Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

Inhaltsverzeichnis ix

1 Zahlen 1
1.1 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion 1
1.1.1 Natürliche Zahlen 2
1.1.2 Vollständige Induktion 5
1.1.3 Weitere Beispiele für die Beweismethode der vollständigen Induktion 7
1.2 Ganze, rationale und reelle Zahlen 17
1.2.1 Ganze Zahlen 17
1.2.2 Rationale Zahlen 18
1.2.3 Reelle Zahlen und reellwertige Funktionen 18
1.2.4 Beispiel einer reellwertigen Funktion: die Exponentialfunktion 20
1.3 Komplexe Zahlen 24
1.3.1 Definitionen und Eigenschaften 24
1.3.2 Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung 26
1.3.3 Die Polardarstellung 27
1.3.4 Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument 29
1.3.5 Multiplikation und Division in der Polardarstellung 31
1.3.6 Die Formel von de Moivre 32
1.3.7 De Moivres Formel – weitere Anwendungen 33
1.3.8 Komplexe Konjugation 35
1.3.9 Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument 38
1.4 Übungsaufgaben 39

2 Folgen, Reihen und Rekursionen 45
2.1 Folgen 46
2.1.1 Definition einer „Folge“ und Nomenklatur 46
2.1.2 Grenzwertregeln und Beispiele 50
2.1.3 Die Euler’sche Zahl als Grenzwert einer Folge 55
2.2 Reihen 56
2.2.1 Definition einer „Reihe“ und ein erstes Beispiel 57
2.2.2 Weitere Beispiele von Reihen 58
2.2.3 Konvergenzkriterien 62

2.2.4 Weiterführende Konvergenzkriterien ∗ 66
2.3 Rekursionen 70
2.3.1 Mathematische Form einer Rekursionsbeziehung 71
2.3.2 Beispiele von Rekursionsbeziehungen 71
2.3.3 Fibonacci-Zahlen und die binomische Formel 75
2.3.4 Die Ackermann-Péter-Rekursion 76
2.4 Übungsaufgaben 78

3 Vektoren, Matrizen und Determinanten 83
3.1 Vektoren und Vektorräume – eine Einführung 83
3.1.1 Die Eigenschaften eines Vektorraums 85
3.2 Das Skalarprodukt 86
3.2.1 Axiome und Eigenschaften des Skalarprodukts 87
3.2.2 Geometrische Interpretation 89
3.2.3 Der Ortsraum der Physik . . . etwas allgemeiner 91
3.3 Das Vektor- oder Kreuzprodukt 92
3.3.1 Definition und physikalische Anwendungen 92
3.3.2 Eigenschaften des Vektorprodukts 94
3.3.3 Das Vektorprodukt und der Sinussatz 96
3.3.4 Vektorprodukte von Basisvektoren 97
3.3.5 Komponentendarstellung des Vektorprodukts 99
3.3.6 Mehrfachvektorprodukte 100
3.3.7 2×2-Matrizen und Determinanten 102
3.3.8 Das Vektorprodukt und 2×2-Determinanten 102
3.4 Das Spatprodukt 103
3.4.1 Definition und Eigenschaften des Spatprodukts 103
3.4.2 Geometrische Bedeutung des Spatprodukts 106
3.5 Lineare Gleichungssysteme – eine Einführung 107
3.5.1 Lineare Gleichungssysteme für 1 oder 2 Variable 108
3.5.2 Matrixmultiplikation 111
3.5.3 Zeilen- und Spaltenvektoren: die Transposition 113
3.5.4 Die inverse Matrix 115
3.5.5 Spezialfall der 2×2-Matrix: Drehungen 116
3.5.6 Komplexe Zahlen als 2×2-Matrizen 117
3.6 Lineare Gleichungssysteme in 3 Variablen 119
3.6.1 Die Transposition dreidimensionaler Vektoren und Matrizen . 120
3.6.2 Lösung des dreidimensionalen Gleichungssystems 121
3.6.3 Die Inverse einer 3×3-Matrix 122
3.6.4 Dreidimensionale Drehungen 124
3.6.5 Jenseits der komplexen Zahlen 127
3.7 Lineare Gleichungssysteme in n Variablen ∗ 128
3.7.1 Die Transposition n-dimensionaler Vektoren und Matrizen ∗ . 130
3.7.2 Determinanten ∗ 131
3.7.3 Die inverse Matrix und lineare Gleichungssysteme ∗ 141
3.8 Übungsaufgaben 144

4 Funktionen einer reellen Variablen 151
4.1 Reellwertige Funktionen – eine Einführung . . . 151
4.1.1 Funktionen und Umkehrfunktionen . . . 152
4.1.2 Elementare Beispiele . . . 153
4.1.3 Stetigkeit oder Unstetigkeit von Funktionen . . . 163
4.2 Ableitungen von Funktionen . . . 165
4.2.1 Eigenschaften von Ableitungen . . . 170
4.2.2 Ableitungen von elementaren Funktionen . . . 172
4.2.3 Kurvendiskussion . . . 177
4.3 Exponentialfunktionen und Logarithmen . . . 179
4.3.1 Vom Logarithmus zur Exponentialfunktion . . . 180
4.3.2 Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen . . . 184
4.3.3 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen . . . 191
4.4 Asymptotisches Verhalten . . . 193
4.4.1 Notationen . . . 194
4.4.2 Die Taylor-Formel . . . 200
4.4.3 Die Taylor-Formel – elementare Beispiele . . . 202
4.4.4 Die Taylor-Formel – Exponential- und Sinusfunktion . . . 205
4.4.5 Weitere Beispiele für Taylor-Formeln . . . 209
4.4.6 Grenzwerte von Quotienten . . . 211
4.4.7 Herleitung des Satzes von Taylor . . . 214
4.5 Übungsaufgaben . . . 218

5 Funktionen mehrerer Veränderlicher 223
5.1 Funktionen mehrerer Variabler – eine Einführung . . . 224
5.1.1 Partielle Ableitungen . . . 224
5.1.2 Höhere partielle Ableitungen . . . 225
5.1.3 Produkt- und Kettenregel . . . 227
5.2 Anwendungsbeispiel: Die Methode der kleinsten Quadrate . . . 228
5.3 Vektoranalysis im dreidimensionalen Raum . . . 233
5.3.1 Der Nabla-Operator . . . 233
5.3.2 Die Divergenz . . . 237
5.3.3 Die Rotation . . . 240
5.3.4 Kombinationen von Gradient, Divergenz, Rotation . . . 244
5.3.5 Der Laplace-Operator . . . 245
5.4 Übungsaufgaben . . . 247

6 Integration und Integrale 249
6.1 Integration und Integrale – eine Einführung . . . 250
6.1.1 Unbestimmte und bestimmte Integrale . . . 250
6.1.2 Beispiele (un)bestimmter Integrale . . . 251
6.1.3 Geometrische Interpretation der Integration . . . 253
6.1.4 Riemann-Summen . . . 254
6.1.5 (Un)eigentliche Integrale, Hauptwertintegrale . . . 261
6.1.6 Die Substitutionsregel . . . 266
6.1.7 Partielle Integration . . . 269
6.1.8 Integrale trigonometrischer Funktionen . . . 271
6.1.9 Weitere Rekursionsmethoden . . . 275

6.1.10 Integrale rationaler Funktionen 276
6.2 Riemann-Summe und numerische Integration 280
6.2.1 Die Mittelpunktsformel 280
6.2.2 Die Trapezformel 283
6.2.3 Die Simpson-Regel 286
6.3 Zweidimensionale Integrale 289
6.3.1 Berechnung zweidimensionaler Integrale 289
6.3.2 Zweidimensionale Integrale – Beispiele 294
6.3.3 Die Integrationsreihenfolge 297
6.3.4 Polarkoordinaten 299
6.3.5 Gauß-Integrale 303
6.4 Drei- und höherdimensionale Integrale 306
6.4.1 Geometrisches Bild höherdimensionaler Integrale 307
6.4.2 Riemann-Summen in höheren Dimensionen 308
6.4.3 Kugelkoordinaten 312
6.4.4 Dreidimensionale Integrale mit sphärischer Symmetrie 315
6.4.5 Zylinderkoordinaten 319
6.5 Asymptotische Entwicklungen ∗ 320
6.5.1 Die Stirling-Formel ∗ 321
6.5.2 Beispiel einer „Störungstheorie“ ∗ 324
6.5.3 Die Gauß'sche Fehlerfunktion ∗ 326
6.5.4 Das Symbol „$\approx$“ für asymptotische Reihen ∗ 329
6.5.5 Die Integralexponentialfunktion ∗ 331
6.6 Übungsaufgaben 332

7 Differentialgleichungen 337
7.1 Differentialgleichungen, eine Einführung 337
7.1.1 Allgemeine Form gewöhnlicher Differentialgleichungen 338
7.1.2 Wachstums- und Zerfallsprozesse 339
7.1.3 Die logistische Differentialgleichung 341
7.1.4 Die harmonische Schwingung 342
7.1.5 Bewegung in allgemeinen Potentialen 344
7.1.6 Existenz? Eindeutigkeit? 348
7.2 Die Differentialgleichungen der Mechanik 350
7.2.1 Die gleichförmige, geradlinige Bewegung 351
7.2.2 Der freie Fall 351
7.2.3 Reibung in Flüssigkeiten 353
7.2.4 Reibung in Gasen 354
7.2.5 Fall mit Reibung in Flüssigkeiten 356
7.2.6 Der „schwingende Aufzug“ 357
7.2.7 Fall mit Reibung in Gasen 358
7.2.8 Reduktion auf Differentialgleichungen erster Ordnung 360
7.3 Allgemeine analytische Lösungsverfahren 361
7.3.1 Allgemeine lineare Gleichung, integrierende Faktoren 361
7.3.2 Lösung durch Variablentrennung 364
7.3.3 Beispiel: Das Lotka-Volterra-Modell 366
7.3.4 Lösung einer homogenen Differentialgleichung 373
7.3.5 Lösung durch Substitution 377

7.3.6 Lösung durch Differentiation . . . 378
7.3.7 Lösung durch Erniedrigung der Ordnung . . . 382
7.3.8 Exakte und nicht-exakte Differentiale . . . 384
7.3.9 Lösung durch Parametrisierung . . . 389
7.3.10 Lösung in der Form einer Potenzreihe . . . 396
7.4 Numerische Lösung von Differentialgleichungen . . . 410
7.4.1 Euler-Verfahren . . . 410
7.4.2 Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung . . . 416
7.4.3 Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung (Variante) . . . 417
7.4.4 Verfahren höherer Ordnung ∗ . . . 419
7.5 Übungsaufgaben . . . 421

8 Wahrscheinlichkeitsrechnung 425
8.1 Laplace-Experimente . . . 428
8.2 Die Binomialverteilung . . . 430
8.2.1 Die Verteilung von Gasatomen über zwei Teilvolumina . . . 430
8.3 Die Poisson-Verteilung . . . 433
8.4 Die Gauß-Verteilung . . . 435
8.5 Der Zentrale Grenzwertsatz . . . 438
8.6 Wahrscheinlichkeitsdichten . . . 441
8.6.1 Die Gauß-Verteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte . . . 441
8.6.2 Die Exponentialverteilung . . . 442
8.6.3 Die uniforme Verteilung . . . 444
8.6.4 Die Deltaverteilung . . . 444
8.6.5 Im Rückblick: Der Mittelwertsatz . . . 448
8.6.6 Die charakteristische Funktion . . . 450
8.6.7 Die Lorentz- oder Cauchy-Verteilung . . . 454
8.7 Übungsaufgaben . . . 456

9 Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale 459
9.1 Funktionen mehrerer Variabler . . . 459
9.1.1 Linearisierung von Funktionen mehrerer Variabler . . . 460
9.1.2 Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen . . . 461
9.1.3 Die Funktionalmatrix . . . 467
9.1.4 Die Funktionaldeterminante . . . 468
9.2 Kurvenintegrale . . . 472
9.2.1 Allgemeine Begriffe . . . 472
9.2.2 Das skalare Kurvenintegral . . . 472
9.2.3 Das vektorielle Kurvenintegral . . . 474
9.3 Flächenintegrale im dreidimensionalen Raum . . . 476
9.3.1 Allgemeine Begriffe . . . 476
9.3.2 Das skalare Flächenintegral . . . 481
9.3.3 Das vektorielle Flächenintegral . . . 485
9.3.4 Der Satz von Stokes für orientierte Flächen . . . 489
9.3.5 Der Stokes'sche Satz – erste Beispiele . . . 492
9.3.6 Der Stokes'sche Satz – ein singuläres Beispiel . . . 494
9.3.7 Berechnung der Rotation in sphärischen Koordinaten . . . 499
9.4 Integrationen über orientierte Volumina . . . 501

9.4.1 Parametrisierung eines Integrationsvolumens 502
9.4.2 Der Satz von Gauß für orientierte Volumina 505
9.4.3 Beweis des Gauß'schen Satzes 507
9.4.4 Der Gauß'sche Satz – erste Beispiele 509
9.4.5 Der Gauß'sche Satz – ein singuläres Beispiel 513
9.4.6 Konsequenzen des Gauß'schen Satzes 519
9.5 Differentiale und Differentialformen ∗ 522
9.5.1 Integration von p-Formen ∗ 530
9.5.2 Äußeres Differential von p-Formen ∗ 532
9.5.3 Ein vierdimensionales Beispiel aus der Elektrodynamik * . . 536
9.5.4 Zusammenfassung und Ausblick ∗ 538
9.6 Übungsaufgaben 540

A Lösungen zu den Übungsaufgaben 547
A.1 Zahlen 547
A.2 Folgen, Reihen und Rekursionen 556
A.3 Vektoren, Matrizen und Determinanten 561
A.4 Funktionen einer reellen Variablen 569
A.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher 574
A.6 Integration und Integrale 578
A.7 Differentialgleichungen 587
A.8 Wahrscheinlichkeitsrechnung 600
A.9 Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale 605

Liste der Symbole 619

Literaturverzeichnis 623

Stichwortverzeichnis 627

http://www.springer.com/978-3-658-07519-4

Einführungskurs Mathematik und Rechenmethoden
Für Studierende der Physik und weiterer mathematisch-naturwissenschaftlicher Fächer
van Dongen, P.
2015, XIV, 637 S. 185 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-07519-4