

# Vorwort

Die „Erfindung“ des Zählens stellt eine der faszinierendsten Leistungen des menschlichen Geistes dar; Zahlen und Zahlschreibweisen sind eng mit unserer Kulturgeschichte verwoben. Ohne Zahlen gäbe es (ob zum Besseren oder zum Schlechteren sei dahingestellt) keine Mathematik, keine Naturwissenschaften, keine Technik, keine Medizin und keine Ingenieurwissenschaften in der Form, wie wir sie kennen. Die vom Menschen geprägte Welt wäre eine völlig andere.

Zahlen sind einfach und kompliziert zugleich. Das Zählen stellt sich beim Menschen „fast automatisch“ ein; die meisten Kinder können schon zählen, bevor sie in die Schule kommen. Aber die Zahlen sind zugleich auch der Stoff, der (zusammen mit der räumlichen Anschauung) den menschlichen Geist zur Konstruktion gedanklicher Gebäude anregt, deren Untersuchung zu den hochgradig abstrakten Strukturen der modernen Mathematik geführt hat.

Zahlen sind zugleich anschaulich und abstrakt. Vermutungen über zahlentheoretische Gesetzmäßigkeiten entstehen oft durch das Betrachten von konkreten Beispielen und insbesondere von strukturierten Punkt- oder Flächenmustern, den sogenannten „figurierten“ Zahlen. Der Satz des Pythagoras gab so Anlass zur Fermatschen Vermutung, welche die Mathematiker Jahrhunderte lang beschäftigte und die Entwicklung zur modernen abstrakten Algebra maßgeblich beeinflusste.

Zahlen machen Spaß. Spiele mit Zahlen und Zahlenrätsel faszinieren immer wieder Menschen aus allen Altersschichten und mit der unterschiedlichsten Vorbildung.

Das Thema „Zahlen“ ist zugleich alt und jung. Schon die frühesten menschlichen Kulturen verfügten über Zahlen (man kann sich fragen, ob es ohne Zahlen überhaupt menschliche Kulturen gegeben hätte) und einige der bemerkenswertesten jüngsten Ergebnisse der Wissenschaft sind Ergebnisse über Zahlen.

Ein besonderes Merkmal dieser Einführung in die elementare Zahlentheorie ist nicht zuletzt auch die bewusste inhaltliche Beschränkung. Der Umfang dieser Darstellung entspricht etwa dem, was ich im Sommersemester in einer einführenden Basisvorlesung von zwei Semesterwochenstunden behandeln kann. Im

Rahmen eines modular aufgebauten Vorlesungsprogramms ist dies ein Baustein, auf dem andere Lehrveranstaltungen aufbauen können.

Möglichkeiten zur Weiterführung, Vertiefung und zum Ausbau sind in vielfältiger Weise gegeben; hier einige Anregungen:

- Faszination Zahl: Figurierte Zahlen, Fibonacci Zahlen, Pythagoreische Zahlen, Zahlen und Kombinatorik
- Zahlen in Natur und Kultur: der Goldene Schnitt, Phyllotaxis (die Lehre von den Blatt-Ständen von Pflanzen), Zahlen und Kalender (historisches Beispiel: die Ermittlung des Osterdatums nach Gauß)
- Praktische Anwendungen: Prüfziffern (EAN, ISBN, ...), Geheimcodes, Verschlüsselungssysteme (insbesondere: Public Key Cryptography, RSA Verfahren), Primzahltests, Kalenderrechnungen, Planung von Turnieren
- Zahlentheoretische Spielereien: Kartentricks mit zahlentheoretischen Erklärungen, Auszählverfahren, Magische Quadrate, Zahlentheorie zur Ermittlung von Gewinnstrategien in Spielen aller Art (z.B. NIM)
- Bruch-Zahlen: ägyptische Brüche, Dezimal- und Systembrüche, Kettenbrüche, Irrationalität, Kommensurabilität
- Zahlentheoretische Vertiefungen: Diophantische Gleichungen, zahlentheoretische Funktionen, Primzahlsätze, Siebmethoden, Gitterpunktverfahren, quadratische Reste,  $p$ -adische Zahlen
- Algebra: Restklassenringe, Gruppe der primen Restklassen, Quadratische Erweiterungen, Ring der Gaußschen Zahlen, Polynomringe, Euklidische Ringe, Hauptidealringe, faktorielle Ringe, Integritätsringe
- Zahlentheorie und Informatik bzw. algorithmische Zahlentheorie: Algorithmen in der Zahlentheorie, Zahlentheorie in Codierung und Kryptologie, computerbasierte Experimente in der Zahlentheorie, internetbasierte Methoden in der Zahlentheorie (wie z.B. das Projekt GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search)
- Geschichte der Mathematik: Entstehung der Zahlensysteme, zahlentheoretische Fragestellungen in Antike, Mittelalter, Renaissance und Neuzeit

Sowohl zum Basistext als auch zu den weiterführenden Themen habe ich im Internet neben themenbezogenen Computeralgebra-Quelltexten auch eine Reihe interaktiver Seiten zum Experimentieren zur Verfügung gestellt. Näheres dazu ist im „Verzeichnis der internetbasierten Materialien des Autors“ im An-

schluss an das Abbildungsverzeichnis zusammengestellt; grundsätzlich sind alle diese Materialien unter der Adresse [www.ziegenbalg.ph-karlsruhe.de](http://www.ziegenbalg.ph-karlsruhe.de) (als „Wurzel“) zu finden.

Der vorliegende Text ist aus einem Manuskript zu meiner Vorlesung „Basiswissen Zahlentheorie“ am Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe hervorgegangen. Er stellt einen ersten Einstieg in die Zahlentheorie dar und ist, wie oben erläutert, die Basis für vielfältige Ausbaumöglichkeiten.

Bei der Überarbeitung des Buches konnte ich auch Erfahrungen einfließen lassen, die ich im Zusammenhang mit der von der Humboldt Universität zu Berlin organisierten Sommerschule „Lust auf Mathematik“ und mit Schülergruppen des Heinrich-Hertz-Gymnasiums in Berlin gewinnen konnte.

Die Voraussetzungen für das Verständnis dieses Buchs sind bewusst niedrig gehalten. Einige Details zum Thema „Vorwissen“ sind kompakt in den Anhängen zusammengestellt. In Anhang 8.1 sind die in diesem Buch verwendeten Beweisprinzipien aufgeführt. Anhang 8.2 kann auch als kleine Einführung in das Prinzip der vollständigen Induktion genutzt werden. Zielgruppe des Buches ist nicht die „scientific community“ sondern es sind Leser, die sich nicht unbedingt als Berufsmathematiker verstehen. Die Bereitschaft zum Mitdenken und Mitarbeiten muss für eine sinnverstehende Lektüre des Buches allerdings vorhanden sein.

Von Ludwig Wittgenstein stammt der Ausspruch *„Wenn du wissen willst, was ein Satz besagt, schau nach, was sein Beweis beweist“*. So richtig dies grundsätzlich ist, so ergänzungsbedürftig ist es im Hinblick auf das Erlernen von Mathematik bei Menschen, die erst am Anfang ihres mathematischen Lebenswegs stehen. Formale mathematische Beweise sind für sie oft undurchsichtige Rituale. Wirkliches Verständnis kommt bei ihnen selten aus einem abstrakten Beweis sondern viel öfter aus einem gut ausgewählten, typischen Beispiel. Die richtigen Beispiele auszuwählen, ist eine Kunst; gute Beispiele geben der Mathematik etwas von der Sinnlichkeit des Lebens. Manche Wissenschaftsschulen der Mathematik sind geneigt, die Bedeutung von Beispielen herunterzuspielen. Für die Phasen des Mathematik-Lernens meine ich aber im Gegensatz dazu, dass die Bedeutung guter Beispiele kaum überbetont werden kann.

Zum Adressatenkreis dieses Buches gehören natürlich auch die Studierenden, insbesondere in den Lehramtsstudiengängen. Der Zielgruppe entsprechend, stand bei der Konzeption die Redundanzfreiheit des Textes nicht im Vordergrund. Viele formal sehr kompakt beschreibbare Begriffe wurden durch erläuternde Beschreibungen, durch geeignete Beispiele oder durch graphische Veranschaulichungen verständlich gemacht.

Das Interesse am Thema „Zahlen“ scheint universell zu sein. Kürzlich war ich bei einer Hochzeit eingeladen. Das Datum bot sich an, um spontan eine Verbindung zu den „perfekten Zahlen“ herzustellen. Im Laufe des Abends wurde ich dann immer wieder von verschiedenen Hochzeitsgästen gebeten, die vollkommenen Zahlen noch etwas näher zu erläutern. Bei vielen Menschen ist also offenbar ein ganz natürliches Bedürfnis da, etwas mehr über die Zahlen zu erfahren als sie von ihrer Schulzeit her wissen.

Meinen Kollegen Kurt Neubert (Reutlingen) und Erich Wittmann (Dortmund) bin ich für viele und vielfältige Anregungen und Diskussionen inhaltlicher und methodologischer Art dankbar.

Für die verlegerische Unterstützung bei der vorliegenden Neuauflage dieses Buches danke ich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum und ebenso Herrn Klaus Horn vom damals noch existierenden Verlag Harri Deutsch für die entsprechende Unterstützung bei der ersten Auflage.

Über Anmerkungen, Kommentare und Rückmeldungen aller Art freue ich mich. Per electronic mail bin ich unter der Adresse

ziegenbalg@ph-karlsruhe.de  
erreichbar.

Berlin, im August 2014

Jochen Ziegenbalg



<http://www.springer.com/978-3-658-07170-7>

Elementare Zahlentheorie

Beispiele, Geschichte, Algorithmen

Ziegenbalg, J.

2015, X, 155 S. 45 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-07170-7