2 Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung)

Kennzeichen der *(im letzten Kapitel behandelten)* **linearen** Verzinsung ist es, dass **innerhalb** der betrachteten Verzinsungsspanne **keinerlei Zinsverrechnungen** vorgenommen werden. Vereinbart man lineare Verzinsung, so werden erst am Ende des Betrachtungszeitraums (vgl. Konvention 1.2.33) das Kapital und die entstandenen Zinsen zusammengefasst bzw. verrechnet.

Ein anderes Prinzip liegt der **Zinseszinsrechnung** *(oder exponentiellen Verzinsung)* zugrunde:

Innerhalb der Kapitalüberlassungsfrist existieren **ein** oder **mehrere Zinsverrechnungs-** oder **Zinszuschlagtermine**, in denen die bis dahin entstandenen Zinsen dem Kapital hinzugefügt *(Zinszuschlag, Zinsverrechnung)* werden und mit ihm zusammen das weiterhin zu verzinsende Kapital bilden. Dies Verfahren – nach § 248 Absatz 2 BGB für die Institutionen des Bank- und Kreditwesens ausdrücklich zugelassen – besitzt **Grundlagencharakter** für Planungen und Bewertungen in den Bereichen Investition, Finanzierung, Versicherungswesen sowie für kredittheoretische Ansätze der Volkswirtschaftslehre.

Sind sowohl Anfangs- als auch Endzeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls Zinszuschlagtermine, so spricht man von **reiner Zinseszinsrechnung**, andernfalls von **gemischter Zinseszinsrechnung**. Wir werden zunächst die reine Zinseszinsrechnung behandeln und die gemischte Zinseszinsrechnung – eine Kombination aus einfacher und Zinseszinsrechnung – in einem späteren Abschnitt *(Kapitel 2.3.3)* darstellen.

2.1 Grundlagen der Zinseszinsrechnung *(Reine Zinseszinsrechnung)*

Wir betrachten ein im Zeitpunkt $t = 0$ *(nach Voraussetzung Beginn einer Zinsperiode)* vorhandenes Kapital K_0 und fragen, wie sich K_0 im Zeitablauf entwickelt, wenn **nach**[1] jeder Zinsperiode *(z.B. nach jedem Monat oder jedem Jahr)* ein Zinszuschlag *(oder: eine Zinsverrechnung)* in Höhe von $i = p\%$ des zu Beginn der vorausgegangenen Zinsperiode vorhandenen Kapitals erfolgt. Gesucht ist das **Endkapital K_n**, das sich aus K_0 nach insgesamt n Zinsperioden ergibt, siehe Abb. 2.1.1:

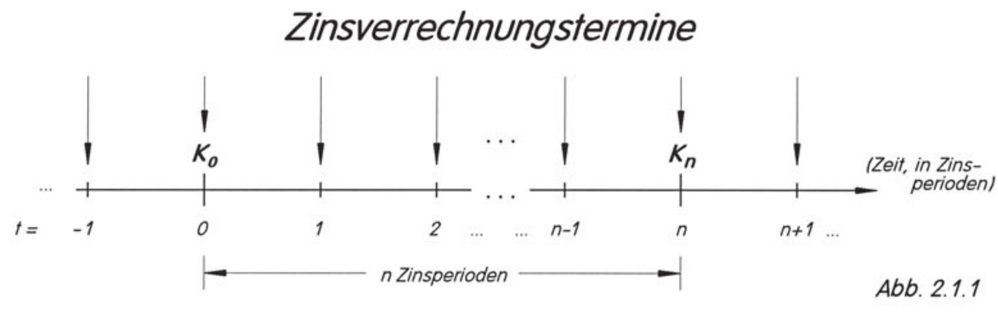

Abb. 2.1.1

Die Entwicklung des Kapitals erfolgt sukzessive mit Hilfe der linearen Zinsrechnung, wobei die Teil-Laufzeit jeweils eine volle Zinsperiode bis zum nächsten Zinsverrechnungstermin beträgt (d.h. $n = 1$). Am Ende der 1. Zinsperiode beträgt das Endkapital K_1 nach (1.2.12): $K_1 = K_0(1+i)$.

Da nun K_1 das zu verzinsende Kapital ist, gilt für das sich nach einer weiteren Zinsperiode ergebende Kapital K_2 zum Ende der 2. Zinsperiode:

[1] Es wird *ausschließlich nachschüssiger* Zinszuschlag unterstellt. Jeder vorschüssige Verzinsungsprozess (vorschüssiger Periodenzins i_v) kann i.a. durch die Ermittlung des äquivalenten nachschüssigen Periodenzinssatzes gemäß (1.2.72) auf einen nachschüssigen Zinsvorgang zurückgeführt werden.

J. Tietze, *Einführung in die Finanzmathematik,* DOI 10.1007/978-3-658-07157-8_2,

$$K_2 = K_1(1+i) = \underbrace{(K_0(1+i))}_{=K_1}(1+i) = K_0(1+i)^2.$$

Analog erhält man am Ende der dritten Zinsperiode den Wert für K_3:

$$K_3 = K_2(1+i) = \underbrace{(K_0(1+i)^2)}_{=K_2}(1+i) = K_0(1+i)^3, \quad \text{usw.}$$

Allgemein erhält man somit am Ende der n-ten Zinsperiode seit der Wertstellung von K_0:

(2.1.2) $$K_n = K_0(1+i)^n.$$

Führt man für den Aufzinsungsfaktor „1 + i" die übliche Abkürzung „q" ein, so ergeben sich aus (2.1.2) wegen $i = \frac{p}{100}$ drei äquivalente Schreibweisen der grundlegenden

Zinseszinsformel (exponentielle Verzinsung)

(2.1.3) $$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{K_n = K_0(1+i)^n} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

mit: K_0: Anfangskapital *(Wertstellung zu Beginn der ersten Zinsperiode)*
K_n: Endkapital *(nach n Zinsperioden)*
$i = p\,\% = \frac{p}{100}$: Periodenzinssatz, Periodenzinsrate *(p: Periodenzinsfuß)*
$q = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$: Periodenzinsfaktor, **Aufzinsungsfaktor** [2]
n : zeitlicher Abstand *(in Zinsperioden)* zwischen K_0 und K_n .

Beispiel 2.1.4:

i) Ein Anfangskapital von 200.000,-- € *(= K_0)* wächst bei 10% p.a. und jährlicher Zinsverrechnung in 9 Jahren zu folgendem Endkapital K_n an:

$$K_n = 200.000 \cdot 1{,}10^9 = 471.589{,}54 \text{ €}$$ [3].

Die entsprechende **Kontostaffel** lautet *(mit identischem Kontoendstand)*:

Jahr	Kontostand zu Jahresbeginn	Zinsen (10% p.a.) Ende des Jahres	Kontostand zum Ende des Jahres	
1	200.000,--	20.000,--	220.000,--	
2	220.000,--	22.000,--	242.000,--	
3	242.000,--	24.200,--	266.200,--	
4	266.200,--	26.620,--	292.820,--	
5	292.820,--	29.828,--	322.102,--	
6	322.102,--	32.210,20	354.312,20	
7	354.312,20	35.431,22	389.743,42	
8	389.743,42	38.974,34	428.717,76	
9	428.717,76	42.871,78	**471.589,54**	*(=200.000 · 1,10⁹)*
10	**471.589,54**			

[2] Man beachte die Analogien zu den entsprechenden Begriffen in der Prozentrechnung, vgl. (1.1.22).

[3] Die Rechnungen erfolgen mit einem elektronischen Taschenrechner. Die Endresultate werden sinnvoll gerundet *(hier z.B. auf zwei Nachkommastellen)*.

ii) Dasselbe Anfangskapital von 200.000,-- € wächst bei vierteljährlicher Zinsverrechnung von 2,5% p.Q. in 9 Jahren *(= 36 Zinsperioden)* an auf

$$K_n = 200.000 \cdot 1{,}025^{36} = 486.507{,}06 \text{ €}.$$

***(Zum Vergleich:** In beiden Fällen hätte **lineare** Verzinsung mit i = 10% p.a. (≙ 2,5% p.m. bei linearer Verzinsung) in 9 Jahren zu einem Endwert von (nur)*

$$200.000(1 + 0{,}10 \cdot 9) = 200.000(1 + 0{,}025 \cdot 36) = 380.000 \text{ €} \qquad \textit{geführt.}$$

In Abb. 2.1.5 sind *(bei vorgegebenem Anfangskapital K_0 sowie unverändertem Periodenzinssatz i)* die Endwerte K_n in Abhängigkeit von der Laufzeit n für lineare sowie für Zinseszinsen dargestellt.

Bei linearer Verzinsung entwickelt sich K_n **linear** mit der Laufzeit n, während K_n bei **Zinses-Zinsen exponentiell** wächst und für großes n zu schnell anwachsenden Endwerten führt, vgl. das folgende Beispiel 2.1.6.

Wendet man die Zinseszinsformel *(zunächst formal)* auf gebrochene Laufzeiten an *(vgl. Kap. 2.3.1)*, so zeigt sich *(vgl. Abb. 2.1.5)*, dass nur innerhalb der ersten Zinsperiode das Endkapital K_n bei linearer Verzinsung höher ausfällt als bei *(formaler)* Anwendung der Zinseszinsformel.

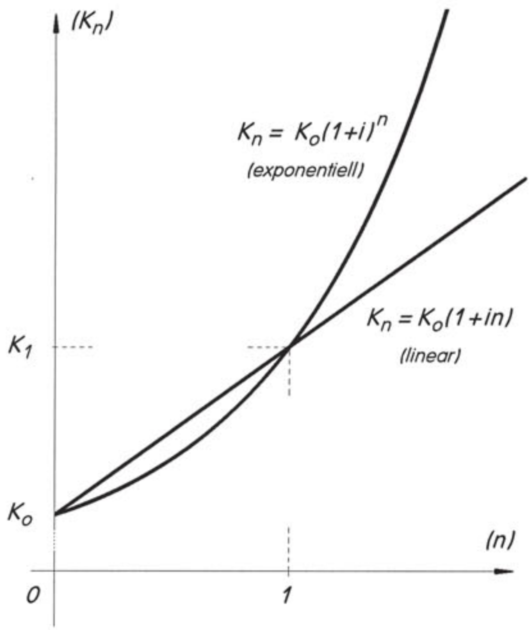

Abb. 2.1.5

Beispiel 2.1.6:

Wie eben schon angedeutet, kann bei Zinseszinsvorgängen der Endwert K_n sehr schnell anwachsen auf Beträge, die sich dem menschlichen Vorstellungsvermögen entziehen (und als unrealistisch gelten müssen):

i) Der berühmte Cent, vor 2000 Jahren zu 4% p.a. Zinseszinsen angelegt, besitzt heute einen *(rechnerischen*[4]*)* Endwert K_n in Höhe von

(2.1.7) $$K_n = 0{,}01 \cdot 1{,}04^{2000} \approx 1{,}1659 \cdot 10^{32} \text{ €}.$$

(d.h. einen 33-stelligen €-Betrag)

Um eine Vorstellung von diesem Betrag zu erhalten, rechnen wir ihn in Gold *(zu 30.000 €/kg)* um und benutzen als Einheit „1 goldene Erdkugel".

[4] Bankübliche Gepflogenheiten wie Nichtberücksichtigung von Zinsen unterhalb eines Cent o.ä. bleiben hier außer Betracht.

Mit den Daten: Erdradius: $r = 6.370$ km, Dichte von Gold: $\rho = 19{,}3$ kg/dm^3 Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, $\pi \approx 3{,}14159$

erhalten wir als Masse m_E einer goldenen Erdkugel:

$$m_E = \frac{4}{3}\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^7)^3 \cdot 19{,}3 \approx 2{,}0896 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

und daraus nach Multiplikation mit dem Goldpreis den **Wert W_E einer goldenen Erdkugel:**

$$W_E = 6{,}2688 \cdot 10^{29} \quad €.$$

Dividieren wir den Endwert K_n (2.1.7) unseres Cent durch den Wert einer goldenen Erdkugel, so erhalten wir 186, d.h. der eine Cent stellt – bei 4% p.a. Zinseszinsen – nach 2000 Jahren einen Endwert dar, der dem Gegenwert von 186 goldenen Erdkugeln entspricht.

(Wie empfindlich K_n auf die Höhe des Zinssatzes reagiert, zeigen folgende – auf gleiche Weise ermittelte – Vergleichswerte:

Bei 4,5% p.a. ist K_n äquivalent zu rd. 2,7 Millionen goldenen Erdkugeln, und bei 5% p.a. sind es bereits 38 Milliarden goldene Erdkugeln.

Andererseits wächst bei 1% p.a. der Cent nur auf einen Gegenwert von ca. 146 kg Goldes, und bei 0,5% p.a. (siehe allg. Zinsniveau in den Jahren 2013ff. oder als Kreditzinssatz gewisser langfristiger staatlicher Darlehen durchaus vorkommend) erhält nach 2000 Jahren der Cent-Anleger-Erbe nur noch einen bescheidenen Mini-Goldbarren von ca. 7,17g (d.h. ca. 215 €) als äquivalenten Endwert.)

ii) Noch atemberaubender als die in i) veranschaulichte Zunahme des Endwerts K_n kann exponentielles Wachstum werden, wenn man sich im Zeitablauf die **Geschwindigkeit** *(z.B. in €/Jahr)* des Wertzuwachses vergegenwärtigt *(die Grundidee des folgenden Beispiels stammt aus Altrogge [Alt1] 63 ff)*:

Während *(vgl. (2.1.3))*

(2.1.8) $$K(t) = K_0 \cdot (1+i)^t$$ *(i: Jahreszinssatz; t: Laufzeit in Jahren)*

den **Endwert** K(t) des aufgezinsten Anfangskapitals nach t Zinsperioden darstellt, beschreibt die **erste Ableitung K′(t)** *(näherungsweise)* die Änderung von K(t), wenn t um eine Zeiteinheit zunimmt, d.h. die **Wachstumsgeschwindigkeit** *(in €/Jahr)* **des Endwertes** K(t) [5].

Es gilt *(siehe Ableitungsregeln der Differentialrechnung)* [6]:

(2.1.9) $$K'(t) = K_0 \cdot \ln(1+i) \cdot (1+i)^t = \ln(1+i) \cdot K(t)$$

Für Zinssätze zwischen 3% und 4% p.a. sei wieder der berühmte Cent, angelegt vor 2000 Jahren betrachtet.

Um eine *(etwas drastische)* Vorstellung von der Wachstums**geschwindigkeit** K′(t) des aufgezinsten Kapitals zu erhalten, stellen wir uns vor, das nach (2.1.8) ermittelte Endkapital K(t) sei in Form eines Stapels von 500-€-Scheinen gegeben. Wenn wir annehmen, jeder Schein sei ca. 0,1 mm dick, so machen 5.000,-- € eine Geldstapelhöhe von ca. 1 mm aus.

Wie hoch müsste der jährliche Kapitalzuwachs K′(t) ausfallen, damit dieser Stapel mit Lichtgeschwindigkeit *(≈ 300.000 km/sec)* anwächst?

---

5 siehe etwa [Tie3] Kap. 6.1.2.

6 siehe etwa [Tie3] Kap. 5.2.5 (11).

Dazu rechnen wir die in einem Jahr vom Licht zurückgelegte Strecke s aus:

$$s = 300.000 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \cdot 365 \frac{\text{Tage}}{\text{Jahr}} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{Tag}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot 60 \frac{\text{sec}}{\text{min}} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \frac{\text{km}}{\text{Jahr}}$$

d.h. *(wegen 1 km = 10^6 mm)*:

$$s = 9{,}46 \cdot 10^{18} \frac{\text{mm}}{\text{Jahr}} .$$

Diese Strecke s , dargestellt als Höhe eines Geldstapels aus 500,-- €-Scheinen, repräsentiert somit einen Wert von $9{,}46 \cdot 10^{18}$ mm $\cdot$ 5.000 $\frac{€}{\text{mm}}$ = $4{,}73 \cdot 10^{22}$ €, anders ausgedrückt:

Ein Lichtstrahl durchfährt in einem Jahr einen 500-€-Stapel im Gegenwert von $4{,}73 \cdot 10^{22}$ €, oder:

> Wenn ein Geldstapel aus 500-€-Scheinen mit Lichtgeschwindigkeit wächst, so nimmt der Wert des Stapels pro Jahr um **$4{,}73 \cdot 10^{22}$ € zu.**

Wir können nun danach fragen, mit welchem **Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit** der **Endwert** K(t) des Cent nach 2000 Jahren **zunimmt:**

Aus dem jährlichen Kapitalzuwachs (2.1.9) folgt etwa für i = 3% p.a.

$$K'(2000) = 0{,}01 \cdot \ln 1{,}03 \cdot (1{,}03)^{2000} = 1{,}40 \cdot 10^{22} \frac{€}{\text{Jahr}},$$

d.h. der *(aus einem vor 2000 Jahren angelegten Cent resultierende)* Geldstapel wächst *(bei 3% p.a.)* mit knapp 0,3-facher Lichtgeschwindigkeit, also immerhin noch mit einer Geschwindigkeit von ca. 88.600 km/sec. Dieser Vergleichswert nimmt mit steigendem Anlagezins dramatisch zu: Bei 3,1% p.a. wächst der 500-€-Stapel nach 2000 Jahren mit etwas mehr als doppelter Lichtgeschwindigkeit, bei 3,5% p.a. mit 5525-facher Lichtgeschwindigkeit und bei 4% p.a. mit einer Geschwindigkeit, die fast 100 Millionen mal so groß ist wie die des Lichtes. Und bereits bei 2,22% p.a. wächst unser 500-€-Stapel mit mehr als Stadt-Geschwindigkeit *(50 km/h)*.

Andererseits wächst bei 1% p.a. der Stapel nach 2000 Jahren „nur noch" um ca. 8,7 mm pro Jahr und bei 0,5% p.a. um kaum noch messbare 0,0002 mm/Jahr *(d.h. um ca. 1,07 €/Jahr)*.

iii) Wählt man *(anstelle von 2000 Jahren)* realistische, wenn auch relativ lange Anlagezeiträume, z.B. 50 Jahre, so ergibt sich folgendes Bild *(der Anlagebetrag K_0 betrage jetzt abweichend vom vorhergehenden 1,-- € !)*, vgl. Tab. 2.1.10 *(bzw. Abb. 2.1.11)*:

Tab. 2.1.10	Anlagebetrag: 1,-- € ; Laufzeit: 50 Jahre	
Zinssatz i *(p.a.)*	Endwert K(50)	Wachstumsgeschwindigkeit K′(50) d. Endwerts
0,5 %	1,28 €	0,006 €/Jahr
1 %	1,64 €	0,016 €/Jahr
3 %	4,38 €	0,13 €/Jahr
4 %	7,11 €	0,28 €/Jahr
5 %	11,47 €	0,56 €/Jahr
10 %	117,39 €	11,19 €/Jahr
15 %	1.083,66 €	115,45 €/Jahr
20 %	9.100,44 €	1.659,21 €/Jahr

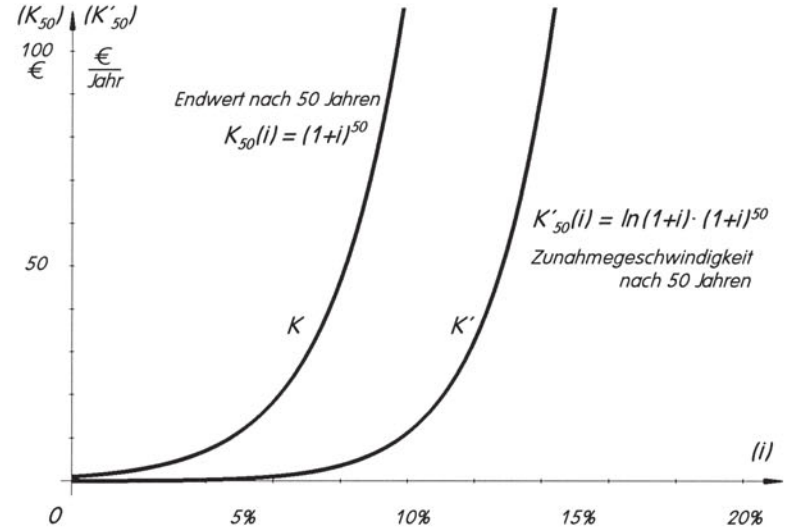

Abb. 2.1.11

Die vorangegangenen *(bewusst ausführlichen)* Überlegungen zum exponentiellen Wachstum nach dem Zinseszinsprinzip zeigen:

- Die tatsächliche *(oder auch nur fiktive)* Entwicklung von (Kapital-) Beständen bei „ungebremstem" exponentiellem Wachstum nach dem Gesetz $K_n = K_0(1 + i)^n$ führt bei langen Zeiträumen selbst bei maßvollen Zinssätzen *(wie 3% oder 4% p.a.)* zu absurden und dem menschlichen Verständnis nicht mehr zugänglichen Endwerten bzw. Kapitalwachstumsgeschwindigkeiten.
- Nur bei vergleichsweise kurzen Laufzeiten oder sehr kleinen Zinssätzen kann ein derartiges exponentielles Wachstum als mit der Realität vereinbar angesehen werden.

Die exponentielle Form der Zinseszinsformel sowie die Ausführungen des letzten Beispiels verdeutlichen, dass zum erfolgreichen Umgang mit exponentieller Verzinsung die **Potenzrechnung** und die **Logarithmenrechnung** als rechentechnische Grundlagen unverzichtbar sind. Zur Erinnerung werden nachfolgend die wesentlichen Grundtatsachen kompakt zusammengefasst [7]:

Satz 2.1.12: (Potenzgesetze)

Unter Beachtung der Definitionen

Def. (1) $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} \quad (n \in \mathbb{N})\ ; \quad a^1 := a\ ;$

Def. (2) $a^{-n} := \dfrac{1}{a^n}\ ; \quad a^0 := 1\ ;$

Def. (3) $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N})\ ;$

Def. (4) $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad (n \in \mathbb{N}\ ;\ \ m \in \mathbb{Z})$

gilt für Potenzen mit **positiver Basis** $(a, b > 0)$ und beliebigen **reellen Exponenten** $(x, y \in \mathbb{R})$:

[7] Nähere Ausführungen findet man z.B. in [Tie3] Kap. 1.2 – Algebra-Brückenkurs

Potenzgesetze:

(P1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(P2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(P3) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

(P4) $(ab)^x = a^x b^x$

(P5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Vereinbarungen:

$ab^n := a(b^n)$

$-a^n := -(a^n)$

$a^{b^c} := a^{(b^c)}$

Satz 2.1.13: (Logarithmengesetze)

Def. (1) $a^u = x \quad \Leftrightarrow \quad u = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}^+$; $u \in \mathbb{R}$

Def. (2) $\log_{10} x =: \lg x$ *(dekadischer Logarithmus)*
$\log_e x =: \ln x$ *(natürlicher Logarithmus, e = Euler'sche Zahl ≈ 2,7182818...)*

Für alle $x, y > 0$, $a > 0$ $(\neq 1)$ gilt:

(L1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Vereinbarung:
$log_a x^r := log_a(x^r)$
$(\neq (log\, x)^r\, !)$

(L2) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(L3) $\log_a (x^r) = r \cdot \log_a x$ $(r \in \mathbb{R})$

Insbesondere gilt *(wegen Def. (1))*:

$\begin{array}{l} \log_a a^u = u \\ a^{\log_a x} = x \end{array}$ d.h. $\begin{array}{l} \lg 10^u = u \\ 10^{\lg x} = x \end{array}$ sowie $\begin{array}{l} \ln e^u = u \\ e^{\ln x} = x \end{array}$.

Außerdem gilt:

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\lg x}{\lg a}$

Beispiele: $\ln e = 1$; $\lg 10 = 1$; $\ln 1 = 0$; $\lg 1 = 0$

Je nachdem, welche der vier Variablen i *(bzw. q)*, n , K_0 , K_n in der Zinseszinsformel (2.1.3) *(bei gleichzeitiger Kenntnis der übrigen drei Variablen)* gesucht ist, unterscheidet man die **vier grundständigen Problemtypen** *(bei **reiner** Zinseszinsrechnung und Verzinsung eines **Einzel**betrages K_0)*:

Problemtyp 1: Endwert K_n gesucht

Man erhält K_n durch **Aufzinsen** des Anfangskapitals K_0 mit dem **Aufzinsungsfaktor q^n** gemäß der Standard-Zinseszinsformel (2.1.3)

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n} \qquad (q = 1 + i) \tag{2.1.3}$$

(vgl. Beispiele 2.1.4/2.1.6)

Problemtyp 2: Anfangskapital K_0 gesucht,

das bei einem Periodenzinssatz i nach n Zinsperioden zum Endwert K_n führt. Aus (2.1.3) folgt durch Umformung:

$$\boxed{K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{K_0 = K_n \cdot q^{-n}} \tag{2.1.14}$$

Man sagt, der Anfangswert K_0 *(auch **Barwert** oder Gegenwartswert)* des *(später fälligen)* Kapitals K_n ergebe sich durch **Abzinsen** *(oder Diskontieren)* **des Endwerts** K_n mit dem **Abzinsungsfaktor** $\frac{1}{q^n}$ (bzw. q^{-n}). [8]

Beispiel 2.1.15:

Mit welchem heute zahlbaren Betrag kann man eine in 8 Jahren fällige Schuld in Höhe von 50.000 € ablösen, wenn vierteljährlicher Zinszuschlag und i = 3% p.Q. unterstellt werden?

Nach (2.1.3) gilt:

$$K_n = 50.000 = K_0 \cdot 1{,}03^{32} \Rightarrow K_0 = 50.000 \cdot 1{,}03^{-32} = 19.416{,}85 \text{ €}.$$

Würde man umgekehrt den ermittelten Barwert von 19.416,85 € wiederum zu 3% p.Q. Zinseszinsen anlegen, resultierte nach 8 Jahren ein Endwert von 50.000,-- €.

Das Beispiel zeigt, dass der **Barwert** eines zukünftig fälligen Betrages desto **kleiner** ist, je **höher** der **Zinssatz** und je **später** der Betrag fällig ist.

So ergäbe sich etwa für i = 5% p.Q. und bei einer Laufzeit von 50 Jahren im vorliegenden Fall ein Barwert von: $50.000 \cdot 1{,}05^{-200} = 2{,}89$ € ! *(d.h. – etwas salopp ausgedrückt – : Bei 5% p.Q. Zinseszinsen sind 50.000,-- €, die in 50 Jahren gezahlt werden, heute nur 2,89 € wert.)*

---

[8] Aufzinsungsfaktoren q^n sowie Abzinsungsfaktoren q^{-n} liegen tabelliert vor, vgl. z.B. [Däu]. Allerdings lassen sich mit den derzeit verfügbaren elektronischen Taschenrechnern sämtliche Formeln der Finanzmathematik übersichtlicher, schneller und genauer als mit Tabellen berechnen.

Bemerkung 2.1.16:

i) Wie schon im Zusammenhang mit der linearen Verzinsung erläutert (vgl. etwa Abb. 1.2.25), liefert das Zinseszinsgesetz (2.1.3) die Möglichkeit, Zahlungen in die ***Zukunft zu transformieren („aufzinsen")*** *oder spätere Zahlungen in die* ***Vergangenheit zu transformieren („abzinsen")****, vgl. Abb. 2.1.17:*

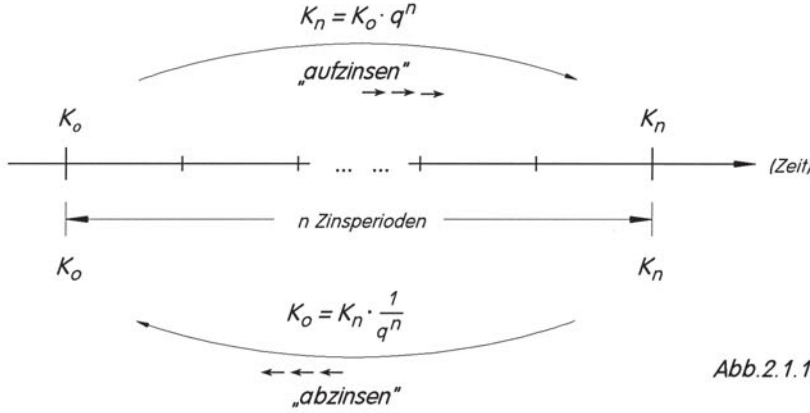

Abb.2.1.17

ii) Während dem (aus K_0 gewonnenen) aufgezinsten Endwert K_n eine reale eigenständige Bedeutung zukommt (etwa: Anlage von K_0 auf einem Konto und abwarten ...), lässt sich der (abgezinste) Barwert K_0 nicht direkt, sondern nur durch einen Umweg über den später erzielbaren Endwert K_n deuten, vgl. auch Kap. 1.2.1, Fn. 7.

Problemtyp 3: Periodenzinssatz i gesucht,

der ein Anfangskapital K_0 in n Zinsperioden zu einem Endkapital K_n anwachsen lässt. Aus (2.1.3) folgt durch Umformung:

(2.1.18) $$K_n = K_0 \cdot q^n \quad \Leftrightarrow \quad q^n = \frac{K_n}{K_0} \quad \Leftrightarrow^{9} \quad \boxed{q = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}}$$

Aus dem Zahlenwert von q ergibt sich wegen $1+i = q$ sofort der gesuchte Zinssatz: $i = q-1$.

Beispiel 2.1.19: Der Kontostand eines Festgeldkontos beträgt am 01.01.05, 0^{00} Uhr, 40.000,-- €. Die Konditionen sehen monatlichen Zinszuschlag vor. Mit welchem gleichbleibenden Monatszins i wird die Festgeldanlage verzinst, wenn sich am 01.01.08, 0^{00} Uhr, ein Kontostand von 50.000,-- € ergibt ? – Nach (2.1.3) gilt:

$$50.000 = 40.000 \cdot q^{36} \quad \Rightarrow \quad q = 1{,}25^{\frac{1}{36}} = 1{,}006218 \quad \Rightarrow \quad i \approx 0{,}62\% \text{ p.M.}$$

[9] Aus ökonomischen Gründen kommt nur die positive Lösung dieser Gleichung in Betracht. Zur Lösungstechnik *(auch im folgenden)* siehe etwa [Tie3] Kap. 1.2 Algebra–Brückenkurs

Problemtyp 4: Laufzeit n *(in Zinsperioden)* gesucht,

in der bei einem Periodenzinssatz von p % ein Anfangskapital K_0 zum Endkapital K_n anwächst. Aus (2.1.3) folgt durch Umformung:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad \Leftrightarrow \quad q^n = \frac{K_n}{K_0} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{(log, Basis beliebig)} \quad n \cdot \log q = \log \frac{K_n}{K_0} \quad \Leftrightarrow$$

(2.1.20)
$$\boxed{n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q} = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log q}}$$

Beispiel 2.1.21: Innerhalb welcher Zeitspanne wächst bei 6% p.H. *(pro Halbjahr)* Zinseszinsen ein Kapital von 10.000,-- € auf 18.000,-- € an ? – Aus (2.1.3) folgt:

$$K_n = 18.000 = 10.000 \cdot 1{,}06^n \quad (n = \text{Anzahl der Halbjahre})$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}06^n = 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln 1{,}8}{\ln 1{,}06} \approx 10{,}09 \text{ Halbjahre.}$$

Der nicht-ganzzahlige Wert von n deutet an, dass der Endwert 18.000,-- € zwischen dem 10. und 11. Zinszuschlagtermin erreicht wird, sofern ein „außerordentlicher" Zinszuschlagtermin eingeschoben wird. Der genaue Zeitpunkt dieses außerordentlichen Termins könnte z.B. mit Hilfe der gemischten Zinseszinsrechnung[10] ermittelt werden, vgl. Kap. 2.3.3. In diesem Fall ergibt sich der gesuchte Zeitpunkt durch die Überlegung, wieviele Tage *(= t)* das sich nach 10 Halbjahren angesammelte Kapital K_{10} *(=* $10.000 \cdot 1{,}06^{10} = 17.908{,}48$ *€)* noch zusätzlich **linear** angelegt werden muss, damit es auf 18.000,-- € anwächst:

$$17.908{,}48(1 + 0{,}06 \cdot \frac{t}{180}) \stackrel{!}{=} 18.000 \quad \Rightarrow \quad t = 15{,}33 \approx 16 \text{ Tage}$$

Bemerkung 2.1.22:

i) Kennzeichen finanzmathematischer Planungen ist die (nahezu ausschließliche) Verwendung der Zinseszinsmethode. Lediglich bei einfachen kaufmännischen Zinsberechnungen (charakteristisch: kurze Laufzeiten, i.a. kürzer als ein Jahr) sowie für die Wechseldiskontierung wird die lineare Zinsrechnung verwendet. Eine Kombination aus Zinseszinsrechnung und linearer Verzinsung („gemischte Verzinsung", vgl. Kap. 2.3.3) wurde früher im Zusammenhang mit der Effektivzinsermittlung von Verbraucher-Krediten nach der bis 31.08.2000 in Deutschland vorgeschriebenen „360-Tage-Methode" angewendet, vgl. Kap. 4.3 bzw. Kap. 5.3.1.1. Zur Zinstage-Ermittlung siehe auch Bem. 1.2.8.

*Die **folgenden** finanzmathematischen Berechnungen benutzen – wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt – stets die **Zinseszinsmethode**.*

[10] Eine andere Methode zur Überbrückung unterjähriger Laufzeiten ist die internationale ICMA-Methode *(früher: ISMA- oder AIBD-Methode)*, vgl. Kap. 3.8.2 bzw. Kap. 4.3 bzw. Kap. 5.3.

http://www.springer.com/978-3-658-07156-1

Einführung in die Finanzmathematik
Klassische Verfahren und neuere Entwicklungen:
Effektivzins- und Renditeberechnung,
Investitionsrechnung, Derivative Finanzinstrumente
Tietze, J.
2015, XII, 453 S. 165 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-07156-1