folgt $|a_n - a| \leq 1$.

Für $n \geq n_0$ ist dann:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$

d.h. für *diese* n dürften wir $M = 1 + |a|$ wählen. Leider gilt dann nicht notwendig $|a_1| \leq M, \dots, |a_{n_0-1}| \leq M$. Um auch noch das sicherzustellen, wählen wir M als die größte der Zahlen $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1$. Offensichtlich ist dann $|a_n| \leq M$ für *alle* a_n . \square

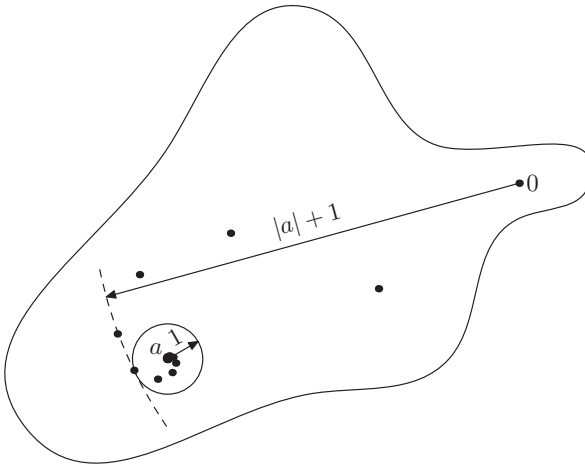


Bild 2.9: beschränkte Folge

Satz 2.2.12. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen in \mathbb{K} .

**Vergleichs-
kriterium**

- (i) Gilt $a_n \rightarrow 0$ und ist $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge (Vergleichskriterium oder Majorantenkriterium).
- (ii) Aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ folgt $a_n + b_n \rightarrow a + b$.
In Kurzfassung¹⁴⁾: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
- (iii) Aus $a_n \rightarrow a$ folgt $ca_n \rightarrow ca$ für jedes $c \in \mathbb{K}$.
Kurz: $\lim ca_n = c \lim a_n$.
- (iv) Aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ folgt $a_n b_n \rightarrow ab$.
Kurz: $\lim a_n b_n = (\lim a_n)(\lim b_n)$.
- (v) Aus $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ folgt $a_n/b_n \rightarrow a/b$, falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt.
Kurz: $\lim a_n/b_n = \lim a_n/\lim b_n$, falls $\lim b_n \neq 0$ und alle $b_n \neq 0$.
- (vi) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und a_n geschrieben als $a_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$); weiter sei $a = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a_n \rightarrow a$ genau dann, wenn $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$.
Kurz: Konvergenzuntersuchungen in \mathbb{C} können auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil und damit auf Konvergenzuntersuchungen in \mathbb{R} zurückgeführt werden.

¹⁴⁾ Achtung! Das ist wirklich nur eine einprägsame Kurzschreibweise. Die Formel müsste eingeleitet werden mit „Wenn $\lim a_n$ und $\lim b_n$ existieren, dann ...“

- (vii) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und es gelte $a_n \rightarrow a$. Ist dann $a_n \leq M$ für eine Zahl M und alle n , so gilt $a \leq M$. Entsprechend bleiben Ungleichungen der Form $\geq M$ im Limes erhalten.
- (viii) Ist (b_n) eine Teilfolge von (a_n) und ist die Folge (a_n) konvergent, so ist auch (b_n) konvergent. Es gilt $\lim b_n = \lim a_n$.

Beweis: (i) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wollen zeigen, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $|b_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Wegen $a_n \rightarrow 0$ finden wir ein n_0 , so dass $|a_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Dann ist aber erst recht $|b_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

(ii) Es ist zu zeigen, dass $(a_n + b_n) - (a + b) \rightarrow 0$, d.h. $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ soll „klein“ werden für „große“ n . Nun ist wegen der Dreiecksungleichung

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

d.h. es reicht, dass $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ „klein“ werden. Da das durch die Voraussetzung garantiert ist, brauchen unsere Überlegungen nur noch in einen vernünftigen Beweis umgeschrieben zu werden.

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist auch $\varepsilon/2 > 0$, und wegen $a_n \rightarrow a$ (bzw. $b_n \rightarrow b$) gibt es ein $n_a \in \mathbb{N}$ (bzw. $n_b \in \mathbb{N}$), so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_a$ (bzw. $|b_n - b| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_b$).

Sei n_0 die größere der beiden Zahlen n_a, n_b . Für $n \geq n_0$ ist dann

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $a_n + b_n \rightarrow a + b$ bewiesen.

(iii) Im Fall $c = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Im Fall $c \neq 0$ ist es am einfachsten, Satz 2.2.10(ii) anzuwenden: Wegen $|ca_n - ca| = |c||a_n - a|$ folgt aus $a_n \rightarrow a$, dass die Bedingung 2.2.10(ii) mit $K = |c|$ für die Folge $(ca_n - ca)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt ist. Also gilt $ca_n - ca \rightarrow 0$, d.h. $ca_n \rightarrow ca$.

(iv) Hier nutzen wir die Aussage des Lemmas 2.2.11 aus: Es gibt ein $M \geq 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist der Beweis einfach, wir brauchen nur einige schon bekannte Ergebnisse zu kombinieren.

Da $a_n b_n \rightarrow ab$ gezeigt werden soll, schätzen wir $|a_n b_n - ab|$ ab. Hintergedanke dabei: Wir wissen eigentlich nur etwas über $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$, müssen also zu Ausdrücken dieser Form kommen (was wieder durch Addition einer geschickt geschriebenen Null gelingt). Es ist

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \\ &\leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Nun ist $|a_n - a| \rightarrow 0$, $|b_n - b| \rightarrow 0$ nach Voraussetzung, also wegen (ii) und (iii) auch $M|a_n - a| + |a||b_n - b| \rightarrow 0$. Dann aber folgt aus (i), dass $a_n b_n - ab \rightarrow 0$, d.h. gerade die Behauptung $a_n b_n \rightarrow ab$.

(v) Die Idee ist ganz ähnlich wie im vorigen Beweis: Der zu untersuchende Ausdruck $|a_n/b_n - a/b|$ wird durch Terme abgeschätzt, in denen $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ vorkommen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b_n} + \frac{a}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b_n} \right| + \left| \frac{a}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \\ &= \frac{1}{|b_n|} |a_n - a| + \frac{|a|}{|b_n||b|} |b - b_n|. \end{aligned}$$

Es würde nun genau so wie unter (iv) weitergehen, wenn wir $1/|b_n|$ durch irgendeine Konstante M abschätzen könnten. (Dann nämlich könnte die Abschätzung durch

$$\leq M|a_n - a| + M \frac{|a|}{|b|} |b_n - b|$$

weitergehen, und $|a_n/b_n - a/b| \rightarrow 0$ folgte aus (i), (ii) und (iii).)

Wir zeigen noch, dass das wirklich möglich ist: Zu $\varepsilon := |b|/2$ gibt es ein n_0 mit der Eigenschaft, dass $|b_n - b| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ (wegen $b_n \rightarrow b$; man beachte, dass $\varepsilon > 0$, denn $b \neq 0$ nach Voraussetzung). Für diese n ist dann

$$\begin{aligned} |b| &= |b - b_n + b_n| \\ &\leq |b - b_n| + |b_n| \\ &\leq \frac{|b|}{2} + |b_n|, \end{aligned}$$

d.h., es gilt $|b_n| \geq |b|/2$.

Definiert man noch η als die kleinste der positiven Zahlen $|b_1|, \dots, |b_{n_0-1}|$, $|b|/2$, so ist $|b_n| \geq \eta$ und folglich $1/|b_n| \leq 1/\eta$ für *jedes* $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir mit $M := 1/\eta$ ein M mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

(vi) Aus $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ folgt durch Kombination von (ii) und (iii), dass $x_n + iy_n \rightarrow x + iy$, d.h. $a_n \rightarrow a$.

Umgekehrt: Nach Definition ist

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= \sqrt{(x_n - x)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \\ &= |a_n - a|. \end{aligned}$$

Gilt also $a_n \rightarrow a$, so garantiert uns (i), dass $x_n \rightarrow x$. Ganz analog wird $y_n \rightarrow y$ gezeigt.

(vii) Angenommen, es wäre $a > M$. Wir setzen dann $\varepsilon := a - M > 0$, aufgrund der Voraussetzung ist

$$\varepsilon = a - M \leq a - a_n \leq |a - a_n| \text{ für alle } n.$$

Deswegen könnte (a_n) nicht gegen a konvergent sein, und dieser Widerspruch beweist die Behauptung.

(viii) Der Beweis ist leicht: Schreibt man $b_n = a_{k_n}$, so gilt doch nach Definition $k_n \geq n$. Ist also $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$, so ist erst recht $|a - b_n| \leq \varepsilon$ für diese Indizes n .

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Bemerkungen und Beispiele:

1. Durch Kombination der Resultate in 2.2.12 mit der Kenntnis einiger konkreter Nullfolgen ergeben sich konvergente Folgen im Überfluss. Zum Beispiel gilt

$$\begin{array}{ll} 12/n - 16/n^2 \rightarrow 0 & \text{(Wegen (ii), (iii), } 1/n \rightarrow 0 \text{ und } 1/n^2 \rightarrow 0.) \\ (1 + 1/n) + 6i \rightarrow 1 + 6i & \text{(Wegen (iv) und } 1/n \rightarrow 0.) \\ 1/n! \rightarrow 0 & \text{(Man beachte (i) und } 1/n! \leq 1/n.) \\ \dots & \end{array}$$

2. Nicht nur, dass wir nun auf bequeme Weise Beispiele für konvergente Folgen erhalten: Es ist sogar so, dass so gut wie alle Konvergenzbeweise der Analysis durch souveränes Anwenden von Satz 2.2.12 gemeistert werden können (oft reicht schon eine Kombination des Majorantenkriteriums mit $1/n \rightarrow 0$ aus). Dazu zwei Beispiele:

- Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ gilt $q^n \rightarrow 0$.

Beweis: Im Fall $q = 0$ ist die Aussage sicher richtig, im Fall $q \neq 0$ schreiben wir die Zahl $1/|q|$ (sie ist nach Voraussetzung größer als 1) als

$$\frac{1}{|q|} = 1 + x,$$

wo $x > 0$ ist. Nun gilt

$$\bigwedge_{x>0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (1+x)^n \geq 1+nx \quad (2.6)$$

(die BERNOULLISCHE Ungleichung).

Wir erhalten so

$$\begin{aligned} |q^n| &= \frac{1}{(1+x)^n} \\ &\leq \frac{1}{1+nx} \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

womit aufgrund des Majorantenkriteriums $q^n \rightarrow 0$ gezeigt ist. (Den Nachweis der Bernoullischen Ungleichung sollten Sie zur Übung in vollständiger Induktion selbst führen.) \square

?

- $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$

Wir benutzen hier $\sqrt[n]{\cdot}$ im Vorgriff. Wir werden später in Korollar 3.3.7 sehen, dass es zu $a \geq 0$ genau ein $y \geq 0$ mit $y^n = a$ gibt; dieses y soll $\sqrt[n]{a}$ genannt werden. Wenn Sie es nicht erwarten können, empfehle ich Ihnen einen Beweisversuch in Analogie zu Lemma 2.2.3.

Beachten Sie, dass für größer werdende n bei der Zahl $\sqrt[n]{n}$ zwei gegenläufige Tendenzen zu gewinnen versuchen. Die Aussage $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ besagt gerade, dass der Einfluss des Wurzelziehens gegenüber dem Wachstum von n überwiegt.

Beweis: Wir geben nur die wichtigsten Schritte an:

- Zeigen Sie $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ durch vollständige Induktion;
- schreiben Sie $\sqrt[n]{n}$ als $1+x_n$, wo offensichtlich $x_n > 0$; es bleibt $x_n \rightarrow 0$ zu zeigen;
- man beachte, dass

$$\begin{aligned} n &= (\sqrt[n]{n})^n \\ &= (1+x_n)^n \\ &\geq 1+nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \end{aligned}$$

und damit $x_n \leq \sqrt{2/(n-1)}$.

Es folgt $x_n \rightarrow 0$ und damit $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. \square

3. Die Dreiecksungleichung spielte in den Beweisen zu (ii), (iv) und (v) eine ganz wesentliche Rolle. Es wurde schon in der Bemerkung nach Satz 2.2.2 ausgeführt, woran das liegt. Der typische „Trick“, sich das geeignete Vergleichselement zu beschaffen (etwa ab_n im Beweis von (iv)) bestand immer in der Addition einer geschickt geschriebenen Null.

4. Kombiniert man 2.2.10(ii) mit 2.2.12(i) und (iii), so erhält man sofort eine *verschärfte Form des Majorantenkriteriums*:

Gilt $a_n \rightarrow 0$ und gibt es $M > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \leq M|a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$, so ist auch $b_n \rightarrow 0$.

5. Beachten Sie bei der Anwendung des Majorantenkriteriums immer, dass die Nullfolge auf der richtigen Seite der Ungleichung steht: Aus $|b_n| \leq |a_n|$ und $b_n \rightarrow 0$ folgt für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gar nichts.

2.3 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Erinnern Sie sich an Bemerkung 3 nach Definition 2.2.9 auf Seite 112: Konvergenzbeweise benötigen, bevor es überhaupt losgehen kann, einen Kandidaten für den Limes. Das ist in vielen Fällen ein gravierender Nachteil, denn ein derartiger Kandidat ist der konvergenten Folge häufig nicht anzusehen.

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit werden wir in diesem Abschnitt behandeln. Wieder wird die Vollständigkeit von \mathbb{R} eine zentrale Rolle spielen:

Definition 2.3.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} . $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \substack{n, m \in \mathbb{N} \\ n, m \geq n_0} \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Diese Definition¹⁵⁾ bereitet Anfängern erfahrungsgemäß größere Schwierigkeiten als der Konvergenzbegriff. Daher einige

Bemerkungen:

1. Es gibt starke formale Ähnlichkeiten zur Definition „ (a_n) konvergiert gegen a “, in beiden Fällen ist zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit gewissen Eigenschaften zu finden. Hauptunterschied: Bei der Cauchy-Folgen-Definition kommen nur noch die Folgenglieder a_n in der Aussage vor, für den Konvergenz-Nachweis muss der Grenzwert a von vornherein bekannt sein. Dieser Vorteil, dessen Tragweite Sie bald einsehen werden, wird durch das Auftreten von *zwei* Indizes m, n erkauft. Die machen Anfängern manchmal Schwierigkeiten.

2. Da in \mathbb{K} die Cauchy-Folgen gerade die konvergenten Folgen sind (das wird gleich gezeigt werden), erübrigt es sich, Beispiele anzugeben. Trotzdem sollten Sie versuchen, mit der Definition eine anschauliche Vorstellung zu verbinden: „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge“ bedeutet, dass sich die Folgenglieder für „große“ Indizes „beliebig nahe“ kommen.

3. Wegen der großen Ähnlichkeit zur Konvergenzdefinition besitzen die meisten dazu gemachten Aussagen ein Analogon. Einige der Resultate sind ebenfalls sofort sinngemäß zu übertragen (z.B. die Aussagen in Satz 2.2.10(i), (ii), (iii)). Die für uns wichtigsten Ergebnisse sind im nachstehenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.3.2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen in \mathbb{K} .

- (i) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
- (ii) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt: Es gibt eine reelle Zahl M , so dass $|a_n| \leq M$ für alle n .

¹⁵⁾Sie geht natürlich auf CAUCHY zurück. Cauchy bewies viele wichtige Resultate aus verschiedenen Gebieten der Mathematik. Von ihm stammt einer der ersten Versuche, die Analysis streng zu begründen („Cours d'Analyse“, 1821).



AUGUST-LOUIS
CAUCHY
1789 – 1857

Cauchy-
Folge

- (iii) Angenommen, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Gilt dann $|b_n - b_m| \leq |a_n - a_m|$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.
- (iv) Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, so auch $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(ca_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für beliebiges $c \in \mathbb{K}$.
- (v) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und a_n geschrieben als $a_n = x_n + iy_n$ (mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$). Dann gilt:
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen.

Beweis: (i) Der Beweis besteht aus einer einfachen Anwendung der Dreiecksungleichung, wir vergleichen den Abstand der Folgenglieder mit dem Abstand zum Limes a :

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|.$$

Der eigentliche Beweis nutzt dann wieder ein $\varepsilon/2$ -Argument:

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da dann auch $\varepsilon/2 > 0$ ist und da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ ist dann

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist.

(ii) Aus der Cauchy-Folgen-Eigenschaft folgt:

$$\exists_{n_0} \bigvee_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}} |a_n - a_{n_0}| \leq 1.$$

Der Rest wird wie in Lemma 2.2.11 gezeigt.

Die Beweise zu (iii), (iv) und (v) werden hier nicht geführt. Sie brauchen lediglich die Beweise von Satz 2.2.12(i), (ii), (iii) und (vi) zu verstehen und sinngemäß zu übertragen. \square

Wir zeigen nun die Umkehrung von Satz 2.3.2(i), das zweifellos wichtigste Ergebnis dieses Abschnitts:

Satz 2.3.3. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Dann gibt es ein $a \in \mathbb{K}$ mit $a_n \rightarrow a$.

Kurz: Cauchy-Folgen in \mathbb{K} sind konvergent.

Beweis: Wir kümmern uns zunächst um den *reellen Fall*, denn das Vollständigkeitsaxiom für \mathbb{R} wird eine wesentliche Rolle spielen. Wir haben von irgendwoher eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} vorgelegt bekommen und sollen nun so lange arbeiten, bis wir sicher sind, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$ gibt. Ein Blick auf das Axiomensystem von \mathbb{R} genügt, um festzustellen, dass tiefer liegende Existenzaussagen auf die Existenz von Schnitzzahlen zurückgeführt werden müssen (genauso war es beim Beweis für die Existenz von Wurzeln in Lemma 2.2.3(ii)).

Es stellt sich damit das folgende *Problem*:

Gegeben sei eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} . Man soll nun einen Dedekindschen Schnitt (A, B) so konstruieren, dass die Schnitzzahl a (deren Existenz wegen 1.8.2 garantiert ist) der Limes der a_n ist.

Vielleicht kommen Sie selbst auf einen vielversprechenden Kandidaten für (A, B) , hier machen wir mit der folgenden Definition weiter:

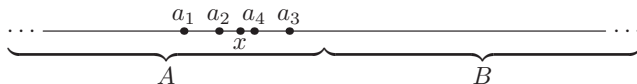


Bild 2.10: Der Dedekindsche Schnitt zur Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} A &:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, \text{ es existiert } n_0 \text{ mit } a_n \geq x \text{ für alle } n \geq n_0\} \\ B &:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \notin A\}. \end{aligned}$$

Der weitere Beweisaufbau ist klar, wir behaupten:

1. (A, B) ist ein Dedekindscher Schnitt.
2. Sei a eine Schnitzzahl für (A, B) , sie existiert wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} . Dann gilt $a_n \rightarrow a$. (Dann ist der Satz für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vollständig bewiesen).

Beweis von 1.: Wir zeigen, dass 1.8.1(i), (ii) und (iii) erfüllt sind:

- zu (i): Wegen 2.3.2(ii) gibt es ein $M \geq 0$ mit

$$|a_n| \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet $-M \leq a_n \leq M$ für $n \in \mathbb{N}$, und daraus folgt sofort, dass $-M \in A$ und $M + 1 \in B$.

- zu (ii): Wir bemerken zunächst, dass mit $x \in A$ auch jedes $x' \in \mathbb{R}$ mit $x' \leq x$ zu A gehört. Das folgt sofort aus der Definition. Es ergibt sich dann leicht, dass für $x \in A$ und $y \in B$ notwendig $x < y$ gilt: Die $y \leq x \in A$ liegen nämlich nach Vorbemerkung in A und damit nicht in B .
- zu (iii): Das ist klar nach Definition von B .

Beweis von 2.: Aufgrund der Vollständigkeit von \mathbb{R} gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq a \leq y$ für $x \in A$ und $y \in B$. Wir wollen $a_n \rightarrow a$ beweisen. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir zeigen:

- Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$.
- Es gibt ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$.

Es ist klar, dass dann $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, wobei n_0 die größere der beiden Zahlen n_1, n_2 bezeichnet, und damit ist wirklich $a_n \rightarrow a$ bewiesen.

Nun fehlt nur noch die Konstruktion von n_1 und n_2 :

n_1 : Es ist $a - \varepsilon < a$, die Zahl $a - \varepsilon$ kann also nicht in B liegen. Also gilt $a - \varepsilon \in A$, woraus nach Definition von A sofort die Existenz von n_1 folgt.

n_2 : Das ist etwas schwieriger, erst *hier* wird die Cauchy-Folgen-Eigenschaft der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ausgenutzt (bisher war lediglich von Bedeutung, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist). Wir wählen n_2 so, dass

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \text{ für } n, m \geq n_2,$$

und wir wollen noch zeigen, dass dieses n_2 die geforderte Eigenschaft hat. Sei also $n \geq n_2$ gegeben. Für $m \geq n_2$ ist $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ und damit insbesondere $a_m \geq a_n - \varepsilon$.

$a_n - \varepsilon$ erfüllt also die für Elemente aus A geforderte Bedingung¹⁶⁾, und das liefert uns, da a Schnitzzahl ist, $a_n - \varepsilon \leq a$. Und das bedeutet $a_n \leq a + \varepsilon$ für $n \geq n_2$.

Soviel zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der noch ausstehende Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergibt sich vergleichsweise leicht. Wir beginnen mit einer Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} und schreiben jedes a_n als $a_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann schließen wir folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccc} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge} & \xrightarrow{2.3.2(v)} & (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folgen} \\ & \xRightarrow{\text{erster Beweisteil}} & (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \\ & \xrightarrow{2.2.12(vi)} & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent.} \end{array}$$

Damit ist der Satz (endlich!) bewiesen. □

Kommentar: Mit Satz 2.3.3 haben wir ein häufig anwendbares Ergebnis gewonnen, das uns – bei genügend geschicktem Beweis – die *Existenz* von Zahlen mit gewünschten Eigenschaften sichert. Bisher stand uns für derartige Existenzaussagen nur das Vollständigkeitsaxiom zur Verfügung (jedenfalls, wenn man von einfacheren Existenzaussagen wie der Existenz von Inversen oder dem Archimedesaxiom absieht).

Cauchy-Folgen sind viel besser einsetzbar als Dedekindsche Schnitte, die werden ab jetzt keine wesentliche Rolle mehr spielen. Der Vorteil Dedekindscher Schnitte besteht darin, dass mit ihnen Vollständigkeit relativ einfach formuliert werden kann.

Cauchy-Folgen sind also konvergent, und Dedekindsche Schnitte sollen nach Möglichkeit nicht mehr verwendet werden. Geht da nicht etwas von unserem Axiomensystem verloren? Nein! Wir werden in Satz 2.3.6 beweisen, dass Vollständigkeit äquivalent mit Cauchy-Folgen formuliert werden kann. Bei der Gelegenheit wird es auch um weitere Umformulierungen dieses so fundamentalen Prinzips gehen, und um die zu verstehen, müssen Ihre Kenntnisse zum Thema „Ordnung“ noch etwas vertieft werden. Es folgt deshalb zunächst ein

¹⁶⁾Nämlich: Bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen liegen alle Folgenglieder rechts von $a_n - \varepsilon$.

Exkurs über Ordnungsrelationen:

Bisher kennen wir „Ordnung“ nur aus Abschnitt 1.4: Durch die Festsetzung eines Positivbereichs und die damit mögliche Definition von „ \leq “ kann man in angeordneten Körpern je zwei verschiedene Elemente vergleichen, eins von beiden wird immer das größere sein. Das ist allerdings nur ein Teil dessen, was man über „Ordnung“ unbedingt wissen muss. Es kommt nämlich nicht nur in Körpern vor, dass so etwas wie eine „Rangfolge der Elemente“ eine Rolle spielt. Wir beginnen den Exkurs mit

Ordnungsrelationen: Definition \prec

Es sei M eine Menge und \prec eine Relation auf M : Es ist also eine Teilmenge \prec von $M \times M$ vorgegeben. Wie in Definition 1.2.3 werden wir die eigentlich korrekte, aber viel zu schwerfällige Schreibweise „ $(x, y) \in \prec$ “ durch „ $x \prec y$ “ ersetzen; für $x \prec y$ werden wir hier „ x vor y “ sagen.

geordneter
Raum

M , versehen mit \prec , soll ein *geordneter Raum* heißen, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- Für jedes $x \in M$ gilt $x \prec x$; das nennt man die *Reflexivität* von \prec .
- Für beliebige x, y darf man aus der Gültigkeit von $x \prec y$ und $y \prec x$ auf $x = y$ schließen: Man sagt dann, dass \prec *antisymmetrisch* ist.
- Aus $x \prec y$ und $y \prec z$ soll man jedesmal auf $x \prec z$ schließen dürfen. \prec soll also *transitiv* sein.

In diesem Fall nennen wir \prec auch eine *Ordnungsrelation* auf M .

Bemerkungen und Beispiele:

1. Es ist leider ein bisschen verwirrend, dass „ $<$ “ auf einem angeordneten Körper *keine* Ordnungsrelation ist, denn „ $<$ “ ist nicht reflexiv. Definiert man jedoch – wie in Abschnitt 1.4 ja schon geschehen – eine Relation „ \leq “ durch „ $x \leq y$ genau dann, wenn $x < y$ oder $x = y$ “, so liegt wirklich eine Ordnungsrelation vor. Das ist auch schon das für uns wichtigste Beispiel, und wenn Sie keine Lust haben, Ordnungsrelationen genauer kennen zu lernen, so dürfen Sie im Folgenden „ \prec “ und M stets durch „ \leq “ und \mathbb{R} ersetzen.

2. Es gibt aber weitere interessante Beispiele für Ordnungsrelationen, manche haben nicht einmal etwas mit Zahlen zu tun. Hier einige konkrete Vertreter:

- Es sei N irgendeine Menge und $M := \mathcal{P}(N)$ die Potenzmenge von N . Dann ist „ \subset “ eine Ordnungsrelation auf M .
- Ist M eine beliebige Menge, so ist die Gleichheit eine Ordnungsrelation.
- Sei M die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen. Auf dieser Menge ist „teilbar“ eine Ordnungsrelation. (Für „ n teilt m “ schreibt man übrigens in Kurzfassung $n \mid m$. So gelten zum Beispiel die Aussagen $2 \mid 23224$, $1 \mid 11$ und $333 \mid 333$.)

- Man definiere $\prec := M \times M$, es sollen also *alle* Elemente in Relation zueinander stehen. Ist das eine Ordnungsrelation?

Schranken/Supremum/Infimum

Sie sollten versuchen, die folgenden Begriffe in möglichst vielen verschiedenen Beispierräumen zu verstehen. Für uns werden sie allerdings hauptsächlich im geordneten Raum (\mathbb{R}, \leq) eine Rolle spielen.

Es geht um Elemente eines geordneten Raumes, die in Bezug auf eine Teilmenge besondere Eigenschaften haben.

Definition 2.3.4. Sei (M, \prec) ein geordneter Raum, $x_0 \in M$ und $A \subset M$.

- (i) x_0 heißt obere Schranke von A , wenn $x \prec x_0$ für alle $x \in A$.
- (i)' x_0 heißt untere Schranke von A , wenn $x_0 \prec x$ für alle $x \in A$.
- (ii) x_0 heißt Supremum (oder kleinste obere Schranke) von A , wenn gilt
 - (a) x_0 ist obere Schranke von A .
 - (b) Ist y_0 eine obere Schranke von A , so folgt $x_0 \prec y_0$.
- (ii)' x_0 heißt Infimum (oder größte untere Schranke) von A , wenn gilt
 - (a) x_0 ist untere Schranke von A .
 - (b) Ist y_0 eine untere Schranke von A , so folgt $y_0 \prec x_0$.

**Supremum
Infimum**

Bemerkungen und Beispiele:

1. Die Aussagen (i) und (i)' sowie (ii) und (ii)' sind vollkommen symmetrisch (man ersetze nur „ \prec “ durch „ \succ “). Folglich gehört zu jedem Ergebnis über obere Schranken eins für untere Schranken und umgekehrt. Gleiches gilt für Aussagen über Supremum und Infimum.

Aus diesem Grund werden die Beweise in der Regel nur für obere Schranken bzw. Suprema geführt, die anderen ergeben sich dann durch Symmetrie.

2. In (\mathbb{R}, \leq) kann man sich das so vorstellen:

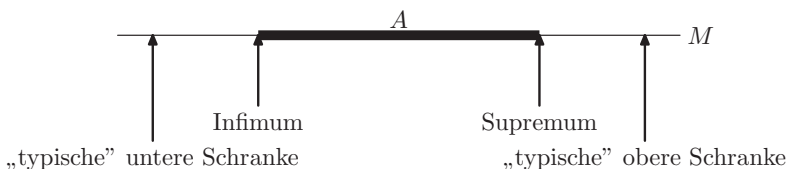


Bild 2.11: Supremum/Infimum

Ein Element x_0 ist also obere Schranke einer Teilmenge A , wenn x_0 „rechts von A “ liegt. Und x_0 ist Supremum von A , wenn x_0 erstens obere Schranke ist und zweitens unter allen oberen Schranken „möglichst weit links“ liegt. Anders ausgedrückt: Um ein Supremum von A zu finden, starte man bei irgendeiner Stelle rechts von A und gehe dann – immer rechts von A bleibend – so weit wie möglich nach links.

3. *Suprema und Infima sind*, falls sie existieren, *eindeutig bestimmt*. Wir beweisen das für Suprema. Seien dazu $x_0, \hat{x}_0 \in M$ vorgelegt, so dass beide Elemente die Bedingungen aus Definition 2.3.4(ii) erfüllen.

Da x_0 obere Schranke ist und \hat{x}_0 (ii)b erfüllt, folgt $\hat{x}_0 \prec x_0$, entsprechend ergibt sich (man vertausche die Rollen von x_0 und \hat{x}_0) auch $x_0 \prec \hat{x}_0$, insgesamt also $x_0 = \hat{x}_0$.

sup, inf

Deswegen ist die Sprechweise „das Supremum von A “ gerechtfertigt, wenn A überhaupt ein Supremum besitzt. Das wird dann mit $\sup A$ bezeichnet. Für das Infimum von A schreibt man $\inf A$.

4. Es folgen zur Illustration einige *Beispiele*:

a) Die Menge \mathbb{N} werde mit der Ordnung

$$n \prec m \iff n \mid m$$

versehen. Es sei $A := \{12, 18\}$. Obere Schranken sind dann alle durch 36 teilbaren Zahlen, als untere Schranken erhalten wir 1, 2, 3, 6.

36 ist Supremum von A und 6 ist Infimum.

Allgemein: Suprema in dieser Ordnung sind gerade die kleinsten gemeinsamen Vielfachen, Infima entsprechend die größten gemeinsamen Teiler:

$$\begin{aligned} \sup\{m, n\} &= \text{kgV}(m, n) \text{ (kleinstes gemeinsames Vielfaches)} \\ \inf\{m, n\} &= \text{ggT}(m, n) \text{ (größter gemeinsamer Teiler)} \end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$.

?

b) Sei N eine Menge. Wir betrachten $(\mathcal{P}(N), \subset)$ und $\mathcal{A} := \{B, C\}$, wobei B und C aus $\mathcal{P}(N)$ sind. Dann ist $B \cap C$ (bzw. $B \cup C$) Infimum (bzw. Supremum) von \mathcal{A} . Können Sie das begründen?

c) Sei A in (\mathbb{R}, \leq) die Teilmenge $A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, es sollen Supremum und Infimum bestimmt werden. Das ist komplizierter, als man denken sollte:

1. *Schritt*: Ausgehend von einer Skizze von A kommen wir zu einer Vermutung, d.h. wir gewinnen natürliche Kandidaten für $\sup A$ und $\inf A$. Im vorliegenden Fall sind $\sup A = 1$ und $\inf A = 0$ aussichtsreiche Kandidaten für einen Beweisversuch.

2. *Schritt*: Wir müssen nun nachweisen, dass unsere Kandidaten die in sie gesetzten Hoffnungen erfüllen. Entsprechend der Definition erfordert das jeweils *zwei* Beweise:

(i) Beweis von „ $\sup A = 1$ “.

Es ist zu zeigen, dass *erstens* $1/n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und *zweitens* aus „ $y_0 \geq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ “ stets $y_0 \geq 1$ folgt. Beides ist einfach: Die erste Aussage gilt, weil alle $n \geq 1$ sind, und zum Beweis der zweiten brauchen wir nur speziell $n = 1$ in die Voraussetzung einzusetzen.

(ii) Beweis von „ $\inf A = 0$ “.

Hier müssen wir nachprüfen, ob $1/n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist und ob aus „ $1/n \geq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ “ geschlossen werden kann, dass $y_0 \leq 0$. Der erste Teil ist klar, und der zweite folgt mit einem indirekten Beweis unter Ausnutzung des Archimedesaxioms: Wäre $y_0 > 0$, so gäbe es wegen Satz 1.7.3(i) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < y_0$; Widerspruch.

5. Es ist an dieser Stelle günstig, noch einmal auf die leere Menge zu sprechen zu kommen:

Die Probleme mit der leeren Menge \emptyset

Vielen machen Aussagen Schwierigkeiten, die die leere Menge betreffen. Betrachten wir zum Beispiel, für eine Teilmenge M von \mathbb{R} , die Aussage „Für jedes x aus M ist $x^2 - x$ irrational.“

Für konkrete Mengen M kann das richtig oder falsch sein, wie sieht es für den Fall der leeren Menge aus? Um zu einer Entscheidung zu kommen, empfiehlt es sich, die vorstehende Aussage sehr ausführlich wie folgt zu lesen:

Jedesmal, wenn mir irgendjemand ein x aus M vorlegt, kann ich nachweisen, dass $x^2 - x$ irrational ist.

Und für die leere Menge stimmt das! Einfach deswegen, weil garantiert niemand kommt und mir ein Element vorlegt.

Allgemeiner kann man sich – bei gleicher Begründung – merken:

„Für-alle“-Aussagen, die die leere Menge betreffen, sind immer richtig.

Geht es dagegen um Aussagen, die als Erstes den Existenzquantor „ \exists “ enthalten, sieht es für die leere Menge schlecht aus, da sie überhaupt keine Elemente enthält:

Alle Aussagen, die mit „Es gibt ein Element in M mit ...“ anfangen, sind für die leere Menge falsch.

Nutzanwendung hier: Jedes $x_0 \in M$ ist obere Schranke und untere Schranke von \emptyset . Damit wird es $\sup \emptyset$ (bzw. $\inf \emptyset$) also nur geben, wenn M ein kleinstes (bzw. größtes) Element besitzt.

So gilt etwa:

- In $(\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \leq)$ gilt $\sup \emptyset = 0$ und $\inf \emptyset = 1$ ¹⁷⁾.
- In (\mathbb{N}, \leq) ist $\sup \emptyset = 1$, aber $\inf \emptyset$ existiert nicht.

6. Im Allgemeinen haben auch nicht leere Mengen weder Schranken noch Suprema oder Infima. Zum Beispiel gilt in (\mathbb{R}, \leq) :

?

- $\inf \mathbb{N} = 1$, aber \mathbb{N} hat keine obere Schranke (warum?) und folglich erst recht kein Supremum.
- \mathbb{Z} hat weder obere noch untere Schranken.

Aus der Existenz von oberen Schranken folgt in beliebigen geordneten Räumen noch nicht, dass ein Supremum existieren muss. Wir betrachten dazu die Menge $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ in (\mathbb{Q}, \leq) . Die Menge A ist sicher nach oben beschränkt, z.B. durch $x_0 = 5$. Zu jeder oberen Schranke gibt es aber eine kleinere, eine bestmögliche existiert nicht.

Das liegt natürlich wieder daran, dass $\sqrt{2}$, der heimliche Kandidat für $\sup A$, keine rationale Zahl ist. Um die Nichtexistenz streng zu beweisen, müsste man noch einmal die Überlegungen in Abschnitt 1.8 kopieren, die die Nichtexistenz einer Schnitzzahl für einen geeigneten Dedekindschen Schnitt in \mathbb{Q} lieferten.

(Ende des Exkurses zu Ordnungsrelationen)

In (\mathbb{R}, \leq) haben nach oben unbeschränkte Mengen sicher kein Supremum: Wenn keine obere Schranke existiert, dann erst recht keine bestmögliche. Und unter den nach oben beschränkten Mengen ist die leere Menge sicher eine *ohne* Supremum, denn \mathbb{R} hat kein kleinstes Element. Bemerkenswerterweise sind das schon die einzigen Ausnahmen, beim Beweis wird wieder das Vollständigkeitsaxiom eine wesentliche Rolle spielen:

Satz 2.3.5. *Ist $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die nicht leer und nach oben beschränkt ist, so existiert $\sup D$.*

Beweis: Der Beweis wird wieder mit dem Vollständigkeitsaxiom geführt. Wir definieren (A, B) durch

$$A := \{x \mid x \in \mathbb{R}, \text{ es gibt } y \in D \text{ mit } x < y\},$$

$$B := \{x \mid x \in \mathbb{R}, \text{ für alle } y \in D \text{ ist } y \leq x\}^{18)}.$$

Dann ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt:

- A ist nicht leer, da $y - 1 \in A$ für jedes $y \in D$. Auch B enthält Elemente, denn nach Voraussetzung existieren obere Schranken.

¹⁷⁾Es ist also möglich, dass $\sup A < \inf A$. Das kann allerdings für nicht leere Mengen ausgeschlossen werden.

¹⁸⁾ B ist also die Menge der oberen Schranken von D .

- Seien $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$. Dann gibt es ein $y \in D$ mit $x_1 < y$, und gleichzeitig gilt $y \leq x_2$. Aus der Transitivität der Ordnung folgt $x_1 \leq x_2$.
- Ist x eine beliebige reelle Zahl, so kann die Aussage „ x ist obere Schranke von D “ richtig oder falsch sein. Im ersten Fall gehört x zu B , im zweiten zu A , und beides gleichzeitig kann nicht eintreten.

Sei nun x_0 eine Schnitzzahl für (A, B) , *hier* ist die Vollständigkeit wesentlich. x_0 ist unser Kandidat für $\sup A$. Wir zeigen:

x_0 ist obere Schranke. Um das zu beweisen, betrachten wir ein beliebiges $y \in D$. Mal angenommen, es wäre $x_0 < y$. Dann liegt die Zahl $x := (y + x_0)/2$ in A , denn es gilt $x < y$. Nun ist aber x_0 Schnitzzahl, und das führt zu $x \leq x_0$ und danach zu dem Widerspruch $y \leq x_0$.

x_0 ist beste obere Schranke. Das ist leicht, denn als Schnitzzahl für (A, B) liegt x_0 links von allen oberen Schranken von D . \square

Wir haben gesehen, dass aus der Vollständigkeit gemäß Abschnitt 1.8 die Konvergenz von Cauchy-Folgen und die Existenz von Suprema für nach oben beschränkte, nicht leere Mengen folgt. Umgekehrt gilt das auch: Hätten wir eine dieser Aussagen gefordert, so könnten wir auch Vollständigkeit im Sinn von „Dedekindsche Schnitte haben Schnitzzahlen“ garantieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes, der zusätzlich noch eine Charakterisierung durch Intervallschachtelungen enthält.

Satz 2.3.6. *Sei $(K, +, \cdot, P)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent¹⁹⁾:*

- (i) *$(K, +, \cdot, P)$ ist vollständig im Sinne von Abschnitt 1.8 (d.h., jeder Dedekindsche Schnitt besitzt eine Schnitzzahl).*
- (ii) *Jede Cauchy-Folge in K ist konvergent.*
- (iii) *Ist $A \subset K$ nicht leer und nach oben beschränkt, so besitzt A in K ein Supremum.*
- (iv) *Seien (a_n) und (b_n) Folgen in K mit der Eigenschaft, dass erstens $a_n \leq b_n$ für alle n , zweitens $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, drittens $b_1 \geq b_2 \geq \dots$ und viertens $b_n - a_n \rightarrow 0$ gilt. Die a_n, b_n laufen also – von links bzw. rechts kommend – aufeinander zu.
(Man spricht dann auch von einer Intervallschachtelung²⁰⁾.)
Dann gibt es ein x_0 in K , so dass $a_n \leq x_0 \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

**Intervall-
schachtelung**

¹⁹⁾Das heißt: Aus jeder der Aussagen folgen die anderen.

²⁰⁾Der Name rührt daher, dass man mit $[a, b]$, dem Intervall von a bis b , die Menge der Zahlen x mit $a \leq x \leq b$ bezeichnet. Und dann bilden die $[a_n, b_n]$ eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen, deren Länge gegen Null geht.

Bemerkungen:

1. Stillschweigend haben wir die Begriffe „Cauchy-Folge“ und „konvergent“ wie in \mathbb{R} erklärt. Das ist möglich, da der Betrag rein ordnungstheoretisch definiert war.

2. Wegen dieses Satzes kann sich jeder Lehrbuchautor aussuchen, wie er „Vollständigkeit“ von \mathbb{R} erklären will. Jede der äquivalenten Aussagen kann als Axiom gefordert werden, die drei anderen sind dann Sätze der Analysis. In diesem Buch wurde mit Dedekindschen Schnitten gearbeitet, denn dafür musste man noch nichts von Konvergenz oder von Suprema wissen.

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz mit einem so genannten *Ringschluss*, d.h. wir zeigen

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).$$

(i) \Rightarrow (ii): Das wurde in 2.3.3 bewiesen.

(ii) \Rightarrow (iii): Der Lernwert dieses eher technischen Beweises ist gering, deshalb begnügen wir uns mit dem Vorstellen der *Beweisidee*. Was ist zu tun? Wir müssen mit einer Teilmenge $A \subset K$ anfangen, die nicht leer und nach oben beschränkt ist. Dann müssen wir eine Cauchy-Folge so geschickt definieren, dass der nach Voraussetzung existierende Grenzwert Kandidat für $\sup A$ ist. Sei also $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt:

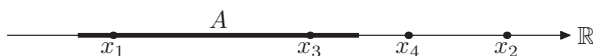


Bild 2.12: Die Menge A und die ersten Folgenglieder

Wir konstruieren (x_1, x_2, \dots) induktiv:

x_1 : irgendein Element von A (das existiert nach Voraussetzung);

x_2 : irgendeine obere Schranke von A (auch die gibt es nach Voraussetzung);

x_3 : $x_3 := (x_1 + x_2)/2$;

x_4 : gibt es ein $x \in A$ mit $x > x_3$ (ist also x_3 *nicht* obere Schranke), so soll $x_4 := (x_2 + x_3)/2$ sein, andernfalls setzen wir $x_4 := (x_1 + x_3)/2$;

\vdots

x_{n+1} : x_1, \dots, x_n seien schon konstruiert, wobei $n \geq 3$. Falls x_n obere Schranke von A ist, setzen wir $x_{n+1} := x_n - 2^{-(n-1)}(x_2 - x_1)$, andernfalls definieren wir $x_{n+1} := x_n + 2^{-(n-1)}(x_2 - x_1)$.

Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, und es gilt $\lim x_n = \sup A$.

(iii) \Rightarrow (iv): Wir setzen voraus, dass beschränkte, nicht leere Teilmengen von \mathbb{R} ein Supremum haben, und wir müssen zu einer vorgelegten Intervallschachtelung $(a_n), (b_n)$ ein x_0 angeben, das zwischen den a und b liegt.

Das geht so: Wir definieren D als die Menge

$$D := \{x \mid \text{es gibt ein } n \text{ mit } a_n \geq x\}.$$

Dann ist D nicht leer (alle a_n gehören zu D) und nach oben beschränkt (jedes b_n ist eine obere Schranke). Folglich existiert das Supremum von D , das wir x_0 nennen wollen. Aufgrund der Supremumseigenschaften und der eben zusammengestellten Beobachtungen muss $a_n \leq x_0 \leq b_n$ für alle n gelten.

(iv) \Rightarrow (i): Diesmal wissen wir, dass es für Intervallschachtelungen „etwas genau dazwischen“ gibt, und daraus soll die Existenz von Schnitzzahlen folgen.

Wir starten also mit einem Dedekindschen Schnitt (A, B) . Zunächst wählen wir irgendein Element $a \in A$ und irgendein $b \in B$ und taufen: $a_1 := a$, $b_1 := b$; da wir es mit einem Dedekindschen Schnitt zu tun haben, gilt $a_1 \leq b_1$. Dann betrachten wir $x_1 := (a_1 + b_1)/2$. Diese Zahl wird zu A oder zu B gehören, im ersten Fall geht es weiter mit

$$a_2 := x_1, \quad b_2 := b_1,$$

im zweiten mit

$$a_2 := a_1, \quad b_2 := x_1.$$

Als Nächstes untersuchen wir die Zahl $x_2 := (a_2 + b_2)/2$. Gehört sie zu A , so wird

$$a_3 := x_2, \quad b_3 := b_2,$$

andernfalls setzen wir

$$a_3 := a_2, \quad b_3 := x_2.$$

So setzen wir die Konstruktion fort, nach Definition entsteht eine Intervallschachtelung. Wir bemerken, dass die a_n zu A und die b_n zu B gehören und dass sich der Abstand von a_n zu b_n von Schritt zu Schritt halbiert, es gilt (mit $M := b_1 - a_1$) die Identität $b_n - a_n = M/2^{n-1}$.

Man wähle nun – nach Voraussetzung – ein x_0 mit $a_n \leq x_0 \leq b_n$ für alle n , dieses x_0 ist unser Kandidat für eine Schnitzzahl.

Warum ist denn $a \leq x_0$ für jedes $a \in A$? Dazu bemerken wir zunächst, dass $a \leq b_n$ für alle n gilt, denn die b_n gehören ja zu B . Außerdem ist $a_n \leq x_0 \leq b_n$ und folglich

$$b_n = x_0 + (b_n - x_0) \leq x_0 + (b_n - a_n) \leq x_0 + M/2^{n-1}.$$

So folgt $a \leq x_0 + M/2^{n-1}$, und da $M/2^{n-1} \rightarrow 0$, muss $a \leq x_0$ gelten²¹⁾.

Ganz genauso lässt sich zeigen, dass $x_0 \leq b$ für alle $b \in B$ gilt. \square

²¹⁾Vgl. Beweisprinzip 5 im Kasten auf Seite 115.

Die im vorstehenden Satz behandelten Umformulierungen des Vollständigkeitsaxioms werden eine wichtige Rolle spielen. Es folgt noch ein Beispiel zur Anwendung von Supremumstechniken, die oft sehr elegante Beweise ermöglichen. Urteilen Sie selbst:

Satz 2.3.7. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} , so dass gilt:

- (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend, d.h., $a_1 \leq a_2 \leq \dots$.
- (ii) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt: Es gibt ein M mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Analog gilt: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende, durch ein $M \in \mathbb{R}$ nach oben beschränkte Folge:

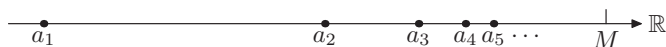


Bild 2.13: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit oberer Schranke M

Dann ist $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht leer und durch M nach oben beschränkt. Folglich existiert $x_0 := \sup A$, und es bleibt $a_n \rightarrow x_0$ zu zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $x_0 - \varepsilon$ echt kleiner als x_0 ist, kann $x_0 - \varepsilon$ keine obere Schranke von A sein (denn x_0 ist ja die kleinste obere Schranke). Es existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > x_0 - \varepsilon$.

Aufgrund der Monotonie ist dann $a_n \geq a_{n_0} > x_0 - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, was zusammen mit der Voraussetzung „ x_0 ist obere Schranke von A “ die Ungleichung

$$x_0 - \varepsilon < a_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon \quad (\text{alle } n \geq n_0)$$

ergibt. Folglich ist $|a_n - x_0| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und damit ist alles gezeigt. \square

2.4 Unendliche Reihen

Es kommt häufig vor, dass Konvergenzbetrachtungen für Folgen der Form

$$(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$$

anzustellen sind. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Spezialfall näher untersuchen.

Definition 2.4.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} , wie bisher bedeutet das Zeichen \mathbb{K} den Körper der reellen oder der komplexen Zahlen. Für $N \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter der N -ten Partialsumme die Zahl

$$s_N := a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Falls der Limes der Folge $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ existiert, sagen wir, dass die zu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Reihe konvergent ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N.$$

Die Zahl $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wird die Reihensumme der zu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörigen Reihe genannt.

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

Reihen, die nicht konvergent sind, heißen divergent.

Bemerkungen und Beispiele:

1. Für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ schreibt man auch $a_1 + a_2 + \dots$ oder, wenn der Laufbereich der Indizes klar ist, $\sum a_n$.

Es sollte Ihnen keine Schwierigkeiten machen, die Definition auf Reihen des Typs $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oder $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ zu übertragen.

2. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *abbrechende* Folge, d.h. gibt es ein \hat{n} mit $a_n = 0$ für $n > \hat{n}$, so ist die Folge der Partialsummen vom Index \hat{n} an konstant und folglich konvergent gegen $a_1 + \dots + a_{\hat{n}}$. Kurz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\hat{n}} a_n,$$

und in diesem Sinne sind endliche Summen ein Spezialfall konvergenter Reihen.

3. Die vorstehende Reihe war nicht besonders bemerkenswert. Wie im Fall konvergenter Folgen gibt es auch in der Reihenrechnung einen ausgezeichneten Kandidaten, der unser erstes interessanteres Beispiel darstellt.

Wir behaupten: Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ ist die Reihe $1 + q + q^2 + \dots$ konvergent mit

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Der Vollständigkeit halber ist anzumerken, dass q^n für $n = 0$ noch nicht definiert ist. Wir setzen $q^0 := 1$ für alle $q \in \mathbb{K}$, insbesondere ist auch $0^0 := 1$.

Beweis dazu: Als leichte Übung in vollständiger Induktion erhält man

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Da wir schon wissen, dass $q^n \rightarrow 0$ für $|q| < 1$ (vgl. Seite 120), ergibt sich unter Verwendung der in Satz 2.2.12 bewiesenen Resultate:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

geometrische Reihe

Diese Reihe – sie wird die *geometrische Reihe* genannt – wird für die Reihenrechnung die gleiche fundamentale Rolle spielen wie $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Theorie der konvergenten Folgen.

4. Wir wollen hier das paradoxe Ergebnis $1 = 0$ mit Hilfe der Reihenrechnung „beweisen“.

Sei zunächst $\sum a_n$ eine konvergente Reihe. Wir verteilen in $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ auf beliebige Weise Klammern, etwa als

$$(a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) + \cdots,$$

wir gehen also zu $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ über, wobei die b Summen über endliche Abschnitte der a_n sind und die Reihenfolge nicht verändert wurde. Da die Partialsummenfolge der (b_n) eine Teilfolge der zu (a_n) gehörigen Partialsummenfolge ist, kann man sofort die Existenz von $\sum b_n$ garantieren, auch gilt $\sum a_n = \sum b_n$.

Doch Achtung: Falls man mit nicht konvergenten Reihen das Gleiche nachmachen möchte, kann Unsinn herauskommen. Ein berühmtes Beispiel ist die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$. Klammert man sie als $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$, so ist das Ergebnis 0, da ja nur Nullen addiert werden. Rechnet man aber $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$, so ist der Wert offensichtlich 1, da ja auf die 1 nur noch Nullen folgen.

Keiner braucht sich aber Sorgen zu machen, wir haben *nicht* $1 = 0$ bewiesen, denn die obigen Umformungen dürfen nur bei konvergenten Reihen vorgenommen werden.

5. Anschaulich ist klar, dass die a_n „klein“ werden müssen, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existieren soll, und wirklich werden wir gleich in Satz 2.4.2 beweisen, dass für konvergente Reihen notwendig $a_n \rightarrow 0$ gelten muss. Das liefert unmittelbar Beispiele für *nicht* konvergente Reihen: Wenn (a_n) keine Nullfolge ist, kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht existieren. (Machen Sie sich das auch direkt, d.h. ohne Verwendung von Satz 2.4.2, an einigen Beispielen klar, etwa an $(1, -1, 1, -1, \dots)$: Warum existiert die zugehörige Reihensumme nicht?)

Die Umkehrung gilt *nicht*: Aus $a_n \rightarrow 0$ folgt *nicht*, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert. Das sieht man leicht am Beispiel

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

?

Die Partialsummen sind offensichtlich unbeschränkt, können also wegen Lemma 2.2.11 keine konvergente Folge bilden.

Die harmonische Reihe

Etwas genauer muss man schon hinsehen, um sich klarzumachen, dass die Reihe $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ (die so genannte *harmonische Reihe*) nicht konvergiert. Auch hier sind die Partialsummen nicht beschränkt, was durch geschicktes Abschätzen offensichtlich wird:

harmonische
Reihe

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 1 \geq \frac{1}{2} \\
 s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{2}{2} \\
 s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \\
 s_8 &= 1 + \dots + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{2} \\
 &\vdots \\
 s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{2^{\nu-1}} \frac{1}{2^\nu} = \frac{n+1}{2} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

6. Ändert man in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich viele Glieder ab, so wird dadurch das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht geändert, denn von einer Stelle ab stimmen die neuen Partialsummen bis auf eine additive Konstante mit den alten überein. Die Reihensumme kann sich natürlich ändern.

Aufgrund der Reihendefinition können wir sofort alle diejenigen Ergebnisse aus der Theorie der konvergenten Folgen übertragen, bei denen der Übergang von der Folge zu den Partialsummen keine Schwierigkeiten macht. Ein Negativbeispiel: Sie können die Partialsummen von $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht einfach durch die Partialsummen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ausdrücken, und deswegen werden Sie hier auch keinen Satz über $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ finden.

Satz 2.4.2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen in \mathbb{K} .

- (i) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existieren, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Schreibt man das als $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots = (a_1 + a_2 + \dots) + (b_1 + b_2 + \dots)$, so wird klar, dass es sich um den Spezialfall eines Kommutativgesetzes für unendliche Reihen handelt.

- (ii) Es gilt das Distributivgesetz: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert, so auch $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ für jedes $c \in \mathbb{K}$. Und dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Cauchy-Kriterium

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist (das so genannte Cauchy-Kriterium):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \substack{n, m \in \mathbb{N} \\ m > n \geq n_0} \quad \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Vergleichs-Kriterium

- (iv) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ existiert und $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, so existiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
 Insbesondere impliziert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diejenige von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
 In diesem Fall gilt auch $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- (v) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert, so ist $a_n \rightarrow 0$. Außerdem gilt dann: Für alle n existiert $b_n := a_n + a_{n+1} + \dots$, und $b_n \rightarrow 0$.

Beweis: (i) Wir beginnen mit der Gleichung

$$(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n),$$

die Puristen durch vollständige Induktion beweisen müssen. Selbst bei geringer Erfahrung sieht man aber, dass das sofort aus der Kommutativität und der Assoziativität der Addition folgt. Damit ist die behauptete Aussage ein Spezialfall von Satz 2.2.12(ii), in dem gezeigt wurde, dass der Limes einer Summe gleich der Summe der Limese ist.

(ii) Das folgt aus

$$(ca_1 + \dots + ca_n) = c(a_1 + \dots + a_n)$$

und Satz 2.2.12(iii).

(iii) Die Existenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedeutet doch nach Definition, dass die Folge (s_n) der Partialsummen konvergent ist, und das ist genau dann der Fall, wenn (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Wenn man noch für die Aussage „ (s_n) ist Cauchy-Folge“ die Definition einsetzt, ergibt sich die Aussage (iii).

(iv) Wir beginnen mit einer Vorbereitung, dazu erinnern wir zunächst an die Dreiecksungleichung: Es ist $|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. Durch vollständige Induktion ergibt sich daraus eine *verallgemeinerte Dreiecksungleichung* für n Summanden:

$$|c_1 + \dots + c_n| \leq |c_1| + \dots + |c_n|.$$

Hier zeigen wir nur den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} |c_1 + \dots + c_n + c_{n+1}| &\leq |c_1 + \dots + c_n| + |c_{n+1}| \\ &\leq |c_1| + \dots + |c_n| + |c_{n+1}|. \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Induktionsannahme verwendet.

Nun zum Beweis von (iv), wir nehmen an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ existiert. Wir wollen zeigen, dass für die Reihe der $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium (iii) erfüllt ist.

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung und (iii) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $m > n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\sum_{k=n+1}^m |b_k| \leq \varepsilon$$

erfüllt ist. Dann aber gilt für $m > n \geq n_0$ nach unserer Vorbereitung:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m |b_k| \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

Das Cauchy-Kriterium ist also erfüllt, und damit ist der erste Teil von (iv) bewiesen.

Für den zweiten Teil der Aussage ist es bequem, zuerst ein allgemeines Ergebnis für Folgen zu beweisen:

Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine konvergente Folge in \mathbb{K} und gilt $|c_n| \leq M$ für ein $M \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $|\lim c_n| \leq M$.

Beweis dazu: Sei $c := \lim c_n$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist dann, sobald nur n genügend groß ist, $|c_n - c| \leq \varepsilon$ und folglich

$$|c| \leq |c - c_n| + |c_n| \leq M + \varepsilon.$$

Daraus folgt sofort $|c| \leq M$ (vgl. den Kasten auf Seite 115).

Man setze nun $M := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Da die Folge der Partialsummen zu dieser Reihe monoton steigt und M nach Satz 2.3.7 das Supremum ist, folgt

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq M,$$

also gilt nach unserer Vorbereitung auch $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(v) Der erste Teil folgt aus (iii) für den Spezialfall $m = n + 1$. Für den zweiten Teil beachte man zunächst, dass sich – für festes n – die Partialsummen der (b_n) -Reihe nur bis auf eine Konstante von den Partialsummen der (a_n) -Reihe unterscheiden und deswegen Konvergenz vorliegt.

Weiter gilt: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und s_n die n -te Partialsumme der (a_n) -Reihe, so gilt $s_{n-1} + b_n = a$ nach Definition. Aus $s_n \rightarrow a$ folgt dann $b_n \rightarrow 0$. \square

Da wir bisher als einziges Beispiel für konvergente Reihen (außer den abbrechenden) die geometrische Reihe zur Verfügung haben, können wir den vorstehenden

Permanenzsatz auch nur darauf anwenden. Aus (i) und (ii) etwa folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[4 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n + 1.6 \cdot \left(-\frac{1}{16} \right)^n \right] = \frac{4}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{1.6}{1 + \frac{1}{16}}$$

gilt.

Wesentlich interessanter ist es, Folgerungen aus (iv) im Falle $(b_n) = (q^n)$ zu ziehen. Die allermeisten Reihen werden auf *diese* Weise als konvergent erkannt, so dass der größte Teil der Reihenrechnung aus lediglich drei Bausteinen aufgebaut ist, nämlich

- dem Cauchy-Kriterium;
- der Tatsache, dass $\sum q^n$ für $|q| < 1$ konvergent ist;
- der Ungleichung (2.7) im vorstehenden Beweis von (iv), d.h. aus $|a_k| \leq |b_k|$ folgt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m |b_k|.$$

Diese Ungleichung ist auch *in anderer Hinsicht entscheidend*: An dieser Stelle vergibt man die Chance, mit einem plausiblen Kandidaten für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz direkt nachweisen zu können. Nach (2.7) kann *nur noch Konvergenz schlechthin* bewiesen werden, ein konkreter Wert für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ muss – wenn das überhaupt möglich ist – auf andere Weise gewonnen werden.

Der nächste Satz enthält die *wichtigsten Konvergenzkriterien*. Wie angekündigt, wird das hauptsächlich auf eine Anwendung von Satz 2.4.2(iv) für die Folge $(b_n) = (q^n)$ hinauslaufen.

Satz 2.4.3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in \mathbb{K} . Jede der folgenden Bedingungen garantiert, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existiert:

- (i) Wurzelkriterium²²⁾: Es gibt ein $\hat{n} \in \mathbb{N}$ sowie ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, so dass für alle $n \geq \hat{n}$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

- (ii) Quotientenkriterium: Es gibt ein $\hat{n} \in \mathbb{N}$ und ein $0 \leq q < 1$, so dass für $n \geq \hat{n}$ gilt:

$$a_n \neq 0 \text{ und } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

- (iii) Kriterium für alternierende Reihen, oder auch LEIBNIZ²³⁾-Kriterium:

Alle a_n sind reell, es gilt $a_n \rightarrow 0$ sowie $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ für alle n , und

²²⁾Zur Erinnerung: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige Zahl $b \geq 0$, für die $b^n = a$ gilt. Der Existenznachweis wird erst in Korollar 3.3.7 nachgeliefert werden, er wird unabhängig vom Wurzelkriterium sein.

²³⁾Leibniz war einer der letzten Universalgelehrten, gegen Ende des 17. Jahrhunderts schuf er – unabhängig von Newton – die Grundlagen der Analysis. Auf ihn gehen einige der noch heute verwendeten Symbole zurück, z.B. das Integralzeichen. Leibniz starb verarmt und verbittert.

Konvergenzkriterien



GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ
1646 – 1716

die Vorzeichen der a_n sind abwechselnd positiv und negativ. Es ist also entweder $a_1 \geq 0, a_2 \leq 0, a_3 \geq 0, \dots$ oder umgekehrt.

Beweis: (i) Da uns nur Konvergenz schlechthin interessiert, darf der Einfachheit halber $\hat{n} = 1$ angenommen werden.

Zum Beweis ist dann nur zu bemerken, dass 2.4.2(iv) mit $b_n = q^n$ erfüllt ist, denn aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n$ durch Ausnutzen der bekannten Rechenregeln für Ungleichungen, und wegen $|q| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent.

(ii) Wieder darf der Einfachheit halber $\hat{n} = 1$ angenommen werden. Durch Umformung der Ungleichungen

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq q, \quad \left| \frac{a_3}{a_2} \right| \leq q, \dots$$

folgt $|a_2| \leq q|a_1|, |a_3| \leq q|a_2| \leq q^2|a_1|, \dots$. Allgemein ergibt sich durch vollständige Induktion schließlich

$$|a_n| \leq q^{n-1}|a_1|.$$

Nun ist nur noch 2.4.2(iv) mit $b_n = q^{n-1}|a_1|$ anzuwenden.

(iii) Wir betrachten eine für das Nachprüfen des Cauchy-Kriteriums typische Summe:

$$\sum_{k=n+1}^m a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m.$$

Ist etwa $a_{n+1} \geq 0$, so folgt aus $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ (alle $k \in \mathbb{N}$) und $a_{n+2} \leq 0, a_{n+3} \geq 0, \dots$, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_{n+1} \\ 0 &\leq a_{n+1} + a_{n+2} \leq a_{n+1} \\ 0 &\leq a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \leq a_{n+1} \\ &\vdots \\ 0 &\leq a_{n+1} + \dots + a_m \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

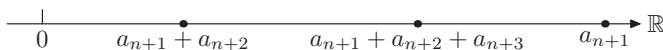


Bild 2.14: Einige Glieder der Partialsummenfolge

Analog erhält man im Fall $a_{n+1} \leq 0$:

$$a_{n+1} \leq a_{n+1} + \dots + a_m \leq 0.$$

Stets gilt also:

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Nach dieser Vorbereitung ist das Cauchy-Kriterium 2.4.2(iii) leicht nachprüfbar: Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wähle man $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$, das ist möglich wegen $a_n \rightarrow 0$. Ist dann $m > n \geq n_0$, so gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq |a_{n+1}| \leq \varepsilon,$$

und das zeigt die Existenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Bemerkungen/Beispiele:

1. Es ist wichtig zu bemerken, dass q in (i) und (ii) wirklich kleiner als 1 und von n unabhängig sein muss. Eine Abschwächung der Voraussetzung zu

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ bzw. } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ist *nicht* möglich (was man in beiden Fällen am Beispiel der harmonischen Reihe $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ sehen kann).

2. In den folgenden Beispielen ist die Konvergenz der Reihe eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.4.3. In keinem Fall jedoch gibt es einen aussichtsreichen Kandidaten für die Reihensumme:

- Für $c \in \mathbb{K}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} = 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{6} + \cdots$$

nach dem Quotientenkriterium.

(Begründung: Im vorliegenden Fall ist $|a_{n+1}/a_n| = |c/(n+1)|$. Es reicht also, n_0 so zu wählen, dass $q := |c/(n_0+1)| < 1$, für $n \geq n_0$ ist dann $|a_{n+1}/a_n| \leq q$.)

- Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

konvergiert nach dem Wurzelkriterium.

(Begründung: Es ist $\sqrt[n]{a_n} = 1/n$. Ab $n_0 = 2$ gilt also $\sqrt[n]{a_n} \leq q := 1/2 < 1$.)

- Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

ist aufgrund des Leibniz-Kriteriums konvergent.

(Beachten Sie, dass wir in keinem dieser Fälle einen Kandidaten für die Reihensumme anbieten können.)

Anhand der zuletzt betrachteten Reihe soll *ein merkwürdiges Phänomen* demonstriert werden, dass sich nämlich das *Konvergenzverhalten bei Änderung der Summationsreihenfolge ändern kann*. Anders ausgedrückt: Es gibt kein Kommutativgesetz für konvergente Reihen²⁴⁾!

Dazu sortieren wir zunächst die Summanden der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ nach dem Vorzeichen, wir erhalten:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \dots$$

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \dots$$

Da die Partialsummen der in der ersten Zeile stehenden Reihe unbeschränkt sind (das zeigt man wie im Fall der harmonischen Reihe $1 + 1/2 + \dots$), können wir sie so in Abschnitte A_1, A_2, A_3, \dots unterteilen, dass die Summe über jeden Abschnitt größer oder gleich 1 ist:

$$\underbrace{1}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots}_{A_3} \dots$$

Die Umordnung der Ausgangsfolge soll nun so definiert werden: Zuerst nehmen wir den Block A_1 – er besteht nur aus der 1 – aus der positiven Abteilung, dann wird als nächster Summand die $-1/2$ berücksichtigt. Weiter geht es mit den Summanden aus dem Block A_2 , an die schließt sich die $-1/4$ an. Und so weiter, wir summieren also die Summanden der ursprünglichen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm \dots$ in der Reihenfolge

$$A_1 - \frac{1}{2} + A_2 - \frac{1}{4} + A_3 - \frac{1}{6} + \dots$$

auf. Die Partialsummen s_N der neuen Reihe sind dann nicht beschränkt, denn nach dem k -ten A -Block gilt $s_N \geq k/2$. Damit liegt bei Aufsummation in *dieser* Reihenfolge Reihenkonvergenz nicht vor.

Es ist sogar noch unglaublicher: Sie können sich eine Zahl wünschen, die dann als Reihensumme einer geeigneten Umordnung auftreten soll!

Mal angenommen, Sie wünschen sich die Zahl 111.2. Eine geeignete Umordnung erhält man so:

- Man beginne mit den positiven Summanden. Es sollen so viele – aber auch nicht mehr als nötig – genommen werden, dass ihre Summe größer als 111.2 ist. (Das geht, da ja die Partialsummen der positiven Terme unbeschränkt wachsen.)
- Nun werden von den negativen Summanden so viele verwendet, dass die insgesamt resultierende Partialsumme kleiner als 111.2 ist. Das ist möglich, denn auch die Partialsummen zu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ werden beliebig groß.

²⁴⁾ Man beachte jedoch den Spezialfall aus Satz 2.4.2(i). Dass unter gewissen Voraussetzungen ein allgemeines Kommutativgesetz doch gilt, wird in Satz 2.4.5 bewiesen werden.

- Nun wieder aus dem positiven Reservoir: so viele, bis erstmals 111.2 überschritten wird.
- Und so weiter.

Auf diese Weise werden wirklich alle Folgenglieder verwendet, es liegt also eine Umordnung vor. Und da wir jedesmal nur so viele Summanden wählen, dass 111.2 gerade über- oder unterschritten wird, ist der Abstand der Partialsummen zu dieser Zahl höchstens so groß wie der Betrag des zuletzt beim „Umschalten“ verwendeten Folgengliedes, bildet also eine Nullfolge. Und das heißt nach Definition, dass die Reihensumme bei dieser Umordnung gleich 111.2 ist.

?

Eine Beweisanalyse dieser Idee zeigt, dass wir das gleiche Phänomen bei allen konvergenten Reihen antreffen werden, bei denen die Partialsummen der positiven Folgenglieder und ebenso die Partialsummen der negativen Folgenglieder unbeschränkt sind. Das ist für reelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer dann der Fall, wenn $|a_1| + |a_2| + \dots$ nicht konvergent ist (Beweis?). Umgekehrt: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so können (wie wir gleich sehen werden) die Umordnungs-Pathologien des vorstehend diskutierten Beispiels nicht auftreten.

absolut
konvergent

Definition 2.4.4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in \mathbb{K} . Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

(Man beachte, dass wegen Satz 2.4.2(iv) absolut konvergente Reihen konvergent sind²⁵).)

Es ist klar, dass alle Reihen, deren Konvergenz mit Satz 2.4.2(iv) bewiesen wurde, absolut konvergent sind. Insbesondere gilt das immer dann, wenn Konvergenz mit dem Wurzel- oder Quotientenkriterium gezeigt wurde. Es ist ebenfalls offensichtlich, dass Summen und Vielfache absolut konvergenter Reihen wieder absolut konvergent sind (das folgt sofort aus Satz 2.4.2(i), (ii)).

Wir beweisen nun, dass sich absolut konvergente Reihen bei Umordnungen so verhalten, wie wir das vom Fall endlicher Summen gewohnt sind:

Satz 2.4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent und $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (vgl. Definition 2.1.3). Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Beweis: (Dieser Beweis ist ziemlich technisch, er kann beim ersten Lesen übersprungen werden.)

Sei $M := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Für jedes beliebige $n_0 \in \mathbb{N}$ können wir $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n_0)\} \subset \{1, \dots, n_1\}$ wählen, denn $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n_0)\}$ ist eine endliche

²⁵Die Umkehrung gilt *nicht*: Die Reihe $1 - 1/2 + 1/3 - + \dots$ ist nach dem Leibnizkriterium konvergent, die zugehörige Reihe der Absolutbeträge aber ist die divergente harmonische Reihe.

Menge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{n_0} |a_{\varphi(n)}| \leq \sum_{n=1}^{n_1} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = M,$$

d.h., die Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi(n)}|$ sind beschränkt. Das aber impliziert nach Satz 2.3.7(i), dass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi(n)}|$ konvergiert, also existiert – wegen Satz 2.4.2(iv) – auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.

Es bleibt zu beweisen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, wir werden zur Abkürzung $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $s_{\varphi} := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ setzen. Wir zeigen dazu, dass $|s - s_{\varphi}| \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist (dann ist nämlich $|s - s_{\varphi}| = 0$, also $s = s_{\varphi}$).

Der Beweis besteht aus einem *typischen* $\varepsilon/3$ -Argument. Darunter verstehen Mathematiker das Verfahren, die ε -Nachbarschaft zweier Zahlen a und b dadurch zu zeigen, dass man für geeignete Zahlen c und d beweist, dass

$$|a - c| \leq \varepsilon/3, \quad |c - d| \leq \varepsilon/3, \quad |d - b| \leq \varepsilon/3.$$

Dass das wirklich reicht, folgt aus der Dreiecksungleichung²⁶⁾:

$$|a - b| = |(a - c) + (c - d) + (d - b)| \leq |a - c| + |c - d| + |d - b|.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| s - \sum_{n=1}^{n_0} a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{alle } m > n \geq n_0).$$

So ein n_0 kann gefunden werden, indem man das Cauchy-Kriterium mit der Definition der Reihenkonvergenz kombiniert.

Anschließend suchen wir uns ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\{\varphi(1), \dots, \varphi(n_1)\} \supset \{1, \dots, n_0\}$ und

$$\left| s_{\varphi} - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)} \right| \leq \varepsilon/3.$$

Hier nutzen wir neben der Definition der Reihenkonvergenz die Tatsache aus, dass φ eine surjektive Abbildung ist²⁷⁾. (Durch diese Wahl von n_1 ist sichergestellt, dass unter den Summanden $a_{\varphi(1)}, \dots, a_{\varphi(n_1)}$ alle Zahlen a_1, \dots, a_{n_0} vorkommen, das wird gleich – beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile in der nächsten Abschätzung – wichtig werden.)

²⁶⁾Hier sollte man vielleicht besser „Vierecksungleichung“ sagen.

²⁷⁾Genauer: Es gibt doch nach Definition der Surjektivität Zahlen k_1, \dots, k_{n_0} mit $\varphi(k_1) = 1, \dots, \varphi(k_{n_0}) = n_0$. Man definiere n_1 als die größte der Zahlen k_1, \dots, k_{n_0} .

Weiterhin sei m_0 die größte der Zahlen $\varphi(1), \dots, \varphi(n_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 |s - s_\varphi| &= \left| \left(s - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)} - s_\varphi \right) \right| \\
 &\leq \left| s - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0} a_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)} \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_1} a_{\varphi(k)} - s_\varphi \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{\substack{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n_1)\} \\ k > n_0}} a_k \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \sum_{\substack{k \in \{\varphi(1), \dots, \varphi(n_1)\} \\ k > n_0}} |a_k| \\
 &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \sum_{k=n_0+1}^{m_0} |a_k| \\
 &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

(Es sollte nicht verschwiegen werden, dass wir zwischendurch das Summenzeichen in einer noch nicht definierten Variante benutzt haben. Wir kennen, genau genommen, nur $\sum_{i=1}^n a_i$, hier aber tauchten Ausdrücke der Form $\sum_{k \in \Delta} a_k$ auf, wobei Δ eine endliche Teilmenge von \mathbb{N} ist. Intuitiv sollte klar sein, was das bedeutet, etwas mehr wird dazu in Abschnitt 2.5 auf Seite 159 gesagt werden.) Wir haben wirklich $|s - s_\varphi| = 0$ gezeigt, und damit ist der Beweis vollständig geführt. \square

Bemerkungen:

1. Eine Reihe wird *unbedingt konvergent* genannt, wenn jede Umordnung zur gleichen Reihensumme konvergiert. Satz 2.4.5 besagt also gerade, dass die Implikation

$$\text{absolut konvergent} \Rightarrow \text{unbedingt konvergent} \quad (2.8)$$

gilt. Da sich für konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, durch Umordnen jede beliebige Reihensumme erreichen lässt (das wurde vor Definition 2.4.4 skizziert), gilt auch die Umkehrung: Absolute Konvergenz ist für Reihen in \mathbb{K} das Gleiche wie unbedingte Konvergenz. Es ist trotzdem wichtig, unbedingte und absolute Konvergenz zu unterscheiden, denn in allgemeineren Situationen²⁸⁾ als der hier betrachteten gilt nur (2.8), nicht aber die Umkehrung.

²⁸⁾Gemeint sind Folgen in Räumen, bei denen die für die Definition relevanten Bedingungen erfüllt sind:

- es gibt einen Abstandsbegriff;
- Cauchy-Folgen sind konvergent;
- der zu Grunde liegende Raum ist ein Vektorraum.

Für Fortgeschrittene: Jeder Banachraum liefert ein Beispiel für einen solchen Raum, und nach

2. Trivialerweise ist eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern absolut konvergent und damit nach dem vorstehenden Satz unbedingt konvergent. Diese Bemerkung ist wichtig für die Wahrscheinlichkeitstheorie: Möchte man für eine abzählbare Menge E die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, so muss man dafür die Reihensumme $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\})$ bestimmen, wobei E als $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ geschrieben ist und $P(\{\omega_i\})$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von ω_i bezeichnet. Und die Wahrscheinlichkeit von E wäre nicht wohldefiniert, wenn die Reihensumme von der Art abhängen würde, wie man E als Folge $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ darstellt, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\})$ also nicht unbedingt konvergent wäre.

Absolut konvergente Reihen verhalten sich noch in anderer Hinsicht so, wie man es von endlichen Reihen her gewohnt ist: Beim Multiplizieren derartiger Reihen darf „ausmultipliziert“ werden. Genauer gilt der folgende *Multiplikationssatz für absolut konvergente Reihen*:

Satz 2.4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergente Reihen in \mathbb{K} . Definiert man dann für $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n := \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Das wird ausgeschrieben noch deutlicher:

$$(a_1 + a_2 + \dots)(b_1 + b_2 + \dots) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Beweis: (Auch dieser Beweis ist recht technisch, manche werden ihn sich für später aufsparen wollen.)

1. Schritt: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ist – sogar absolut – konvergent.

Beweis dazu: Wir werden die Beschränktheit der Partialsummen der zu $(|c_n|)$ gehörigen Reihe zeigen. Wegen Satz 2.3.7 folgt daraus die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, und ergibt sich mit Satz 2.4.2(iv) die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Man wähle $M \geq 0$ als die größere der Zahlen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Für

dem gefeierten Satz von DVORETZKY und ROGERS gibt es in jedem unendlich-dimensionalen Banachraum eine unbedingt konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist.

eine beliebige Partialsumme der zu $|c_1| + |c_2| + \dots$ gehörigen Reihe gilt dann:

$$\begin{aligned}
 |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^i a_j b_{i+1-j} \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i |a_j| |b_{i+1-j}| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i| |b_j| \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \left(\sum_{j=1}^n |b_j| \right) \\
 &\leq M \cdot M.
 \end{aligned}$$

2. Schritt: Wir setzen $a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $b := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $c := \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und behaupten, dass $a \cdot b = c$ gilt; damit wäre der Satz dann bewiesen.

Beweis dazu: Wir werden zeigen, dass $|c - a \cdot b| \leq \varepsilon$ für jedes positive ε ist. Folglich beginnen wir mit der Vorgabe irgendeines $\varepsilon > 0$, von dem wir annehmen wollen dass es kleiner als 1 ist; dadurch werden wir zum Beweisende $\varepsilon \cdot \varepsilon$ durch ε abschätzen können.

Es ist doch leicht, die Zahlen a , b und c durch geeignete Partialsummen zu approximieren, deswegen kümmern wir uns zunächst um den Vergleich von $\sum_{i=1}^n c_i$ mit $(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=1}^n b_j)$:

$$\begin{aligned}
 \left| \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) - \sum_{i=1}^n c_i \right| &= \left| \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n, \\ i+j > n+1}} a_i b_j \right| \\
 &\leq \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n, \\ i+j > n+1}} |a_i b_j|.
 \end{aligned}$$

Nun ist die Beobachtung wichtig, dass im Fall $i, j \geq 0$, $i+j > n$, eine der Zahlen i oder j größer als $n/2$ sein muss²⁹⁾. Folglich können wir die Abschätzung mit

$$\leq \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n, \\ i \geq n/2}} |a_i b_j| + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n, \\ j \geq n/2}} |a_i b_j|$$

fortsetzen, wobei der erste Summand $\leq (\sum_{i=n/2}^n |a_i|)(\sum_{j=1}^n |b_j|)$ und folglich $\leq (\sum_{i=n/2}^n |a_i|)M$ und entsprechend der zweite $\leq (\sum_{j=n/2}^n |b_j|)M$ ist.

Man wähle ein m_0 , so dass $\sum_{i=m}^{2m} |a_i| \leq \varepsilon$ und gleichzeitig $\sum_{i=m}^{2m} |b_i| \leq \varepsilon$ für $m \geq m_0$; so ein m_0 gibt es wegen des Cauchy-Kriteriums.

²⁹⁾ Wir wollen annehmen, dass n eine gerade Zahl ist.

Sei nun n eine gerade Zahl, für die $n \geq 2m_0$ gilt. Dann sind die Summen $\sum_{i=n/2}^n |a_i|$ und $\sum_{j=n/2}^n |b_j|$ durch ε abschätzbar, und insgesamt erhalten wir

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) - \sum_{i=1}^n c_i \right| \leq 2M\varepsilon.$$

Wir wählen nun n so groß, dass

$$\left| a - \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \varepsilon, \quad \left| b - \sum_{j=1}^n b_j \right| \leq \varepsilon, \quad \left| c - \sum_{i=1}^n c_i \right| \leq \varepsilon.$$

Wenn man dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &:= a - \sum_{i=1}^n a_i \\ \varepsilon_2 &:= b - \sum_{j=1}^n b_j \\ \varepsilon_3 &:= c - \sum_{i=1}^n c_i \end{aligned}$$

definiert, so sind alle $|\varepsilon_i|$ durch $|\varepsilon|$ beschränkt, und es folgt

$$\begin{aligned} |a \cdot b - c| &= \left| \left(\sum_{i=1}^n a_i + \varepsilon_1 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j + \varepsilon_2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n c_i + \varepsilon_3 \right) \right| \\ &\leq \left| \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) - \sum_{i=1}^n c_i \right| + \\ &\quad + |\varepsilon_1| \sum_{j=1}^n |b_j| + |\varepsilon_2| \sum_{i=1}^n |a_i| + |\varepsilon_1 \varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \\ &\leq 2M\varepsilon + |\varepsilon_1|M + |\varepsilon_2|M + |\varepsilon_1 \varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \\ &\leq (4M + 2)\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit haben wir zwar nicht ganz das Ziel erreicht, $|a \cdot b - c| \leq \varepsilon$ zu zeigen, aber wenn wir die vorstehenden Überlegungen mit $\varepsilon/(4M + 2)$ statt mit ε noch einmal durchführen, ist wirklich $|a \cdot b - c| \leq \varepsilon$ für jedes ε bewiesen, d.h. es muss $c = a \cdot b$ gelten. \square

2.5 Ergänzungen

In diesem Abschnitt geht es um einige Ergänzungen zum Thema „Konvergenz“.

Zunächst behandeln wir die *Dezimalentwicklung reeller Zahlen*. Aus der Schule weiß man, dass sich jede Zahl als Dezimalzahl darstellen lässt. Mit Hilfe der Reihenrechnung lässt sich das auch für den hier gewählten axiomatischen Ansatz nachweisen.

Dann kümmern wir uns um *ungeordnete Summation*. Ist M eine Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so soll $\sum_{m \in M} f(m)$ erklärt werden. Solche Summen treten insbesondere für endliche und abzählbare Mengen auf.

Dann folgen noch einige Bemerkungen zum *Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis*. Viele der in diesem Kapitel bewiesenen Ergebnisse haben nämlich eine algebraische Interpretation.

So bedeutet die Aussage $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ „eigentlich“, dass die Limesabbildung auf einem geeigneten Folgenraum additiv ist. Durch solche Beobachtungen kann man einerseits neue Beispiele für Vektorräume und lineare Abbildungen gewinnen und andererseits schon einmal strukturelles Denken trainieren, das heute in der höheren Analysis eine ganz wichtige Rolle spielt.

Und zum Abschluss wird es um *allgemeinere Limesbegriffe* gehen. Manche Folgen sind zwar nicht konvergent, trotzdem gäbe es manchmal gute Gründe, eine bestimmte Zahl als Limes-Ersatz anzusehen. Diese Rolle könnte etwa die Zahl $1/2$ für die Folge $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ spielen, denn $1/2$ liegt doch irgendwie symmetrisch zwischen den Folgengliedern. Es soll gezeigt werden, wie man solche vagen Konzepte präzisieren kann.

Die Dezimalentwicklung reeller Zahlen

Für die meisten Menschen sind reelle Zahlen Objekte, die man mit Hilfe einer endlichen oder unendlichen Dezimalentwicklung konkret aufschreiben kann: zum Beispiel als 3.14 oder als $-12.123123123\dots$. Ohne Kenntnisse der Reihenrechnung kann das eigentlich nicht streng begründet werden, auch kann es mitunter Verständnisprobleme geben:

Aus einer e-mail an www.mathematik.de :

Liebe MathematikerInnen,

ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $1/9 = 0.111\dots$, $3/9 = 0.333\dots$ usw.

Was aber ist dann $0.999\dots$? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $9/9$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1, und $0.999\dots$ ist doch ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es $0.999\dots$ überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man an $0.999\dots$?

Ich würde mich über eine Antwort freuen.

Lina

Lina bekam die Antwort, dass sich ihr Problem in Luft auflöst, wenn man die richtigen Konvergenzbegriffe zur Verfügung hat, doch war sie nur schwer davon zu überzeugen, dass sie wohl leider noch eine Weile warten muss, bis sie das genau versteht.

Wir hingegen haben alle notwendigen Vorarbeiten geleistet: $0.999\dots$ ist wirklich exakt gleich 1, alle wichtigen Informationen zur Dezimalentwicklung stehen im

Satz 2.5.1.

- (i) Seien $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_m, \dots, b_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \dots, 9\}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

und wir setzen abkürzend

$$b_m b_{m-1} \dots b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots :=$$

$$b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots$$

- (ii) Jede nicht negative reelle Zahl besitzt eine Darstellung gemäß (i), d.h. zu $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ gibt es $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_m, \dots, b_0, a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ mit

$$x = b_m b_{m-1} \dots b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots \quad (\text{die Dezimalentwicklung von } x).$$

**Dezimal-
entwicklung**

- (iii) Vereinbaren wir, dass eine negative Zahl x als $-b_m b_{m-1} \dots b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots$ geschrieben wird, wobei $b_m b_{m-1} \dots b_0 . a_1 a_2 a_3 \dots$ die Darstellung von $-x$ gemäß (ii) ist, so ist damit für jede reelle Zahl die Existenz einer Dezimalentwicklung nachgewiesen.

Beweis: (i) Der n -te Reihensummand ist gleich $a_n/10^n$. Da alle a_n durch 9 beschränkt sind, folgt die – sogar absolute – Konvergenz der Reihe aus dem Vergleichskriterium (Satz 2.4.2(iv)).

(ii) Sei $x \geq 0$ vorgelegt. Wir beweisen die Behauptung in drei Schritten:

Schritt 1: Es existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein $y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y < 1$, so dass $x = n_0 + y$.

Beweis dazu: Wir betrachten $\{n \in \mathbb{N} \mid n > x\}$. Diese Menge ist wegen des Archimedesaxioms nicht leer, enthält also nach Satz 1.5.7(vii) ein kleinstes Element n_1 . Es ist damit $n_1 > x$, und außerdem muss $n_1 - 1 \leq x$ gelten (andernfalls wäre nämlich $n_1 - 1$ ein echt kleinerer Kandidat in der Menge als n_1). Damit brauchen wir nur $n_0 := n_1 - 1 \in \mathbb{N}_0$ und $y := x - n_0$ zu definieren.

Schritt 2: Zu $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ sowie $b_m, \dots, b_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ mit $n_0 = \sum_{n=0}^m b_n \cdot 10^n$.

Beweis dazu: Das wird durch vollständige Induktion nach n_0 gezeigt:

- Induktionsanfang: Für $n_0 = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig: Man wähle $m = 0$, $b_0 = 0$.
- Induktionsvoraussetzung: $n_0 \in \mathbb{N}_0$ habe eine Darstellung

$$n_0 = \sum_{n=0}^m b_n \cdot 10^n = b_m \cdot 10^m + \cdots + b_1 \cdot 10 + b_0.$$

- Induktionsschluss: Falls $b_0 < 9$ ist, liefert die Darstellung von n_0 sofort eine Darstellung von $n_0 + 1$:

$$n_0 + 1 = \sum_{n=0}^m b_n \cdot 10^n + 1 = \sum_{n=1}^m b_n \cdot 10^n + (b_0 + 1).$$

Ist $b_0 = 9$, aber $b_1 < 9$, so erhalten wir

$$n_0 + 1 = \sum_{n=2}^m b_n \cdot 10^n + (b_1 + 1) \cdot 10 + 0 = b_m \cdot 10^m + \cdots + (b_1 + 1) \cdot 10 + 0$$

als Darstellung. Ganz analog werden die Fälle „ $b_0 = b_1 = 9$, aber $b_2 < 9$ “, „ $b_0 = b_1 = b_2 = 9$, aber $b_3 < 9$ “ usw. behandelt.

Hier die Fassung ohne „usw.“ für Perfektionisten:

Wähle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $b_0 = b_1 = \cdots = b_k = 9$, aber $b_{k+1} < 9$. Im Falle $k = m$ vereinbaren wir zusätzlich $b_{m+1} := 0$. Dann ist

$$n_0 + 1 = \sum_{n=k+2}^m b_n \cdot 10^n + (b_{k+1} + 1) \cdot 10^{k+1} + \sum_{n=0}^k 0 \cdot 10^n$$

eine Dezimaldarstellung von $n_0 + 1$.

Schritt 3: Zu $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq y < 1$ gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{0, 1, \dots, 9\}$, so dass $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n / 10^n$.

Beweis dazu: Wir konstruieren a_1, a_2, \dots induktiv so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, und

$$\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq y \leq \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \quad (2.9)$$

- Induktionsanfang: Es ist $0 \leq 10 \cdot y < 10$. Folglich gibt es ein a_1 in $\{0, 1, \dots, 9\}$ mit $a_1 \leq 10 \cdot y < a_1 + 1$. (Man definiere a_1 als das größte Element der Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10 \cdot y\}$, das existiert wegen Satz 1.5.7(viii).) Teilen durch 10 liefert (2.9) für $n = 1$:

$$\frac{a_1}{10} \leq y < \frac{a_1 + 1}{10}.$$

- Induktionsvoraussetzung: (2.9) gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsschluss: Zunächst multiplizieren wir (2.9) mit 10^{n+1} und erhalten:

$$a_1 10^n + \dots + a_n 10 \leq y 10^{n+1} \leq a_1 10^n + \dots + (a_n + 1) 10.$$

Nun wiederholen wir die Überlegungen, die wir eben beim Induktionsanfang für $10 \cdot y$ angestellt haben, für

$$y 10^{n+1} - (a_1 10^n + \dots + a_n 10),$$

auf diese Weise erhalten wir ein $a_{n+1} \in \{0, \dots, 9\}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 10^n + \dots + a_n 10 + a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k 10^{n+1-k} \leq 10^{n+1} y \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k 10^{n+1-k} + (a_{n+1} + 1) \\ &= a_1 10^n + \dots + a_n 10 + (a_{n+1} + 1). \end{aligned}$$

Division durch 10^{n+1} liefert dann die Ungleichung (2.9) für $n+1$.

Damit ist bereits alles gezeigt, denn (2.9) impliziert

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k} - y \right| \leq \frac{1}{10^n},$$

und es gilt $1/10^n \rightarrow 0$ wegen $10 > 1$.

(iii) Das ist offensichtlich. □

Bemerkungen:

1. Es ist hoffentlich angesichts der reichlich technischen Formulierung des Ergebnisses nicht untergegangen, dass es sich wirklich um die gute alte Dezimalentwicklung handelt, die man schon in der Schule kennen lernt.

Zum Beispiel hat $1/3$ wirklich die Darstellung $0.333\dots$, hier ist $m = b_0 = 0$ und $a_1 = a_2 = \dots = 3$.

2. Ersetzt man in den vorstehenden Überlegungen die Zahl 10 durch irgendeine natürliche Zahl g mit $g > 1$, so ergibt sich bei gleichem Beweis, dass jede reelle Zahl eine g -adische Entwicklung hat. Ist zum Beispiel $g = 2$ – man spricht dann von der *Dualentwicklung* – so würde etwa $10001.1010101\dots$ die Abkürzung für

$$1 \cdot 2^4 + 1 + 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5 + \dots$$

sein.

3. Die Darstellung von Zahlen als Dezimalzahl ist *nicht eindeutig*. So könnte man die Zahl $23.45000\dots$ genauso gut als $23.449999\dots$ schreiben.

Die Umkehrung: Reelle Zahlen werden als Dezimalzahlen definiert

Im vorigen Unterabschnitt wurde gezeigt, dass man jede reelle Zahl als unendlichen Dezimalbruch schreiben kann. Könnte man das nicht zum Ausgangspunkt einer Definition der reellen Zahlen nehmen? Man *definiert* einfach die reellen Zahlen als Menge der unendlichen Dezimalbrüche, so würde man sich den axiomatischen Zugang oder den komplizierten Weg, der in Abschnitt 1.11 beschrieben wurde (\mathbb{R} als Menge von Äquivalenzklassen von Dedekindschen Schritten), ersparen können.

Diese Idee ist wirklich verführerisch. Der erste Schritt zur Verwirklichung könnte so aussehen: „ \mathbb{R} ist die Menge aller Zahlen der Form $z_0.z_1z_2\dots$ “, wobei $z_0 \in \mathbb{Z}$ und $z_i \in \{0, \dots, 9\}$. Formal besteht also eine reelle Zahl aus einer ganzen Zahl und einer Folge in $\{0, \dots, 9\}$. Das erste kleine Problem, dass ja eigentlich – zum Beispiel – $0.12000\dots$ und $0,1199\dots$ die gleiche Zahl darstellen, ist leicht zu beheben. Man muss nur verbieten, dass die Folge (z_i) von irgendeiner Stelle an nur aus Neunen besteht.

Die wirklichen Schwierigkeiten lauern woanders. Wie sollen denn Addition und Multiplikation definiert werden? Es ist zwar klar, dass $0.121212\dots + 1.414141\dots$ notwendig gleich $1.535353\dots$ sein muss, doch wie soll man die Summe definieren, wenn „Überträge“ notwendig werden, etwa bei $0.555\dots + 0.666\dots$? Das Problem besteht darin, dass man sich bei der in der Schule gelernten Addition „von hinten nach vorn“ vorarbeiten muss, und „hinten“ gibt es nicht (außer wenn beide Dezimalentwicklungen von einer Stelle an nur aus Nullen bestehen). Ein ähnliches Problem – sogar noch gravierender – tritt bei der Multiplikation auf, und deswegen scheint es so, dass die Verwirklichung der Idee „ \mathbb{R} ist die Menge der Dezimalzahlen“ zum Scheitern verurteilt ist.

Überraschenderweise geht es aber doch. Eine ausführliche Darstellung findet man im Buch „Elementare Grundlagen der Analysis“ von W. Rautenberg (BI Wissenschaftsverlag, 1993), hier gibt es eine kurze Skizze.

1. Das Fundament: Auch bei diesem Zugang kann man \mathbb{R} nicht aus dem Nichts erzeugen. Mindestens sollte man wissen, was natürliche und ganze Zahlen sind und welche Eigenschaften diese Zahlenmengen haben. Folgen werden eine wichtige Rolle spielen, und es wird auch von Vorteil sein, sehr sicher mit dem Begriff des Supremums umgehen zu können. Um das neu zu konstruierende Objekt von dem bisher behandelten Zahlkörper \mathbb{R} zu unterscheiden, werden wir es \mathbb{R}_{neu} nennen.

2. \mathbb{R}_{neu} als Menge: Als Menge ist \mathbb{R}_{neu} schon weiter oben eingeführt worden: das System aller $z_0.z_1z_2\dots$ mit $z_0 \in \mathbb{Z}$ und $z_1, z_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$, wobei es nicht zugelassen ist, dass in der Folge (z_n) von einer Stelle ab nur Neunen stehen. Wer es ganz formal haben möchte, kann \mathbb{R}_{neu} als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ definieren, wir werden aber hier die Dezimalzahl-Schreibweise verwenden.

Es wird bequem sein, ein $z_0.z_1z_2\dots \in \mathbb{R}_{\text{neu}}$ auch als $z_0.z_1z_2\dots z_k$ zu schreiben, wenn $z_{k+1} = z_{k+2} = \dots = 0$ gilt. So bezeichnen etwa $12.34101000\dots$,

12.341010 und 12.34101 alle die gleiche „Zahl“: Ja, wir werden schon von Zahlen reden, auch wenn sich erst nach und nach ergeben wird, dass wir die gleichen Objekte erhalten wie vorher.

3. *Die Ordnung auf \mathbb{R}^+* : Wir arbeiten zunächst in $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$, das ist die Teilmenge derjenigen Zahlen $z_0.z_1z_2\dots$, für die $z_0 \geq 0$ gilt. Sind dann $z = z_0.z_1z_2\dots$ und $w = w_0.w_1w_2\dots$ Elemente aus $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$, so schreiben wir $z < w$, wenn gilt:

1. Es ist $z_0 < w_0$; oder
2. es ist $z_0 = w_0$ und $z_1 < w_1$; oder
3. es ist $z_0 = w_0$, $z_1 = w_1$ sowie $z_2 < w_2$; oder
4. ...

Anders ausgedrückt: Beim Vergleich von z_0 mit w_0 , z_1 mit w_1 , z_2 mit w_2 usw. muss für die erste unterschiedliche Stelle „<“ gelten. So ist etwa $3.580098\dots < 3000.0101010\dots$ (erster Unterschied schon in der Stelle „vor dem Komma“), und es gilt $2.289766003991\dots < 2.28976604984\dots$ (erster Unterschied in der achten Stelle nach dem Komma³⁰⁾).

Es ist ganz natürlich, Dezimalzahlen so anzuordnen. Man beachte, dass das nur für den Bereich $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ so geht: „In Wirklichkeit“ ist $-2.223 < -2.221$, das sieht man aber nicht an der ersten unterschiedlichen Ziffer. *Deswegen* bleiben wir zunächst bei $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$.

Es ist dann offensichtlich, dass gilt: Für beliebige $z, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ gilt $z < w$, oder $w < z$ oder $z = w$. Wenn man das allerdings wirklich streng begründen möchte, muss man die Wohlordnung der natürlichen Zahlen heranziehen: Im Fall $z \neq w$ betrachte $\{k \in \mathbb{N} \mid z_k \neq w_k\}$. Ist diese Menge leer, muss $z_0 \neq w_0$ gelten, also $z < w$ oder $w < z$. Andernfalls hat sie ein kleinstes Element k , und je nachdem, ob $z_k < w_k$ oder $w_k < z_k$ gilt, ist $z < w$ oder $w < z$.

Es macht auch keine besondere Mühe nachzuweisen, dass durch „ $z \leq w$ genau dann, wenn $z = w$ oder $z < w$ “ eine Ordnungsrelation definiert wird: Es gilt stets $z \leq z$, aus $z \leq w$ und $w \leq z$ folgt $z = w$, und $z \leq w \leq z'$ impliziert $z \leq z'$.

4. *Ein wichtiges Ergebnis: Suprema existieren*: Da $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ eine Ordnung trägt, ist es sinnvoll, nach der Existenz von Suprema für Teilmengen zu fragen. Zur Erinnerung: Ist $\Delta \subset \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ eine Teilmenge, so wird ein w *Supremum* von Δ genannt, wenn

- Für alle $z \in \Delta$ ist $z \leq w$ (w ist also obere Schranke von Δ).
- Gilt für ein w' ebenfalls, dass $z \leq w'$ für alle $z \in \Delta$, so muss $w \leq w'$ sein: w ist bestmöglich.

³⁰⁾Diese Bezeichnung lehnt sich an die in der Schule übliche an, auch wenn das Komma bei uns ein Punkt ist.

Wir hatten in Abschnitt 2.3 gesehen, dass die Existenz von Suprema eng mit der Vollständigkeit zusammenhängt. In $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ gilt ein Ergebnis, das Satz 2.3.5 entspricht. Es wird der Schlüssel für die nachfolgenden Konstruktionen sein.

Satz: Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ eine nichtleere und beschränkte Teilmenge. „Beschränkt“ bedeutet dabei, dass es ein $w = w_0.w_1w_2\dots$ so gibt, dass $z \leq w$ für alle $z \in \Delta$. Dann hat Δ ein Supremum.

Auch gilt: Jede nicht-leere Teilmenge $\Delta \subset \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ hat ein Infimum.

Beweis: Wir schauen uns zuerst die Zahlen vor dem Komma der $z \in \Delta$ an. Das sind Zahlen aus \mathbb{N}_0 , die durch w_0 nach oben beschränkt sind. Da eine nichtleere nach oben beschränkte Menge von natürlichen Zahlen ein größtes Element z'_0 enthält (Satz 1.5.7(viii)), gibt es Elemente $z = z'_0.z_1z_2\dots \in \Delta$, für die z'_0 größtmöglich ist. Sei Δ_0 die Menge dieser z .

Nun betrachten wir die z_1 für $z = z'_0.z_1z_2\dots \in \Delta_0$. Das ist eine nichtleere Menge von Zahlen in $\{0, \dots, 9\}$, für gewisse z wird diese Ziffer größtmöglich sein: Der größtmögliche Wert sei z'_1 . Mit Δ_1 bezeichnen wir die Menge dieser z . Und so geht es weiter: Δ_2 ist die (nichtleere) Teilmenge von Δ_1 derjenigen z , für die z_2 den größtmöglichen Wert z'_2 annimmt. Und so weiter. Es ist dann schnell einzusehen, dass $z' := z'_0.z'_1z'_2\dots$ Supremum von Δ ist.

Hier lauert eine kleine Falle. Es könnte ja sein, dass die z'_k von einer Stelle an alle gleich Neun sind. (Zum Beispiel dann, wenn $\Delta = \{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ Dann wäre z' die „verbotene“ Zahl $0.9999\dots$ Das ist aber leicht zu beheben: Erhöhe die Ziffer vor der Neunen-Reihe um Eins und setze mit Nullen fort.

Der zweite Teil geht ganz analog. Hier muss man noch – um das Element vor dem Komma des Infimums zu finden – beachten, dass jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N}_0 ein kleinstes Element hat (Satz 1.5.7(vii)).

Damit ist der Beweis vollständig geführt.

5. Die algebraischen Verknüpfungen: Das geht nun mit Hilfe des vorstehenden Satzes recht elegant durch Zurückführen der entsprechenden Operationen auf abbrechende Dezimalzahlen.

Zunächst behandeln wir die *Addition* in $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$. Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen:

- Mit \mathbb{E} bezeichnen wir die abbrechenden Dezimalzahlen in $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$, also diejenigen z , für die die z_k von einer Stelle an gleich Null sind.
- Ist $z = z_0.z_1z_2\dots \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so sei $z^{[k]}$ dasjenige Element in \mathbb{E} , das aus z durch „Abschneiden“ nach der k -ten Stelle entsteht. So ist etwa für $z = 12.3087271\dots$ die Zahl $z^{[3]}$ gleich 12.308 .

Nun seien $z, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ vorgelegt. Wir bezeichnen mit Δ die Menge

$$\Delta := \{z^{[k]} + w^{[k]} \mid k = 0, 1, 2, \dots\};$$

dabei nutzen aus, dass wir für Elemente aus \mathbb{E} schon wissen, was die Addition bedeutet. Δ ist eine nichtleere beschränkte Menge³¹⁾. Folglich gibt es aufgrund des vorstehenden Satzes ein Supremum, wir nennen es $z + w$. Es lässt sich dann nachweisen, dass Assoziativ- und Kommutativgesetz für „+“ erfüllt sind und dass 0 neutrales Element ist.

Nun zur *Multiplikation*. Das geht ganz ähnlich, diesmal arbeiten wir mit

$$\Delta := \{z^{[k]} \cdot w^{[k]} \mid k = 0, 1, 2, \dots\};$$

für Elemente aus \mathbb{E} ist ja aus der Schule schon klar, was „ \cdot “ bedeutet. Das Supremum von Δ wird $z \cdot w$ genannt, und diese Multiplikation hat die üblichen Eigenschaften (sie ist kommutativ und assoziativ, auch gilt – wenn man sie mit der Addition kombiniert – das Distributivgesetz). Die zugehörigen Beweise nutzen nur die Gültigkeit der entsprechenden Eigenschaften in \mathbb{E} und Eigenschaften des Supremums aus.

Es fehlen noch *Subtraktion und Division* in $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$. Was soll etwa $z - w$ bedeuten, wenn $w < z$ gilt?

Es sei $z = z_0.z_1z_2\dots < w = w_0.w_1w_2\dots$. Wir suchen ein z'' mit $z + z'' = w$, dann schreiben wir natürlich $w - z := z''$. Das könnte man so finden: Betrachte als Δ die Menge derjenigen $z' \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$, für die $z + z' \leq w$ ist und definiere z'' als das Supremum von Δ . Alternativ könnte man auch mit

$$z'' := \inf_{k'} \sup \{w^{[k]} - z^{[k]} \mid k \geq k'\}$$

arbeiten, auch dafür gilt $z + z'' = w$.

Hier präsentieren wir noch eine direkte Konstruktion.

Fall 1: Es gibt ein k' , so dass $z_k = w_k$ für $k \geq k'$.

In diesem Fall ist $w^{[k]} - z^{[k]}$ für $k \geq k'$ immer die gleiche Zahl $z'' \in \mathbb{E}$. Es gilt offensichtlich $z + z'' = w$.

Fall 2: Es gibt beliebig große k' mit $z_{k'} < w_{k'}$.

In diesem Fall ist folgende Bemerkung wichtig: Ist $z_{k'} < w_{k'}$ und $k < k'$, so sind die ersten k Stellen von $w^{[k'']} - z^{[k'']}$ für alle $k'' > k'$ die gleichen. (Denn ein möglicher Übertrag wird bei k' aufgefangen.) Das impliziert: die k -te Stelle der Zahlen $w^{[k'']} - z^{[k'']}$ ist für $k'' \rightarrow \infty$ gegen eine Ziffer aus $\{0, 1, \dots, 9\}$ konvergent (die Vor-Kommazahl ist auch von einer Stelle ab konstant gleich d_0). Sei d_k diese Ziffer.

Wir definieren $z'' := d_0.d_1d_2\dots$. Für jedes k' mit $z_{k'} < w_{k'}$ ist dann $z^{[k'-1]} + z_0^{[k'-1]} = w^{[k'-1]}$, und da beide Seiten der Gleichung monoton steigen und $z + z''$ bzw. w als Supremum haben, folgt $z + z'' = w$.

Ähnlich ist es mit der Division, da soll natürlich der Nenner w echt größer als Null sein. Wir arbeiten mit der Menge Δ derjenigen z' , für die $z'w \leq z$

³¹⁾Zum Beispiel ist $z_0 + w_0 + 2$ eine obere Schranke, wenn wir $z = z_0.z_1z_2\dots$ und $w = w_0.w_1w_2\dots$ geschrieben haben.

ist. Das Supremum z'' genügt der Gleichung $z''w = z$, und deswegen kann man $z/w := z''$ definieren.

6. Von $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ zu \mathbb{R}_{neu} : Bisher sind die Ordnung und die algebraischen Verknüpfungen nur auf $\mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ erklärt. Es ist nicht schwer, wenn auch etwas aufwändig, die Definitionen auf \mathbb{R}_{neu} auszudehnen.

Es sei $\mathbb{R}_{\text{neu}}^-$ die Menge der $z = z_0.z_1z_2\ldots \in \mathbb{R}_{\text{neu}}$, für die z_0 negativ ist. Für solche z definieren wir $-z$ als $w_0.w_1w_2\ldots$, wobei $w_0 = -z_0$ und $w_k = z_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ So ist etwa $-(-2.343434\ldots) = 2.343434\ldots$

Zunächst behandeln wir die *Ordnung*. Für $z \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^-$ und $w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^+$ soll stets $z < w$ gelten. Und sind $z, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^-$, so schreiben wir $z < w$ genau dann, wenn $-w < -z$. Auch die *algebraischen Strukturen* können ohne große Mühe übertragen werden. Sind zum Beispiel $z, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^-$, so setze $z + w := -((-z) + (-w))$. Im Fall $z \in \mathbb{R}^+, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^-$ machen wir eine Fallunterscheidung. Ist $-w \leq z$, so setzen wir $z + w := z - (-w)$: Das Minuszeichen ist in diesem Fall ja erklärt. Andernfalls (wenn also $z \leq -w$ ist), wird $z + w$ als $-((-w) - z)$ definiert. Die Multiplikation macht auch keine Schwierigkeiten. Für $z, w \in \mathbb{R}_{\text{neu}}^-$ etwa ist $z \cdot w := (-z) \cdot (-w)$. Es ist dann, zugegeben, ein langer und nicht wirklich spannender Weg zurückzulegen, bis man sicher ist, dass \mathbb{R}_{neu} ein vollständiger archimedischer Körper ist. Größere Probleme gibt es aber nicht, die Vollständigkeit zum Beispiel ist im Wesentlichen schon mit unserem vorstehenden Satz gezeigt.

7. ... und so „neu“ ist \mathbb{R}_{neu} gar nicht: Da ja \mathbb{R} im Wesentlichen eindeutig ist, muss \mathbb{R}_{neu} zu „unserem“ \mathbb{R} in allen Strukturen isomorph sein. Es ist keine große Überraschung, dass der Isomorphismus in diesem Fall leicht explizit anzugeben ist: Definiere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{neu}}$ einfach dadurch, dass einem x die Entwicklung als Dezimalzahl zugeordnet wird (bei der Darstellungen verboten sind, die auf 9999... enden). Es ist Routine zu zeigen, dass φ bijektiv ist und alle Strukturen respektiert.

8. *Ein Fazit*: Es folgt noch eine kurze (subjektive) Bewertung dieses Ansatzes:

- *Positiv* ist zu werten, dass man im aus der Schule vertrauten Bereich der endlichen und unendlichen Dezimalzahlen bleibt. Es ist auch bemerkenswert, dass ein Ansatz, der beim ersten Versuch zum Scheitern verurteilt zu sein scheint – man kann zwei unendliche Dezimalzahlen nun einmal nicht wie endliche „von hinten nach vorn“ addieren, vom Multiplizieren ganz zu schweigen – erfolgreich verwirklicht werden kann.

Ein weiterer Vorteil ist, dass sich einige Tatsachen über \mathbb{R} nun ganz natürlich ergeben. So ist zum Beispiel klar, dass das Archimedesaxiom erfüllt ist, denn $|z_0| + 1$ ist sicher eine natürliche Zahl, die $z = z_0.z_1z_2\ldots$ majorisiert. Auch sieht man sofort, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt: Ist $z = z_0.z_1z_2\ldots$, $w = w_0.w_1w_2\ldots$ und $z < w$, so suche zunächst ein k mit $z_k < w_k$ und dann ein $k' > k$, für das $w_{k'} < 9$ gilt; für $z' := z_0.z_1\ldots z_k9\ldots9$ (mit $k' - k$ Neunen) ist dann $z < z' < w$.

- Leider gibt es auch *Negatives*. Um alles wirklich streng durchzuführen, muss man sich mit Folgen und Feinheiten der Ordnungstheorie (Suprema!) schon gut auskennen. Und wenn man alle Einzelheiten berücksichtigen möchte, ist der Ansatz doch recht schwerfällig. Deswegen ist es unwahrscheinlich, dass er die in Lehrbüchern üblichen Zugänge (axiomatisch, oder von \mathbb{N} „konstruktiv“ nach \mathbb{R}) verdrängen wird.

Ungeordnete Summation

Mal angenommen, M ist eine 77-elementige Menge und jedem $m \in M$ ist eine Zahl a_m zugeordnet³²⁾. Dann ist offensichtlich, was das Zeichen

$$\sum_{m \in M} a_m$$

bedeuten soll: Man schreibe M als $\{m_1, \dots, m_{77}\}$ und definiere

$$\sum_{m \in M} a_m := a_{m_1} + \dots + a_{m_{77}}.$$

Das einzige Problem besteht dann darin zu garantieren, dass diese Definition nicht von der zufälligen Schreibweise von M in genau *dieser* Reihenfolge abhängt. Das folgt – woraus sonst – natürlich aus der Kommutativität der Addition. Ein exakter Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Elemente von M wäre recht schwerfällig.

Zusammengefasst: Für *endliche* Mengen M lässt sich $\sum_{m \in M} a_m$ so definieren, dass alle das Gleiche darunter verstehen. (Da die leere Menge nach Definition ebenfalls endlich ist, muss noch gesagt werden, was eine Summe über die leere Indexmenge ist: Diese Summe wird als Null definiert.)

Für unendliche Mengen ist das nicht zu erwarten, wir haben ja schon gesehen, dass sich die Reihensumme bei Umordnungen ändern kann. Deswegen beschränken wir uns auf einen Spezialfall:

Definition 2.5.2. Sei M eine nicht leere Menge, für jedes m sei a_m eine reelle nicht negative Zahl. Falls dann eine Zahl R so existiert, dass $\sum_{m \in \Delta} a_m \leq R$ für jede endliche Teilmenge Δ von M gilt, so definieren wir

$$\sum_{m \in M} a_m := \sup_{\substack{\Delta \subset M, \\ \Delta \text{ endlich}}} \sum_{m \in \Delta} a_m.$$

(Die Begründung, dass man das so machen kann, steht in Satz 2.3.6. Danach hat jede nicht leere, nach oben bechränkte Menge ein Supremum. Wir wenden ihn auf die Menge der $\sum_{m \in \Delta} a_m$ an, wobei Δ alle endlichen Teilmengen von M durchläuft.)

³²⁾Es liegt also eigentlich eine Abbildung von M nach \mathbb{R} vor.

Diese Definition sieht auf den ersten Blick etwas gekünstelt aus. Trotzdem bleiben alle Eigenschaften erhalten, die man von endlichen Summen her gewohnt ist, auch führt die Definition im Falle abzählbarer M zur gewöhnlichen Reihensumme.

?

Zeigen Sie zur Übung:

- Ist $a_m \leq b_m$ für jedes m , so ist $\sum_{m \in M} a_m \leq \sum_{m \in M} b_m$.
- Es gilt $\sum_{m \in M} c \cdot a_m = c \sum_{m \in M} a_m$ für jedes $c \geq 0$.

Etwas überraschender ist, dass die Allgemeinheit dieser Definition nur scheinbar ist. Es gilt der

Satz 2.5.3. *Die a_m seien nicht negativ, und $\sum_{m \in M} a_m$ möge existieren. Dann sind höchstens abzählbar viele a_m echt größer als Null.*

Beweis: Wir bezeichnen für irgendeine natürliche Zahl k mit M_k die Menge derjenigen $m \in M$, für die $a_m \geq 1/k$ gilt. Dann ist aufgrund des Archimedesaxioms $\{m \mid a_m > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$, und außerdem ist jede der Mengen M_k endlich: Da, für ein geeignetes $R > 0$, alle endlichen Summen von a_m 's durch R beschränkt sind, kann M_k höchstens $k \cdot R$ Elemente haben. Und deswegen ist die Menge $\{m \mid a_m > 0\}$ als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen höchstens abzählbar. \square

Folgenräume

Wir erinnern an die Vektorraumdefinition aus der Linearen Algebra:

Definition 2.5.4. *Sei X eine Menge mit einer inneren Komposition $+: X \times X \rightarrow X$ (Addition) und einer äußeren Komposition $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ³³⁾ (Skalarmultiplikation).*

X heißt dann \mathbb{K} -Vektorraum, falls

(i) $(X, +)$ ist abelsche Gruppe (d.h., „+“ ist kommutativ und assoziativ, es gibt ein neutrales Element, und jedes Element hat ein Inverses).

(ii) Es gilt für beliebige $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda \cdot \mu) \cdot x, \\ \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \\ (\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x.\end{aligned}$$

(iii) Für jedes $x \in X$ ist $1 \cdot x = x$.

(Wir haben hier für die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation die Zeichen „+“ und „ \cdot “ – also die gleichen Zeichen wie für die entsprechenden Operationen für Zahlen – verwendet. Das ist allgemein üblich und kann auch nicht zu Verwirrungen führen, da aus dem Zusammenhang stets klar ist, ob es gerade um Zahlen oder Vektoren geht.)

³³⁾ Wie bisher ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Wir werden gleich zahlreiche aus der Analysis gewonnene Beispiele angeben. Offensichtlich gilt:

\mathbb{R} ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und \mathbb{C} ist ein \mathbb{C} -Vektorraum,

wenn man vereinbart, dass „+“ und „ \cdot “ die aus der Körperdefinition gewohnte Bedeutung haben. Jeder \mathbb{C} -Vektorraum ist erst recht ein \mathbb{R} -Vektorraum, wenn man die äußere Komposition $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ auf den Fall reeller λ einschränkt. Insbesondere ist also \mathbb{C} ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Definition 2.5.5. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $Y \subset X$.

Y wird Unterraum genannt, falls das neutrale Element der Addition zu Y gehört und $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$ für alle $y_1, y_2 \in Y$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt. Dann ist Y bzgl. der von X geerbten Kompositionen selbst wieder ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Als Vorbereitung der Interpretation einiger unserer Ergebnisse im Rahmen der linearen Algebra beginnen wir mit der

Definition 2.5.6.

(i) Sei s die Menge aller Folgen in \mathbb{K}^{34} , also $s := \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Wir erklären auf s eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \lambda \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

(ii) Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} c_{00} &:= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{es existiert } \hat{n} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für } n \geq \hat{n}\} \\ & \quad (= \text{Menge der abbrechenden Folgen}). \\ c_0 &:= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow 0\} \\ & \quad (= \text{Menge der Nullfolgen}). \\ c &:= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\}. \\ & \quad (= \text{Menge der konvergenten Folgen}). \\ \ell^\infty &:= \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{es existiert } M > 0 \text{ mit } |a_n| \leq M, \text{ alle } n\}. \\ & \quad (= \text{Menge der beschränkten Folgen}). \end{aligned}$$

Damit kann man einige unserer Ergebnisse in der Sprache der Linearen Algebra so formulieren:

Satz 2.5.7. Es gilt:

(i) s ist ein \mathbb{K} -Vektorraum.

³⁴⁾Genau genommen müssten wir $s_{\mathbb{K}}$ anstatt s schreiben. Das wäre recht schwerfällig, wir werden der Einfachheit halber bei s bleiben.

(ii) c_{00} , c_0 , c und ℓ^∞ sind Unterräume von s , und es gilt

$$c_{00} \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty \subsetneq s.$$

Beweis: (i) Die definierenden Eigenschaften eines \mathbb{K} -Vektorraums sind ohne jede Schwierigkeiten nachzuprüfen. Hervorzuheben ist lediglich, dass die gewünschten Bedingungen Konsequenzen aus den Eigenschaften von \mathbb{K} sind: So ist z.B. $(0, 0, \dots)$ deswegen neutrales Element der Addition in s , weil 0 neutral in \mathbb{K} ist.

Diese Bemerkung trifft für alle konkreten \mathbb{K} -Vektorräume zu, weitere Beispiele werden Sie in späteren Kapiteln finden. In diesem Sinne ist \mathbb{K} (d.h. im Wesentlichen unser Axiomensystem in 1.8.2) der „Urvater“ aller konkreten \mathbb{K} -Vektorräume.

(ii) Alle benötigten Aussagen sind evident, schon bewiesen oder leicht nachzuprüfen. Genauer:

c_{00} ist ein Unterraum: Das ist klar.

c_0, c sind Unterräume: Das ist eine Umformulierung von Satz 2.2.12.

ℓ^∞ ist Unterraum: Das folgt sofort aus der Dreiecksungleichung.

$c_{00} \subset c_0 \subset c$: Auch das dürfte klar sein.

$c \subset \ell^\infty$: Das steht in Lemma 2.2.11.

Für den Nachweis, dass alle Inklusionen echt sind, benötigen wir vier konkrete „Versager“, für $c_0 \neq c$ z.B. eine konvergente Folge, die keine Nullfolge ist (einfachstes Beispiel: $(1, 1, \dots)$). Zum Beweis von $c_{00} \neq c_0$ und $\ell^\infty \neq s$ wird das Archimedesaxiom benötigt. (Warum eigentlich?) \square

?

Bemerkung: Es muss betont werden, dass das *Umschreiben* eines analytischen Resultats in die Sprache der Linearen Algebra *keine bemerkenswerte mathematische Leistung* darstellt. Trotzdem soll das gelegentlich getan werden, denn erstens trägt es zu einem besseren Verständnis der analytischen und algebraischen Begriffsbildungen bei, und zweitens sind komplexere analytische Sachverhalte nach Umschreibung häufig prägnanter formulierbar und besser verständlich. Die Hoffnung, auf diese Weise um „harte“ analytische Beweise herumzukommen, ist allerdings unberechtigt: Hätten wir anstelle von Satz 2.2.12(ii), (iii) die Aussage

„ c ist ein \mathbb{K} -Vektorraum“

formuliert, wäre der Beweis der gleiche geblieben.

Wir erinnern an eine weitere Definition:

Definition 2.5.8. Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt linear (genauer: \mathbb{K} -linear), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

gilt.

Dann besagt Satz 2.2.12, dass die Abbildung

$$\lim : c \rightarrow \mathbb{K}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim a_n$$

eine lineare Abbildung ist.

Zur *Reihenrechnung*: Dort spielt der Raum

$$\ell^1 := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \right\}$$

eine wichtige Rolle. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sollte es Ihnen leicht möglich sein zu zeigen, dass ℓ^1 ein Unterraum von s ist. Versuchen Sie diejenigen Sätze zu finden, in denen wir

$$\ell^1 \subsetneq c_0 \text{ bzw. } \Sigma : \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist linear}$$

bewiesen haben.

?

Sollten Sie mit den grundlegenden Begriffen der *Ringtheorie* schon vertraut sein, können Sie die vorstehend erzielten Ergebnisse auch unter diesem Gesichtspunkt betrachten. Zunächst definieren wir durch

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Multiplikation in s . Die Eigenschaften von \mathbb{K} implizieren dann, dass s ein Ring ist.

Es sollte Ihnen keine Schwierigkeiten machen, zu den nachstehenden Aussagen die Beweise zu finden (bzw. einen schon bewiesenen Satz zu zitieren) oder – falls nötig – geeignete Gegenbeispiele anzugeben:

- $c_{00}, c_0, c, \ell^\infty$ sind kommutative Ringe.
- c, ℓ^∞, s besitzen eine multiplikative Einheit. Welche Elemente besitzen Inverse?
- c_{00}, c_0 besitzen keine multiplikative Einheit.
- s ist kein Körper (ebenso wenig c und ℓ^∞ ; für c_{00} und c_0 ist das wegen des Fehlens einer multiplikativen Einheit sowieso nicht zu erwarten).
- $\lim : c \rightarrow \mathbb{K}$ ist ein Ringhomomorphismus mit Kern c_0 .
- c_{00} ist ein Ideal in c_0, c, ℓ^∞ und s .

(Ein Unterring A eines kommutativen Rings R heißt *Ideal*, falls $a \cdot r \in A$ für alle $a \in A$ und alle $r \in R$ gilt.)

- c_0 ist ein Ideal in c und ℓ^∞ , nicht jedoch in s .
(Für „ c_0 ist Ideal in c “ können Sie einen allgemeinen Satz über Ringhomomorphismen auf $\lim : c \rightarrow \mathbb{K}$ anwenden.)
- c ist kein Ideal in ℓ^∞ , und ℓ^∞ ist kein Ideal in s .

- Falls in einem der vorstehenden Fälle ein Folgenraum Ideal in einem anderen war: Prüfen Sie nach, ob sogar ein Hauptideal, Primideal oder maximales Ideal vorlag. (Achtung: Die Untersuchungen zur Maximalität sind – wenigstens für Anfänger – schwierig.)

Verallgemeinerte Limesbegriffe

Wir haben viel Energie darauf verwendet, um die Aussage „Die Folge (a_n) kommt der Zahl a beliebig nahe“ in der Definition 2.2.9 zu präzisieren. Daran anschließend konnten dann einige strukturelle Eigenschaften gezeigt werden, etwa: Die Menge der konvergenten Folgen bildet einen Vektorraum, und darauf ist die Limesabbildung linear; der Limes nicht negativer Folgen ist nicht negativ; ...

Man kann aber auch *umgekehrt vorgehen*: Man kann zuerst sagen, welche Eigenschaften ein Limesbegriff haben soll und dann durch eine geschickte Konstruktion versuchen, diese Forderungen zu erfüllen. Diesen Weg wollen wir jetzt skizzieren:

Definition 2.5.9. *Es sei X ein Untervektorraum des Raumes s aller reellen Folgen, der den Raum c der konvergenten Folgen umfasst.*

Er soll auch die folgende Eigenschaft haben: Ist (a_1, a_2, \dots) in X , so auch die „verschobene“ Folge (a_2, a_3, \dots) .

Weiter sei $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Wir werden das Bild einer Folge (a_n) mit $L(a_n)$ bezeichnen³⁵⁾. L heißt ein verallgemeinerter Limes, wenn gilt:

- (i) L ist linear.
- (ii) L setzt die übliche Limesabbildung fort: Ist (a_n) eine konvergente Folge, so ist $L(a_n) = \lim a_n$.
(Verträglichkeitsforderung)
- (iii) Ist $a_n \geq 0$ für jedes n , so gilt $L(a_n) \geq 0$.
(Monotonie)
- (iv) $L(a_1, a_2, \dots) = L(a_2, a_3, \dots)$ für jede Folge (a_1, a_2, \dots) aus X .
(Translationsinvarianz)

Bisher kennen wir nur ein Beispiel: Man definiere $X := c$ und $L := \lim$. Dass dann die Bedingung (iv) erfüllt ist, ist ein Spezialfall der Tatsache, dass Teilfolgen den gleichen Limes haben. Interessanter ist es natürlich, wenn X ein echter Oberraum des Raumes c der konvergenten Folgen ist. Es gibt einen ganzen Zoo von verallgemeinerten Limesbegriffen, Interessenten empfehle ich den Klassiker „Divergent Series“ von G.H. HARDY, in dem das Problem allerdings unter dem Aspekt der Reihenkonvergenz behandelt wird.

Für die Analysis am wichtigsten ist der folgende Ansatz:

³⁵⁾Eigentlich müsste es ja $L((a_n))$ heißen.

Definition 2.5.10. Sei X_C die Menge derjenigen Folgen (a_n) , für die die Folge

$$\left(a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots\right)$$

konvergent ist. Dann wird $C\text{-}\lim : X_C \rightarrow \mathbb{R}$ durch die folgende Vorschrift definiert:

C - lim

$$C\text{-}\lim a_n := \lim_k \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}.$$

Um uns mit der Definition vertraut zu machen, behandeln wir einige

Beispiele:

1. Für die Folge $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ lautet die zugehörige Folge der Mittelwerte $(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \dots)$, das n -te Folgenglied ist gleich $1/2$ für gerade und gleich $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ für ungerade n . Damit ist klar, dass $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ zu X_C gehört und der C -Limes dieser Folge gleich $1/2$ ist.

2. Sei (a_n) eine konvergente Folge, der Limes werde mit a bezeichnet. Dann konvergiert auch die Folge

$$\left(a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots\right)$$

gegen a , d.h.: $c \in X_C$, und auf c stimmt der C -Limes mit dem gewöhnlichen Limes überein.

Die Begründung ist nicht sehr schwer, tatsächlich handelt es sich um ein Ergebnis von Cauchy, das so gut wie jeder Mathematikstudent als Übungsaufgabe gestellt bekommt. (Wir werden von dieser Tradition nicht abweichen.)

Dass der C -Limes völlig zu Recht an dieser Stelle eingeführt wird, ist nach dem folgenden Satz klar:

Satz 2.5.11. Der C -Limes ist ein verallgemeinerter Limes auf dem Raum X_C , er wird der Cesàro-Limes genannt³⁶⁾.

Cesàro-Limes

Beweis: Alle zu zeigenden Behauptungen sind leicht einzusehen, sie ergeben sich aus einer Kombination von einfachen Eigenschaften der Abbildungen \lim und

$$S : (a_1, a_2, \dots) \mapsto \left(a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots\right).$$

So bildet z.B. S nicht negative Folgen offensichtlich auf ebenfalls nicht negative ab, und der Limes einer Folge nicht negativer Zahlen ist ebenfalls größer oder gleich Null: So folgt sofort die Monotonie. \square

Der Cesàro-Limes spielt eine wichtige Rolle in der *Fourieranalyse*, die Sie in höheren Semestern kennen lernen werden. Da kann man nämlich zeigen, dass jede stetige periodische Funktion aus einfachen Bausteinen, nämlich den Sinus- und Cosinusfunktionen aufgebaut ist. Einzige Vorsichtsmaßregel: Bei den dann auftretenden Reihen muss der Limes der Partialsummen im Cesàro-Sinn bestimmt werden.

³⁶⁾Kenner sprechen den Namen als **tschesa:ro** aus, der Herr war Italiener.

2.6 Verständnisfragen

Zu 2.1

Sachfragen

S1: Was ist eine Folge in einer Menge M ? Nennen Sie einige Möglichkeiten, eine Folge zu definieren.

S2: Was versteht man unter einer Teilfolge bzw. unter der Umordnung einer Folge?

Zu 2.2

Sachfragen

S1: Wie sind $|x|$ für $x \in \mathbb{R}$ und $|z|$ für $z \in \mathbb{C}$ definiert?

S2: Was ist $|z|$ anschaulich? Was ist bei der Definition vorbereitend zu klären?

S3: Was versteht man unter der Dreiecksungleichung, warum heißt sie so, und welche Bedeutung hat sie für viele Beweise in der Analysis?

S4: Wie ist \sqrt{a} definiert? Welche Rechenregeln gibt es für das Wurzelziehen?

S5: Was bedeutet $a_n \rightarrow 0$ und allgemeiner $a_n \rightarrow a$?

S6: In welchem Sinne ist $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ die wichtigste konvergente Folge?

S7: Was besagt das Vergleichskriterium, was kann man über Summen, Produkte usw. konvergenter Folgen aussagen?

S8: Was ist zu zeigen, bevor man die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ benutzen darf?

Methodenfragen

M1: Konvergenzbeweise führen können.

Zum Beispiel:

1. Gilt $a_n \rightarrow 0$ und $|b_n| \leq M$ für alle n , so folgt $a_n b_n \rightarrow 0$.
2. Umgekehrt: Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge mit $a_n b_n \rightarrow 0$ für alle Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.
3.
 - $\left(1 + \frac{i}{n^2}\right) \left(\frac{4}{3^n} - 3\right)^2 \rightarrow ?$
 - $\frac{6 - 4i/n}{3i - 5/n^2} \rightarrow ?$

M2: Verständnis der Quantoren \forall, \exists .

Zum Beispiel:

1. Schreiben Sie das Archimedesaxiom unter Verwendung von \forall, \exists .
2. Was wird durch

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq n_0} |a_n| \leq \varepsilon$$

definiert? (Da hat sich einer „Nullfolge“ falsch gemerkt.) Was ist das Gegenteil dieser Aussage?

Zu 2.3**Sachfragen****S1:** Was ist eine Cauchy-Folge?**S2:** Wie verhalten sich die Begriffe „Cauchy-Folge“ und „konvergente Folge“ zueinander?**S3:** Beweis(idee) zu: Cauchy-Folgen in \mathbb{K} sind konvergent.**S4:** Was versteht man unter dem Supremum (bzw. Infimum) einer Teilmenge eines geordneten Raumes?**S5:** Wie kann man Vollständigkeit statt mit Dedekindschen Schnitten gleichwertig mit Cauchy-Folgen und mit Suprema beschreiben?**S6:** Was ist eine Intervallschachtelung?**S7:** Beweis(idee) zu der Aussage: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und nach oben beschränkt, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.**Methodenfragen****M1:** „ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge“ nachweisen können.

Zum Beispiel:

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.
2. Zeigen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung von: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{K} \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent), dass das Produkt aus einer Cauchy-Folge und einer konvergenten Folge eine Cauchy-Folge ist.

M2: Ordnungsrelationen behandeln können.

Zum Beispiel:

1. Man definiere auf \mathbb{C} eine Relation \prec durch:
Sei $z = a + bi, z' = a' + b'i \in \mathbb{C}, (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$, dann ist

$$z \prec z' : \Longleftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b').$$

Es ist zu zeigen, dass \prec eine Ordnungsrelation ist.

2. Sei M eine Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Man finde Bedingungen an f , so dass

$$x \prec y : \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

eine Ordnungsrelation auf M definiert.

3. Man finde eine Ordnung auf \mathbb{R} mit:
 - Je zwei Elemente sind vergleichbar, aber
 - die Ordnung ist *nicht* mit den algebraischen Operationen verträglich.

M3: Beweise zu sup und inf führen können.

Zum Beispiel:

1. Bestimmen Sie (mit Beweis) Infimum und Supremum von $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Beweisen Sie: Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt, so ist $\sup(A+x) = \sup A + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei ist die Menge $A+x$ durch $\{a+x \mid a \in A\}$ definiert.
3. Untersuchen Sie $\sup \emptyset$, $\inf \emptyset$ in $[0, 1]$ und in \mathbb{N} (jeweils natürliche Ordnung).
4. Ist $(M, <)$ ein geordneter Raum und $A \subset M$ mit $A \neq \emptyset$, so ist $\inf A < \sup A$.

Zu 2.4**Sachfragen**

- S1:** Wie führt man Reihenkonvergenz auf Folgenkonvergenz zurück?
- S2:** Was besagen Vergleichskriterium und Cauchy-Kriterium?
- S3:** Welche Permanenzeigenschaften zur Reihenkonvergenz kennen Sie?
- S4:** Was ist eine alternierende Reihe? Kennen Sie ein Konvergenzkriterium für solche Reihen?
- S5:** Wie lauten die Aussagen von Wurzelkriterium bzw. Quotientenkriterium? Welche konvergente Reihe wird dabei zum Abschätzen herangezogen?
- S6:** Was bedeutet absolute Konvergenz einer Reihe? Was kann man über Umordnungen bzw. Produkte derartiger Reihen sagen?
- S7:** Was ist unbedingte Konvergenz?

Methodenfragen

M1: Konvergenzkriterien anwenden können.

Zum Beispiel:

1. Bestimmen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i+1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(5i)^n} - \frac{1}{6^{n+1}} \right).$$

2. Ist

$$\frac{1}{1!+1} - \frac{1}{2!+1} + \frac{1}{3!+1} - \frac{1}{4!+1} \pm \dots$$

konvergent?

3. Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)!}$$

konvergent; dabei ist $0! := 1$.

4. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}}$$

konvergent?

Zu 2.5**Sachfragen**

S1: Was bedeutet in der Sprache der Reihenrechnung, dass man Zahlen als Dezimalzahlen schreiben kann.

S2: Wie sind die Räume s , ℓ^∞ , c , c_0 , c_{00} definiert?

Methodenfragen

M1: Begriffe der (Linearen) Algebra an konkreten analytischen Situationen (z.B. an Folgenräumen) untersuchen können.

Zum Beispiel:

1. Der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} ist zweidimensional.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei e_n die Folge $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 an der n -ten Stelle). Dann gilt: Die Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig in s . Was ist die lineare Hülle von $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

M2: Resultate der Analysis – falls dafür geeignet – im Rahmen der (Linearen) Algebra interpretieren können.

Zum Beispiel:

1. Finden Sie eine algebraische Interpretation für Satz 2.4.2(i) und (ii).
2. Analog für Satz 2.3.2(ii) und (iv).
3. Was ist nachzuweisen, wenn behauptet wird:

$$\ell^2 := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in s \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \text{ konvergiert} \right\}$$

ist ein Unterraum von s ?

2.7 Übungsaufgaben

Zu Abschnitt 2.1

2.1.1 Man zeige: Jede Teilfolge einer Umordnung einer Folge kann als Umordnung einer Teilfolge geschrieben werden. Geht das auch umgekehrt?

Zu Abschnitt 2.2

2.2.1 Für welche reellen Zahlen x gelten folgende Ungleichungen?

- (a) $|x - 5| > 0.4$,
- (b) $|x + 3| \leq |x - 2|$,
- (c) $|2x + 1| > |x - 2|$.

2.2.2 Zeigen Sie, dass Umordnungen konvergenter Folgen ebenfalls konvergent sind. Muss der Grenzwert der Umordnung mit dem Grenzwert der Ausgangsfolge übereinstimmen?

2.2.3 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$

(b) $b_n = \frac{r_0 + r_1 n + \dots + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + \dots + s_k n^k}$ für gegebene r_i und s_i , $0 \leq i \leq k$, $s_k \neq 0$.

Dabei sei der Nenner für alle $n \in \mathbb{N}$ von 0 verschieden.

(c) $c_n = (-5)^n.$

(d) $d_n = \frac{2 + 1/\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 5^{-n}}.$

2.2.4 Was passiert, wenn man in der Nullfolgendefinition ε durch $1/\varepsilon$ ersetzt: Welche Folgen (a_n) sind durch

„Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 , so dass $|a_n| \leq 1/\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.“

charakterisiert?

2.2.5 Man beweise folgende Aussagen über Teilfolgen:

(a) Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Besitzt jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) eine Teilfolge (genauer: Teilmengenfolge) $(a_{n_{k_l}})$, die gegen a konvergiert, so konvergiert (a_n) selbst gegen a .

2.2.6 Es sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und

$$a_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

die Folge der Mittelwerte.

(a) Zeigen Sie, dass die Mittelwerte (a_n) konvergieren, falls die (x_n) konvergieren. (Wogegen nämlich?)

(b) Die Umkehrung gilt nicht: Es gibt eine Folge (x_n) , so dass (a_n) konvergiert, (x_n) jedoch nicht.

(c) Folgt aus der Konvergenz der (a_n) , dass die Folge der (x_n) beschränkt ist?

Zu Abschnitt 2.3

2.3.1 Für $M \subset \mathbb{R}$ versteht man unter rM , $r \in \mathbb{R}$, die Menge $\{rx \in \mathbb{R} \mid x \in M\}$; weiter sei $-M$ die Menge $(-1)M$.

Man beweise oder widerlege:

(a) $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\inf(-A) = -\sup(A)$, falls $A \neq \emptyset$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ist.

(b) Es seien a_{ij} für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\sup_{1 \leq i \leq m} \inf_{1 \leq j \leq n} (a_{ij}) = \inf_{1 \leq j \leq n} \sup_{1 \leq i \leq m} (a_{ij}).$$

- (c) Die a_{ij} seien wie in (b). Dann gilt

$$\sup_{1 \leq i \leq m} \sup_{1 \leq j \leq n} (a_{ij}) = \sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{1 \leq i \leq m} (a_{ij}).$$

- (d) Ist $a_i \leq b_i$ für alle i in einer Indexmenge M , so ist $\sup a_i \leq \sup b_i$.

2.3.2 Es sei K der Körper $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ (vgl. Übung 1.4.3) mit der gewöhnlichen von \mathbb{R} geerbten Ordnung. Zeigen Sie, dass nicht jede Cauchy-Folge in K konvergiert.

2.3.3 Sei $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Tipp: Man zeige zunächst, dass a_{n+2} für $n \in \mathbb{N}$ stets zwischen a_n und a_{n+1} liegt, und dann, dass $|a_n - a_{n+1}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. (Warum ist (a_n) dann eine Cauchy-Folge?)

- (b) Zeigen Sie, dass (a_n) gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x = 1$ konvergiert.

Bemerkung: Man berechnet damit den Wert der so genannten Kettenbruchentwicklung für den goldenen Schnitt:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}.$$

2.3.4 Für die geordnete Menge $(M, <)$ und die Teilmenge A bestimme man $\sup(A)$ und $\inf(A)$, falls diese existieren:

- (a) $A = \{4, 8, 10\}$, wobei $M = \mathbb{N}$, $a < b \Leftrightarrow a|b$.
 (b) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, $(M, <)$ wie in (a).
 (c) $A = \{x \mid x^2 < 2\}$, wobei $M = \mathbb{R}$, $a < b \Leftrightarrow a \leq b$.
 (d) $A = \{[x, y] \mid -1 < x \leq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y \leq 2\}$, wobei $M = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $a < b \Leftrightarrow a \subset b$.

2.3.5 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} mit

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a_{n+1}| \leq q^n;$$

dabei ist $0 \leq q < 1$. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

2.3.6 Sei M eine Menge. Man beweise, dass im geordneten Raum $(\mathcal{P}(M), \subset)$ für $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(M)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ gilt:

$$\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}, \quad \inf \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}.$$

Zu Abschnitt 2.4

2.4.1 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, für welche divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$?

2.4.2 Sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen, die monoton fällt und gegen Null konvergiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann existiert, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ existiert.

Tipp: Erinnern Sie sich daran, wie die Divergenz der harmonischen Reihe gezeigt wurde.

(b) Man nutze Teil (a), um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$ konvergent ist³⁷⁾.

2.4.3 Die Summe der alternierend harmonischen Reihe sei mit a bezeichnet (d. h. $a := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k$). Man zeige

(a) $a \geq 1/2$

und beweise folgendes Konvergenzverhalten zweier spezieller Umordnungen:

$$(b) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - - + + \dots = a.$$

$$(c) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + + - + + - \dots = \frac{3}{2}a.$$

Hinweis: $\frac{3}{2}a = a + \frac{1}{2}a$.

Lässt sich allgemein etwas über die Umordnungen aussagen, bei denen auf p (bzw. $2p$) positive Summanden immer p negative folgen?

2.4.4 Hier soll gezeigt werden, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dazu wird die Annahme, die Menge der Primzahlen sei $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ (wobei $p_1 < p_2 < \dots < p_r$) für ein $r \in \mathbb{N}$ wie folgt zum Widerspruch geführt:

(a) Man zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r < \infty} \frac{1}{p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}}.$$

Hierbei darf ausgenutzt werden, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.

(b) Dann wird bewiesen, dass

$$\sum_{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r < \infty} \frac{1}{p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}} = \prod_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k}.$$

(c) Nun ist noch ein Widerspruch aus (a) und (b) abzuleiten.

Bem.: „ $\sum_{0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r < \infty}$ “ steht für „ $\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty}$ “.

Zu Abschnitt 2.5

2.5.1 Man zeige, dass die Abbildung $\varphi : \ell^\infty \rightarrow c_0$, $(a_n) \mapsto (a_n/n)$ eine injektive lineare Abbildung ist. Ist sie surjektiv?

2.5.2 Man zeige:

- Die Menge der Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} bildet unter der gliedweisen Addition einen \mathbb{Q} -Vektorraum.
- Der Teilraum der konvergenten Folgen ist ein echter Unterraum.

³⁷⁾ Wir verwenden hier die allgemeine Potenz im Vorgriff.

2.8 Tipps zu den Übungsaufgaben

Tipps zu Abschnitt 2.1

2.1.1 Machen Sie sich die Aussagen zunächst an einem konkreten Beispiel klar. Die exakte Begründung unter Verwendung der formalen Definitionen „Teilfolge“ und „Umordnung“ ist dann etwas technisch, aber nicht wirklich schwierig.

Tipps zu Abschnitt 2.2

2.2.1 Hier gilt das, was als Tipp zu Aufgabe 1.9.3 gesagt wurde.

2.2.2 Bei dieser Aufgabe ist es nützlich, die Aussage $x_n \rightarrow x_0$ so zu interpretieren: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \mid |x_n - x_0| > \varepsilon\}$ endlich.

2.2.3

- Formen Sie die Summe zunächst mit der Formel $1+q+\dots+q^n = (1-q^{n+1})/(1-q)$ um.
- Teilen Sie Zähler und Nenner durch n^k .
- Falls Sie den Verdacht haben, dass diese Folge *nicht* konvergiert, so sollten Sie sich an eine im Buch bewiesene Eigenschaft konvergenter Folgen erinnern.
- Kombinieren Sie bekannte Rechenregeln für konvergente Reihen.

2.2.5 Zum „a“-Teil werden Sie keinen Tipp benötigen. Für den „b“-Teil nimmt man an, dass (a_n) *nicht* gegen a konvergiert: Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass für unendlich viele n die Ungleichung $|a_n - a| > \varepsilon$ gilt. Nun sollte eine Teilfolge leicht zu finden sein, bei der keine Teilfolge gegen a konvergent ist.

2.2.6 Diese Aufgabe ist vergleichsweise leicht, deswegen gibt es keine Tipps.

Tipps zu Abschnitt 2.3

2.3.1 Bei dieser Aufgabe sind nur die definierenden Eigenschaften von \sup und \inf anzuwenden. Der Beweis des ersten Aufgabenteils könnte so losgehen:

Zunächst bemerkt man, dass mit A auch $-A$ beschränkt ist, deswegen existieren $\sup -A$ und $\inf A$. Um zu zeigen, dass beide Zahlen gleich sind, setzte $x_0 := \inf A$ und beweise, dass x_0 alle Eigenschaften hat, die das Supremum von $-A$ haben sollte. Dabei spielt das Rechnen mit Ungleichungen eine Rolle. Schlussbemerkung: Ein Infimum ist, wenn es existiert, eindeutig bestimmt.

2.3.2 Wählen Sie irgendeine reelle Zahl x_0 , die nicht in $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$ liegt. (Warum geht das?) Begründen Sie, dass es eine Folge in $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$ gibt, die – als reelle Folge – gegen x_0 geht. Warum ist das eine in $\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q}$ nicht konvergente Cauchy-Folge?

2.3.3 Die Aufgabenstellung enthält schon einen Tipp.

2.3.4 Wenn Ihnen diese Aufgabe Schwierigkeiten macht, blättern Sie noch einmal zur Definition des Supremums und des Infimums in allgemeinen geordneten Räumen zurück (Definition 2.3.4).

2.3.5 Wie weit ist es von a_n bis nach a_{n+k} ? Doch höchstens so weit wie von a_n nach a_{n+1} , plus der Abstand von a_{n+1} nach a_{n+2} plus \dots plus der Abstand von a_{n+k-1} nach a_{n+k} .

2.3.6 Auch hier sollte man die allgemeine Definition von \sup und \inf kennen (Definition 2.3.4).

Tipps zu Abschnitt 2.4

2.4.1 Behandeln Sie die Fälle $|x| < 1$, $|x| > 1$, $x = 1$, $x = -1$ getrennt.

2.4.2 Teilen Sie $a_1 + a_2 + \dots$ in geeignete Blöcke, die sich jeweils durch $2^k a_{2^k}$ abschätzen lassen.

2.4.3 Schauen Sie sich die Partialsummen zur Originalreihe und zur Reihe mit den halbierten Werten an. Was passiert, wenn man die addiert?

2.4.4 Da gibt es in der Aufgabe schon eine Anleitung.

Tipps zu Abschnitt 2.5

2.5.1 Die Abbildung ist *nicht* surjektiv. Als Gegenbeispiel müssen Sie eine Nullfolge finden, die nicht von der Form (a_n/n) mit einer beschränkten Folge (a_n) ist, die also langsamer fällt als $1/n$.

2.5.2 Diese Aussagen sind unter Verwendung der schon bewiesenen Ergebnisse leicht zu beweisen.

Analysis Band 1

Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule
zur Uni. Von Studenten mitentwickelt

Behrends, E.

2015, XIV, 371 S. 80 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-07122-6