

## 2 Die Division mit Rest und die Teilbarkeitsrelation

Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.  
Euklid, Die Elemente VII. Buch, Definition 2

*Vorbemerkung:* Einige für das folgende wichtige Begriffsbildungen und Voraussetzungen sind im Anhang zusammengestellt; insbesondere in Anhang 8.1: Allgemeine Beweisprinzipien und Beweisverfahren, Anhang 8.2: Axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen, Anhang 8.3: Mengentheoretische Grundbegriffe

### 2.1 Die Division mit Rest

Fundamental für die gesamte Zahlentheorie ist der

#### **Satz 2.1 (Division mit Rest):**

Zu je zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  (mit  $b \neq 0$ ) gibt es stets eindeutig bestimmte nichtnegative ganze Zahlen  $q$  und  $r$  mit der Eigenschaft

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b$$

*Bemerkungen:*

- Der Satz drückt (etwas formaler aufgeschrieben) den Sachverhalt der aus dem Grundschulunterricht bekannten Division mit Rest aus. Wenn man eine natürliche Zahl  $a$  durch eine natürliche Zahl  $b$  dividiert, dann bezeichnet man die Vielfachheit, mit der  $b$  „ganz“ in  $a$  aufgeht, als den *Quotienten*  $q$ . Bei dieser Division bleibt unter Umständen ein *Rest*  $r$  übrig, wie z.B. im Falle  $17 = 3 \cdot 5 + 2$  ( $a = 17$ ;  $b = 5$ ;  $q = 3$ ;  $r = 2$ ). Ist der Rest gleich Null, wie etwa im Falle  $24 = 4 \cdot 6 + 0$ , dann sagt man auch, dass die Zahl  $b$  die Zahl  $a$  (ohne Rest) *teilt* – man vergleiche dazu die Ausführungen zur Teilbarkeitsrelation weiter unten.
- Die Bedeutung des Satzes für die gesamte Schulmathematik – und darüber hinaus – kann kaum überschätzt werden (nicht zuletzt deswegen werden im Folgenden auch zwei Beweise gegeben); die Division mit Rest tritt später im Zusammenhang mit der Division von Polynomen wieder auf; sie spielt in der gesamten Algebra (Ringtheorie) eine große Rolle.

Im Folgenden werden zwei Beweise für den Satz angegeben; der erste basiert auf dem Prinzip des kleinsten Elements, der zweite auf dem Verfahren der vollständigen Induktion. Auf diese Weise soll auch die Austauschbarkeit der beiden Beweisprinzipien an einem konkreten Beispiel demonstriert werden.

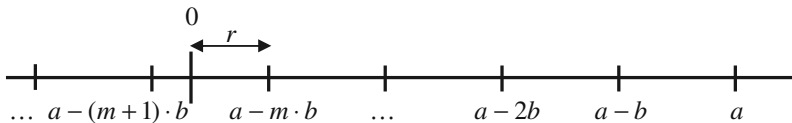
*Erster Beweis des Satzes von der Division mit Rest* (mit dem Prinzip des kleinsten Elements):

Zunächst zur *Existenzaussage* (d.h. zu dem Teil des Satzes, der besagt: „Es gibt ...“). Wir betrachten die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{N}_0 : x = a - k \cdot b \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Die Menge  $A$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$  (denn mit  $k = 0$  ist z.B.  $a \in A$ ); sie enthält also ein kleinstes Element – es sei mit  $r$  bezeichnet.

Dieses  $r$  entsteht, anschaulich gesprochen, dadurch, dass man von  $a$  alle Vielfachen von  $b$  abzieht:  $a, a - b, a - 2b, a - 3b, a - 4b, \dots$ . Die entstehende Differenz wird dabei immer kleiner, und irgendwann auch einmal negativ;  $r$  ist die letzte (kleinste) nichtnegative Zahl unter diesen Differenzen.



**Abb. 2.1:** kleinstes Element

Notwendigerweise gilt  $r < b$ , denn sonst wäre  $r' := r - b$  eine noch kleinere zu  $A$  gehörende Zahl (im Widerspruch zu der Annahme, dass  $r$  das kleinste Element von  $A$  sei). Es gilt also  $r = a - m \cdot b$  für eine ganze Zahl  $m$ . Mit  $r$  und  $q := m$  haben wir genau die Zahlen gefunden, deren Existenz im Satz von der Division mit Rest behauptet wird.

Nun zur *Eindeutigkeitsaussage* (also zu dem Teil der Aussage, der besagt: „... gibt es *eindeutig bestimmte* ...“):

Angenommen, es sei  $a = q_1 \cdot b + r_1$  und  $a = q_2 \cdot b + r_2$  mit  $0 \leq r_1 < b$  und  $0 \leq r_2 < b$ . Dann ist:  $q_1 \cdot b + r_1 = q_2 \cdot b + r_2$ . (\*)

*Zwischenbehauptung:* Die Faktoren  $q_1$  und  $q_2$  können nicht verschieden sein. Denn sonst wäre einer davon größer, etwa  $q_1 > q_2$ . Dann wäre aber auch  $q_1 \cdot b > q_2 \cdot b$ . Wegen  $r_2 < b$  wäre sogar  $q_1 \cdot b > q_2 \cdot b + r_2$  und so-

mit erst recht  $q_1 \cdot b + r_1 > q_2 \cdot b + r_2$  – im Widerspruch zur anfangs gemachten Annahme (\*). Also sind die Faktoren  $q_1$  und  $q_2$  gleich.

Dann folgt aber sofort aus (\*), dass auch die Reste  $r_1$  und  $r_2$  gleich sein müssen und die Eindeutigkeitsaussage ist bewiesen.

*Bemerkung und Übung:* Die in der Existenzaussage gegebene Konstruktion des Elements  $r$  ist auch gültig für die Fälle, wo  $a=b$  oder  $a < b$  ist. Geben Sie für diese beiden Fälle die im Satz von der Division mit Rest genannten Größen  $q$  und  $r$  an.

*Zweiter Beweis des Satzes von der Division mit Rest (mit vollständiger Induktion):*

Zunächst zur *Existenzaussage*: Der Beweis wird mit vollständiger Induktion (nach  $a$ ) geführt. Die (natürliche) Zahl  $b$  sei im Folgenden beliebig (aber fest) gewählt. (Wegen  $b \in \mathbb{N}$  ist insbesondere  $b \geq 1$ .)

*Induktionsverankerung:* Es ist zunächst zu zeigen, dass die Aussage für  $a = 1$  richtig ist. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. *Fall:* Es sei  $b = 1$ . Dann ist die Aussage richtig mit  $q = 1$  und  $r = 0$ .
2. *Fall:* Es sei nun  $b > 1$ . Dann ist die Aussage richtig mit  $q = 0$  und  $r = 1$ .

*Induktionsschritt:* Die Aussage gelte für  $a = k$  (*Induktionsannahme*). Es ist zu zeigen, dass dann die Aussage auch für  $k + 1$  gilt (*Induktionsschluss*).

Nach *Induktionsannahme* ist also  $a = q \cdot b + r$  mit  $0 \leq r < b$ . Es ist zu zeigen:  $a + 1 = q' \cdot b + r'$  für geeignete natürliche Zahlen  $q'$  und  $r'$  mit  $0 \leq r' < b$ . (*Bemerkung:* Der „Strich“ hat hier nicht die Bedeutung der in den Peano-Axiomen auftretenden Nachfolgerfunktion; er soll jeweils einfach ein alternatives  $q$  bzw.  $r$  andeuten.)

Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich der Variablen  $r$ :

1. *Fall:*  $r$  sei so groß wie möglich, d.h., es sei  $r = b - 1$ .  
Dann ist  $a + 1 = q \cdot b + r + 1 = q \cdot b + b = (q + 1) \cdot b + 0$  und die Aussage ist richtig mit  $q' = q + 1$  und  $r' = 0$ .
2. *Fall:*  $r$  sei nicht so groß wie möglich, d.h., es sei  $r < b - 1$ .  
Dann ist  $a + 1 = q \cdot b + (r + 1)$  und die Aussage ist ebenfalls richtig, denn dann ist  $r' := r + 1 < b$ .

Die *Eindeutigkeitsaussage* wird wie oben bewiesen.

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung kann man  $q$  und  $r$  auch als Funktionswerte geeigneter *Funktionen* deuten. Häufig (so z.B. auch in den meisten Programmiersprachen) werden diese Funktionen als *Div* und *Mod* bezeichnet:

$$\text{Div} : (a,b) \rightarrow \text{Div}(a,b) = q$$

$$\text{Mod} : (a,b) \rightarrow \text{Mod}(a,b) = r$$

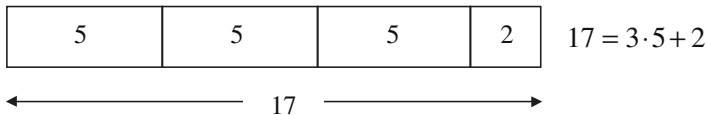
Der Satz von der Division mit Rest kann also auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$a = \text{Div}(a,b) \cdot b + \text{Mod}(a,b)$$

### Veranschaulichung

Im folgenden Beispiel sei  $a = 17$  und  $b = 5$  gewählt. Die nach dem Satz von der Division existierenden Zahlen  $q$  und  $r$  haben dann die Werte  $q = 3$  und  $r = 2$ . Die in dem Satz auftretende Gleichung lautet dann  $17 = 3 \cdot 5 + 2$ . Ergänzend zum formalen Beweis ist die *Veranschaulichung* des Sachverhalts von großer Bedeutung. Dazu stellen wir uns die Zahlen  $a$  und  $b$ , ganz im Sinne der Griechen, als *Strecken* vor;  $a$  möge die größere und  $b$  die kleinere Strecke sein. Dann kann man  $b$  einmal oder mehrmals auf  $a$  abtragen (bzw. „von  $a$  wegnehmen“), bis nichts mehr übrig bleibt oder bis ein Rest übrig bleibt, der kleiner ist als  $b$ .

Die im obigen Satz auftretende Zahl  $q$  ist die *Vielfachheit* (bzw. der *Quotient*), mit der man  $b$  „ganz“ auf  $a$  abtragen kann;  $r$  ist der *Rest*, der danach übrig bleibt. Es ist offensichtlich, dass  $r$  kleiner als  $b$  ist (wie im Satz formuliert). Wenn  $r = 0$  ist sagt man auch, dass die Strecke  $b$  die Strecke  $a$  *misst* bzw. dass die Zahl  $b$  die Zahl  $a$  *teilt*.



**Abb. 2.2:** Division mit Rest

Diese Veranschaulichung macht deutlich, warum die Division häufig als „iterierte“ (wiederholte) Subtraktion erklärt und eingeführt wird.

### Vorsicht

Veranschaulichung ist zwar wichtig, sie kann gelegentlich aber auch zu Täuschungen Anlass geben. Hier eine kleine Warnung vor allzu blindem Vertrauen in die Anschauung:

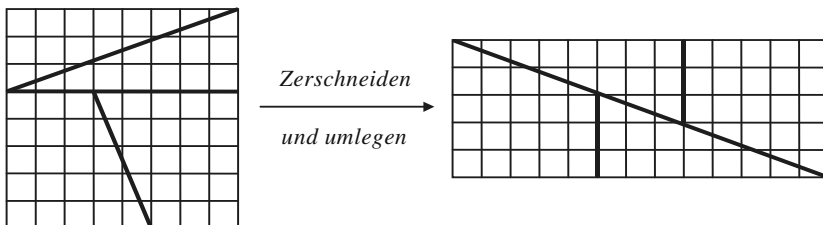


Abb. 2.3: Zerschneiden und Umlegen ... Konsequenz ?

## 2.2 Die Teilbarkeitsrelation

Zur Wiederholung der Grundbegriffe Menge, Relation, Relationseigenschaften, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation siehe Anhang 8.3.

*Definition 2.1:* Die (ganze) Zahl  $b$  teilt die (ganze) Zahl  $a$ , wenn es eine (ganze) Zahl  $n$  gibt mit der Eigenschaft  $a = n \cdot b$ .

(Entsprechendes kann man auch bezogen auf die Menge der natürlichen Zahlen formulieren; überall, wo „ganze“ Zahl steht, ist dann jeweils „natürliche“ Zahl einzusetzen.)

Im Zeichen:  $b \mid a$

Gleichwertige Sprechweisen:

- $b$  teilt  $a$ ,
- $b$  misst  $a$ ,
- $b$  ist ein Teiler von  $a$ ,
- $a$  ist ein Vielfaches von  $b$

Mit anderen Worten:  $b$  teilt  $a$ , wenn der im Satz von der Division mit Rest auftretende Divisionsrest bei der Division von  $a$  durch  $b$  gleich Null ist.

*Aufgabe 2.1:*

- Jede natürliche Zahl  $a$  hat die „trivialen“ Teiler 1 und  $a$  (wie viele sind das?).

- Für welche Zahlen  $x$  gilt  $1 \mid x$ ,  $x \mid 1$ ,  $0 \mid x$ ,  $x \mid 0$  ?

Man sagt, eine natürliche Zahl ist *gerade*, wenn sie von der Zahl 2 geteilt wird (anders ausgedrückt: wenn sie ein Vielfaches von 2 ist); andernfalls wird sie als *ungerade* bezeichnet.

Eine ganze Zahl  $a$  heißt *Quadratzahl*, wenn es eine ganze Zahl  $b$  gibt mit der Eigenschaft:  $a = b \cdot b =: b^2$

*Aufgabe 2.2:*  $1$ ,  $1+3=4=2^2$ ,  $1+3+5=9=3^2$ ,  $1+3+5+7=16=4^2$  sind Quadratzahlen. Zeigen Sie (einmal durch eine geeignete Visualisierung, einmal durch vollständige Induktion), dass die Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen, beginnend bei 1, stets eine Quadratzahl ist.

### Teilmengen und Vielfachenmengen

Im Folgenden sei mit  $\mathbb{G}$  diejenige „Grundmenge“ bezeichnet, in deren Kontext die Teilbarkeitsrelation jeweils diskutiert wird; also z.B.  $\mathbb{G} = \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{G} = \mathbb{N}_0$  oder  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$ .

Wir definieren:

$T(a) = \{x \in \mathbb{G} : x \mid a\}$  = Menge aller Teiler von  $a$

$V(a) = \{x \in \mathbb{G} : a \mid x\}$  = Menge aller Vielfachen von  $a$

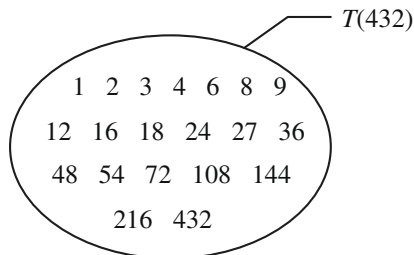
*Aufgabe 2.3:* Diskutieren Sie die Frage, für welche Werte von  $\mathbb{G}$  und für welche Werte von  $a$  die Mengen  $T(a)$  und  $V(a)$  jeweils endlich oder unendlich sind.

### Zur Darstellung von Teilmengen

- *Venn-Diagramme*<sup>10</sup>

*Beispiel:*  $T(432)$

**Abb. 2.4:** Venn-Diagramm



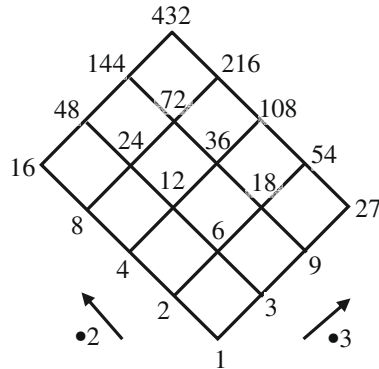
Während Venn-Diagramme eine relativ unübersichtliche Darstellung der je-

<sup>10</sup> John Venn (1834–1923), englischer Mathematiker

weiligen Teilermenge liefern, sind Hasse-Diagramme (sofern anwendbar) wesentlich besser strukturiert.

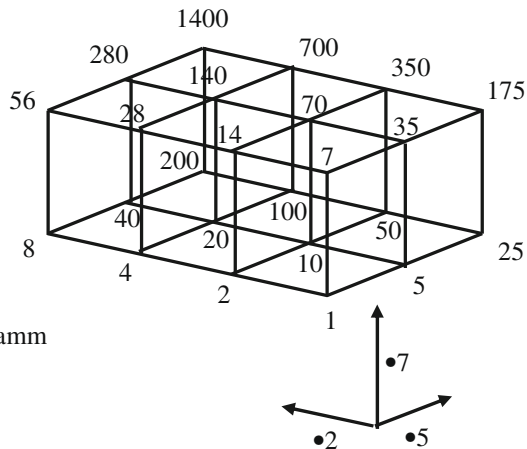
- *Hasse-Diagramme*<sup>11</sup>

Beispiel:  $T(432)$



**Abb. 2.5:** Hasse-Diagramm

Ein weiteres Beispiel:  $T(1400)$



**Abb. 2.6:** Hasse-Diagramm mit drei Primteilern

Die Beispiele machen deutlich, dass Hasse-Diagramme für die Darstellung der Teilmengen von natürlichen Zahlen geeignet sind, die maximal drei Primteiler besitzen. (Zum Begriff des Primteilers: siehe Kapitel 4).

<sup>11</sup> Helmut Hasse (1898–1979), deutscher Mathematiker

### Erste Beobachtungen zur Teilbarkeits-Relation

- Teiler treten in der Regel *paarweise* auf: Ist  $a = b \cdot c$  ( $a, b, c \in \mathbb{G}$ ) so ist mit  $b$  stets auch  $c$  ein Teiler von  $a$ . Welche Konsequenzen hat das?

*Zusatzbemerkung:* Ist  $a = b \cdot c$ , so gilt:  $b \leq \sqrt{a}$  oder  $c \leq \sqrt{a}$

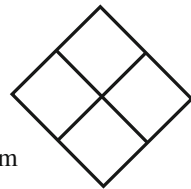
(Nicht beide Faktoren können größer als  $\sqrt{a}$  sein. Und entsprechend können auch nicht beide Faktoren kleiner als  $\sqrt{a}$  sein.)

*Beweis:* Übung

Ist  $a = b \cdot c$  mit  $b \neq c$ , so nennt man  $b$  und  $c$  auch *Komplementärteiler*.

- Teilmengen mit *ungerader* Elementezahl

*Aufgabe 2.4:* Welche Zahlen passen zum nebenstehenden Teilerdiagramm?



**Abb. 2.7:** Hasse-Diagramm mit ungerader Teilerzahl

*Aufgabe 2.5:* Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm zu den Teilern von 128.

*Aufgabe 2.6:* Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl  $n$  gilt  $(1-x) \mid (1-x^n)$  und bestimmen Sie den Komplementärteiler.

### Allgemeine Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation

Bezogen jeweils auf die Grundmenge der *natürlichen* oder der *ganzen* Zahlen gilt:

- *Transitivität der Teilbarkeitsrelation*

**(T-1)** Aus  $a \mid b$  und  $b \mid c$  folgt  $a \mid c$ .

*Beispiel:* Es gilt  $6 \mid 18$  und  $18 \mid 72$ . Deshalb gilt auch  $6 \mid 72$ .

*Beweis:*  $a \mid b$  bedeutet: Es gibt eine ganze Zahl  $n$  mit  $n \cdot a = b$ .

$b \mid c$  bedeutet: Es gibt eine ganze Zahl  $k$  mit  $k \cdot b = c$ .

Daraus folgt:  $c = k \cdot b = k \cdot n \cdot a = r \cdot a$  (mit  $r = k \cdot n$ ). Also gilt:  $a \mid c$ .



- *Verträglichkeit der Teilbarkeitsrelation mit der Multiplikation*

**(T-2)** Aus  $a \mid b$  folgt  $a \cdot c \mid b \cdot c$ . (Beweis: Übung)

*Beispiel:* Es gilt  $15 \mid 45$ . Deshalb gilt auch  $15 \cdot 4 \mid 45 \cdot 4$ , also  $60 \mid 180$ .

**Folgerung:** Aus  $a \mid b$  und  $c \mid d$  folgt  $a \cdot c \mid b \cdot d$ .

*Beweis:* Aus  $a \mid b$  folgt nach (T-2)  $a \cdot c \mid b \cdot c$ . Ebenso folgt aus  $c \mid d$  die Gültigkeit von  $b \cdot c \mid b \cdot d$ . Aus der Transitivität der Teilbarkeitsrelation folgt schließlich  $a \cdot c \mid b \cdot d$ .

*Aufgabe 2.7:* Zeigen Sie für  $c \neq 0$ : Aus  $a \cdot c \mid b \cdot c$  folgt  $a \mid b$ .

- *Die Teilbarkeitsrelation in Verbindung mit Addition und Subtraktion*

**(T-3)** Aus  $a \mid b$  und  $a \mid c$  folgt  $a \mid (b + c)$  und  $a \mid (b - c)$ .

*Beispiel:* Es gilt  $6 \mid 78$  und  $6 \mid 54$ . Deshalb gilt auch  $6 \mid 78 + 54$  und  $6 \mid 78 - 54$ , also  $6 \mid 132$  und  $6 \mid 24$ .

*Beweis:* Die Aussage  $a \mid b$  bedeutet, es gibt eine ganze Zahl  $n$  mit  $n \cdot a = b$ ;  $a \mid c$  bedeutet, es gibt eine ganze Zahl  $k$  mit  $k \cdot a = c$ .

Also gilt:  $b + c = n \cdot a + k \cdot a = (n + k) \cdot a = r \cdot a$  (mit  $r = n + k$ ), d.h.  $a \mid (b + c)$ .

**Folgerung:** Aus  $a \mid b$  und  $a \mid c$  folgt für beliebige ganze Zahlen  $q$  und  $r$ :  $a \mid (q \cdot b + r \cdot c)$ .

*Beispiel und Beweis:* Übung

- *Die Teilbarkeitsrelation und die Durchschnittsbildung*

**(T-4)** In der Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  gilt:

$$T(a) \cap T(b) = T(a - b) \cap T(b)$$

*Beispiel:*  $T(54) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$ ;  $T(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$54 - 24 = 30$ ;  $T(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ ;

$T(54) \cap T(24) = \{1, 2, 3, 6\}$ ;  $T(30) \cap T(24) = \{1, 2, 3, 6\}$ .

*Beweis:* (1.) zunächst wird gezeigt:  $T(a) \cap T(b) \subseteq T(a - b) \cap T(b)$ . Sei also  $t \in T(a) \cap T(b)$ . Dies bedeutet  $t \mid a$  und  $t \mid b$ . Damit teilt  $t$

aber nach (T-3) auch  $a - b$ . Somit gilt  $t \in T(a - b) \cap T(b)$ , wie zu zeigen war.

(2.) Es ist noch zu zeigen:  $T(a - b) \cap T(b) \subseteq T(a) \cap T(b)$ . Sei also

$t \in T(a - b) \cap T(b)$ . Dies bedeutet  $t \mid a - b$  und  $t \mid b$ . Damit teilt  $t$  auch  $(a - b) + b$ , also  $a$ . Und somit gilt  $t \in T(a) \cap T(b)$ .

- *Die Teilbarkeitsrelation und Absolutbeträge*

Der Absolutbetrag  $Abs(x)$  oder  $|x|$  einer ganzen (oder reellen) Zahl  $x$  ist definiert durch:

$$Abs(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

*Beispiel:*  $|18| = |-18| = Abs(18) = Abs(-18) = 18$

(T-5) In  $\mathbb{Z}$  gilt:  $a \mid b \Leftrightarrow a \mid Abs(b) \Leftrightarrow Abs(a) \mid Abs(b)$

*Beispiel:*  $-5 \mid 5$ , denn  $5 = (-1) \cdot (-5)$

*Beweis:* Übung

*Aufgabe 2.8:* Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion  $Abs$ .

### Spezielle Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation

Bezogen auf die Grundmenge der **natürlichen Zahlen** ( $\mathbb{N}$ ) gilt:

- *Teilbarkeit und die gewöhnliche „kleiner-gleich“-Relation*

(T-6) Aus  $a \mid b$  folgt  $a \leq b$ . Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Teilbarkeitsrelation.

- *Antisymmetrie der Teilbarkeitsrelation*

(T-7) Aus  $a \mid b$  und  $b \mid a$  folgt  $a = b$ .

*Beweis:*  $a \mid b$  heißt nach Definition: Es gibt eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n \cdot a = b$ . Entsprechend heißt  $b \mid a$ : Es gibt eine natürliche Zahl  $k$  mit  $k \cdot b = a$ . Daraus folgt:  $b = n \cdot a = n \cdot k \cdot b$ .

Die einzigen natürlichen Zahlen, welche die letzte Gleichung erfüllen, sind:  $n = k = 1$ . Also ist  $a = b$ .

*Bemerkung:* Diese Argumentation gilt nicht in Bezug auf die Grundmenge der ganzen Zahlen. (Aufgabe: ... warum nicht ?)

In Verbindung mit der oben bewiesenen Transitivität gilt somit: Auf der Menge der natürlichen Zahlen ist die Teilbarkeitsrelation also eine *Ordnungsrelation*.

- Teilbarkeit und Teilmengen

(T-8) Aus  $a \mid b$  folgt  $T(a) \subseteq T(b)$ .

*Beweis:* Übung

- *Teilbarkeit und Stellenwert-Schreibweisen*, Endstellen-Regeln, Quersummen-Regeln: Dies wird später (in Kapitel 6) im Zusammenhang mit Stellenwertsystemen und Kongruenzrelationen behandelt.

## 2.3 Teilerzahl, Teilersumme, Multiplikativität

Die *Teilersumme*  $\sigma(a)$  einer natürlichen Zahl  $a$  ist, wie der Begriff ausdrückt, gleich der Summe ihrer Teiler:  $\sigma(a) = \sum_{x \mid a} x$ .

*Beispiel:*  $\sigma(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$

Die *Teilerzahl*  $\tau(a)$  einer natürlichen Zahl  $a$  ist gleich der Anzahl ihrer Teiler:  $\tau(a) = \sum_{x \mid a} 1$ .

*Beispiel:*  $\tau(24) = \sum_{x \mid 24} 1 = 8$  (die Teiler sind: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)

Ist  $b$  ein Teiler von  $a$  mit  $b \neq a$  (also  $b < a$ ), dann heißt  $b$  auch ein *echter Teiler* von  $a$ . Gelegentlich ist es günstig, nur die Summe aller echten Teiler zu bilden:

Die Summe der echten Teiler (in der englischsprachigen Fachliteratur: the aliquot parts) von  $a$  wird bezeichnet durch  $\sigma_0(a) = \sum_{x \mid a \text{ und } x < a} x = \sigma(a) - a$ .

*Beispiel:*  $\sigma_0(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22$

*Aufgabe 2.9:* Zeigen Sie:  $\sigma_0(2^n) = 2^n - 1$ .

*Bemerkung:* In der Regel gilt für die Teilersummenfunktion nicht, dass stets  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  ist.

*Beispiel:*  $a = 6$ ,  $b = 10$ ,  $T(a) = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $T(b) = \{1, 2, 5, 10\}$ ,  
 $\sigma(a) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ ,  $\sigma(b) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ .

Das Produkt  $\sigma(a) \cdot \sigma(b) = (1 + 2 + 3 + 6) \cdot (1 + 2 + 5 + 10)$  besteht aus allen Summanden der Form  $a_i \cdot b_j$ , wo  $a_i$  ein Teiler von 6 und  $b_j$  ein Teiler von 10 ist. Damit kommen die Produkte  $1 \cdot 2 (= 2 \cdot 1)$ ,  $2 \cdot 5 (= 1 \cdot 10)$ ,  $3 \cdot 2 (= 1 \cdot 6)$  und  $6 \cdot 5 (= 3 \cdot 10)$  mehrfach in  $\sigma(a) \cdot \sigma(b)$  vor, während sie in  $\sigma(a \cdot b)$  nur jeweils einmal auftreten. Dementsprechend ist  $\sigma(6) \cdot \sigma(10) = 12 \cdot 18 = 216$  größer als  $\sigma(6 \cdot 10) = \sigma(60) = 168$ ; genauer:  $\sigma(6 \cdot 10) = 168 = \sigma(6) \cdot \sigma(10) - 2 - 6 - 10 - 30$ .

Das soeben beschriebene Phänomen hängt offenbar damit zusammen, dass in den Teilmengen von  $a$  und  $b$  gleiche Teiler vorkommen, die dann beim distributiven Ausmultiplizieren von

$$\sigma(a) \cdot \sigma(b) = (1 + 2 + 3 + 6) \cdot (1 + 2 + 5 + 10)$$

zu mehrfachen gleichen Summanden führen, während diese in  $\sigma(a \cdot b)$  entsprechend der Definition von  $\sigma$  jeweils nur einmal auftreten.

Besitzen  $a$  und  $b$  jedoch keine gemeinsamen Teiler, so kommt dieses Phänomen der Doppelzählung nicht vor. Die gemeinsamen Teiler von  $a \cdot b$  sind dann genau die Produkte der Paare aus dem kartesischen Produkt (vgl. Anhang 8.3)  $T(a) \times T(b)$  und es gilt:

### **Satz 2.2 (Multiplikativität der Teilersummen-Funktion):**

Sind  $a$  und  $b$  teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt:

$$\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

Man drückt dies auch folgendermaßen aus (vgl. Kapitel 7): Die Teilersummenfunktion  $\sigma$  ist multiplikativ.

*Aufgabe 2.10:* Zeigen Sie, dass auch die Teilerzahlfunktion multiplikativ ist, d.h. dass für alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:  $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$ .

## 2.4 Perfekte, abundante, defiziente und befreundete Zahlen

Die Griechen nannten eine natürliche Zahl *vollkommen* (*perfekt*), wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler war  $\sigma_0(a) = a$ . Die kleinste perfekte Zahl ist 6, denn  $6 = 1+2+3$ . Weitere niedrige (schon im antiken Griechenland bekannte) vollkommene Zahlen sind 28, 496 und 8128.

Ist  $\sigma_0(a) < a$ , so nennt man  $a$  *defizient* (lateinisch für unzureichend), ist  $\sigma_0(a) > a$  so heißt  $a$  *abundant* (lateinisch für reichlich).

*Beispiele:*

- 10 ist defizient, denn  $1+5 < 10$  und
- 12 ist abundant, denn  $1+2+3+4+6 > 12$ .

*Aufgabe 2.11:*

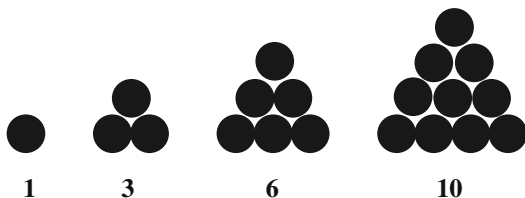
- Verifizieren Sie durch direktes Ausrechnen der Teilersummen, dass 28, 496 und 8128 perfekte Zahlen sind.
- Finden Sie weitere abundante und defiziente Zahlen.
- Falls entsprechende Programmierkenntnisse vorliegen: Schreiben Sie ein Programm, das ein vorgegebenes Zahlenintervall durchläuft und von jeder Zahl feststellt, ob sie perfekt, abundant oder defizient ist.
- Erweitern Sie das Programm durch einen kleinen Statistik-Modul.

*Bemerkung:* Es ist derzeit weder bekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen, noch ob es unendlich viele perfekte Zahlen gibt. Man vermutet aber, dass unendlich viele vollkommene Zahlen existieren (siehe Abschnitt 4.8: Spezielle Zahlen und Primzahlen, insbesondere „Mersennesche Primzahlen und vollkommene Zahlen“). Bereits Euklid kannte ein wichtiges Ergebnis über die Struktur vollkommener Zahlen; es wird in Kapitel 4 im Zusammenhang mit den Mersenneschen Primzahlen behandelt.

*Definition 2.2:* Die  $n$ -te *Dreieckszahl* ist definiert als  $T_n := 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Das Beispiel  $T_{100}$  kennen wir schon von der Geschichte des Grundschülers Gauß.

*Aufgabe 2.12:* Zeigen Sie, dass allgemein gilt:  $T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ .

Die Dreieckszahlen lassen sich wie folgt veranschaulichen:



**Abb. 2.8:** Die ersten vier Dreieckszahlen

Zahlenmuster, besonders in der Form der figurierten Zahlen (Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Pentagonalzahlen, Hexagonalzahlen, ...) spielten schon in der griechischen Antike eine große Rolle. Und perfekte Zahlen gaben Anlass für allerlei Zahlenmystik. So spielte die Zahl 6 bereits bei den Pythagoreern eine große Rolle als vollkommene Zahl und als Dreieckszahl.

Ausgehend von der Beobachtung, dass die ersten drei vollkommenen Zahlen auch Dreieckszahlen sind:  $6 = 1 + 2 + 3 = T_3$ ,  $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = T_7$ ,  $496 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 31 = T_{31}$  lässt sich zeigen, dass jede gerade vollkommene Zahl auch eine Dreieckszahl ist. Im Abschnitt über Mersennesche Zahlen werden wir in Kapitel 4 sehen, dass jede gerade vollkommene Zahl von der Form  $2^n \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n)$ , also gleich  $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$  ist.

Aus der Gleichung  $2^n \cdot (2^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1} \cdot (2^{n+1} - 1)}{2}$  folgt dann, dass die perfekte Zahl  $2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$  gleich der Dreieckszahl  $T_{2^{n+1}-1}$  ist.

Abschließend sei an dieser Stelle noch eine weitere von den Griechen untersuchte Teilbarkeitseigenschaft erwähnt:

Die natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  heißen *befreundet*, wenn jede der Zahlen gleich der Summe der echten Teiler der jeweils anderen Zahl ist, wenn also  $\sigma_0(a) = b$  und  $\sigma_0(b) = a$  ist. Das kleinste Paar befreundeter Zahlen besteht aus den Zahlen 220 und 284.

**Aufgabe 2.13:** Verifizieren Sie, dass 220 und 284 befreundete Zahlen sind und suchen Sie (ggf. unter Nutzung eines Computers) weitere befreundete Zahlen.



<http://www.springer.com/978-3-658-07170-7>

Elementare Zahlentheorie

Beispiele, Geschichte, Algorithmen

Ziegenbalg, J.

2015, X, 155 S. 45 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-07170-7