

3 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Nachdem die eindimensionale Theorie der reibungsfreien inkompressiblen und kompressiblen Strömung sowie die zweidimensionale Theorie der reibungsbehafteten Strömung und deren technische Anwendungen im vorangegangenen Kapitel behandelt wurden, gilt es in diesem Kapitel die allgemeinen Grundgleichungen der dreidimensionalen Strömung bereitzustellen. Diese bilden die Grundlage für die numerischen Lösungsmethoden im folgenden Kapitel 4, die heute in kommerzieller Strömungsmechanik Software genutzt werden. Sowohl der Naturwissenschaftler als auch der Ingenieur nutzen diese Software in der Praxis z. B. für die Wettervorhersage, die Berechnung des Erdmagnetfeldes, die Vorhersage von Erdbeben oder die Auslegung von Flugzeugen, Kraftfahrzeugen und Strömungsmaschinen.

Wir betrachten zur Ableitung der strömungsmechanischen Grundgleichungen die im vorigen Kapitel beschriebene Tragflügelströmung bzw. die Kraftfahrzeugumströmung und stellen uns ergänzend zur eindimensionalen Stromfadentheorie die Aufgabe, die Grundgleichungen aufzustellen, mit denen diese Strömungen berechnet werden können. Mit der Berechnung der Strömung sollen die drei Geschwindigkeitskomponenten u , v , w des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} , die Dichte ρ , der Druck p und die Temperatur T der Strömung in Abhängigkeit von den drei kartesischen Koordinaten x , y und z ermittelt werden.

Es gelten die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Wir betrachten ein infinitesimal kleines Volumenelement, dessen linke vordere untere Ecke sich an einer beliebigen Stelle im Strömungsfeld mit den Koordinaten (x, y, z) befindet und dessen Kanten jeweils parallel zu den entsprechenden Koordinatenachsen sind (Abbildung 3.1). Das betrachtete Volumenelement ist raumfest, d. h. seine Begrenzungen bewegen sich nicht mit der Strömung mit.

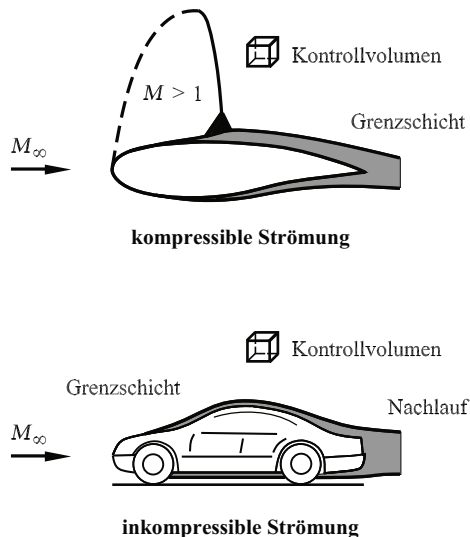


Abb. 3.1: Volumenelement in einer Tragflügel- und Kraftfahrzeugumströmung

Wir setzen voraus, dass das Fluid homogen ist, so dass es als Kontinuum behandelt werden kann.

Nacheinander werden nun die zeitlichen Änderungen von Masse, Impuls und Energie innerhalb des Volumenelements betrachtet. Wir beginnen mit der Betrachtung der zeitlichen Änderung der Masse und stellen als erste Gleichung die Kontinuitätsgleichung auf.

3.1 Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse)

Die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement =
 \sum der einströmenden Massenströme in das Volumenelement –
 \sum der ausströmenden Massenströme aus dem Volumenelement

In der Abbildung 3.2 ist das Volumenelement groß dargestellt. Seine Kanten besitzen die Längen dx , dy und dz . Durch die linke Oberfläche des Volumenelements mit der Fläche $dy \cdot dz$ tritt der Massenstrom $\rho \cdot u \cdot dy \cdot dz$ ein. Die Größe $\rho \cdot u$ ändert ihren Wert von der Stelle x zur Stelle $x + dx$ in x -Richtung um $(\partial(\rho \cdot u)/\partial x) \cdot dx$, so dass sich der durch die rechte Oberfläche $dy \cdot dz$ des Volumenelements austretende Massenstrom mit dem Ausdruck

$$(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz$$

angeben lässt. Für die y - und z -Richtung gelten die analogen Größen auf den entsprechenden Oberflächen $dx \cdot dz$ und $dx \cdot dy$.

Die zeitliche Änderung der Masse innerhalb des betrachteten Volumenelements entspricht nach der Erhaltung der Masse der Differenz aus eintretenden und austretenden Massenströmen. Der Term

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$(\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz) \cdot dx \cdot dy$$

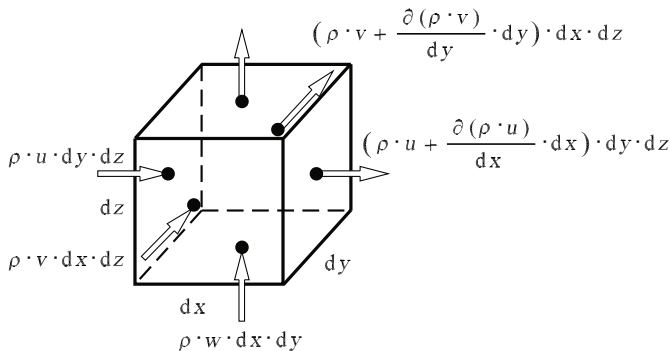


Abb. 3.2: Ein- und ausströmende Massenströme

entspricht dem mathematischen Ausdruck für die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement. Gemäß der vorigen Überlegungen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = & \left(\rho \cdot u - \left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \right) \cdot dy \cdot dz + \\ & \left(\rho \cdot v - \left(\rho \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right) \right) \cdot dx \cdot dz + \\ & \left(\rho \cdot w - \left(\rho \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right) \right) \cdot dx \cdot dy \quad . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0} \quad . \quad (3.1)$$

Für ein inkompressibles Fluid vereinfacht sie sich zu

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad . \quad (3.2)$$

In koordinatenfreier Vektorschreibweise lauten die hergeleiteten Gleichungen

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0} \quad . \quad (3.3)$$

Mit dem Operator $\nabla \cdot$ ist die Divergenz des jeweiligen Vektors bezeichnet, auf den der Operator angewendet wird. Der Nabla-Operator ∇ enthält die folgenden Komponenten

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad .$$

3.2 Navier-Stokes Gleichungen (Erhaltung des Impulses)

3.2.1 Laminare Strömungen

Die zeitliche Änderung des Impulses im Volumenelement =
 \sum **der eintretenden Impulsströme in das Volumenelement –**
 \sum **der ausströmenden Impulsströme aus dem Volumenelement +**
 \sum **der auf das Volumenelement wirkenden Scherkräfte, Normalspannungen +**
 \sum **der auf die Masse des Volumenelements wirkenden Kräfte.**

Wir kommen wieder auf das in Abbildung 3.2 gezeigte Volumenelement im Strömungsfeld zurück und betrachten nun in analoger Weise zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb des Volumenelements. Der Impuls entspricht dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Das Fluid innerhalb des Volumens besitzt also den Impuls $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{v}$, dessen zeitliche Änderung sich mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{v})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.4)$$

beschreiben lässt.

Wir wollen zunächst nur eine Komponente des Impulsvektors $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{v}$ betrachten und zwar die Komponente, die in x -Richtung zeigt. Ihre zeitliche Änderung lässt sich wie folgt ausdrücken

$$\frac{\partial(\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot u)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.5)$$

Es stellt sich nun die Frage, wodurch sich der Impuls bzw. die Impulskomponente innerhalb des betrachteten Volumenelementes zeitlich ändert.

Ähnlich wie bei der Betrachtung der Massenströme tritt pro Zeiteinheit durch die Oberflächen des Volumenelements ein Impuls in das Volumen ein bzw. aus. Bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung verwendeten wir die Größe ρ (Masse pro Volumen). Nun benutzen wir die Größe $(\rho \cdot u)$ (Impuls pro Volumen) und können mit dieser Größe, analog zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung, die ein- und ausströmenden Impulsströme angeben.

Wir betrachten dazu wieder das Volumenelement, das zusammen mit den Impulsströmen in der Abbildung 3.3 dargestellt ist. Weiterhin beschränken wir uns zunächst, wie bereits gesagt, auf die x -Richtung der zeitlichen Änderung des Impulses $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{v}$.

Durch die linke Oberfläche $dy \cdot dz$ des Volumenelements tritt der Impulsstrom

$$(\rho \cdot u) \cdot u \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot u \cdot u \cdot dy \cdot dz \quad (3.6)$$

ein. Die Größe $\rho \cdot u \cdot u$ ändert ihren Wert in x -Richtung um

$$\frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \quad , \quad (3.7)$$

so dass sich der auf der rechten Oberfläche $dy \cdot dz$ des Volumenelements austretende Impulsstrom mit dem Ausdruck

$$(\rho \cdot u \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz \quad (3.8)$$

bezeichnen lässt.

Weiterhin tritt der in x -Richtung wirkende Impuls $\rho \cdot u$ auch über die verbleibenden Oberflächen $dx \cdot dz$ und $dx \cdot dy$ ein bzw. aus, allerdings strömt er jeweils mit der Geschwindigkeitskomponente v bzw. w durch die Oberflächen.

Für die y - und z -Richtungen gelten die analogen Überlegungen, so dass sich insgesamt auf jeder Oberfläche drei Impulsströme angeben lassen (Abbildung 3.3).

Nun sind die ein- und ausströmenden Impulsströme nicht die alleinige Ursache für die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb des Volumenelements. Der Impuls innerhalb

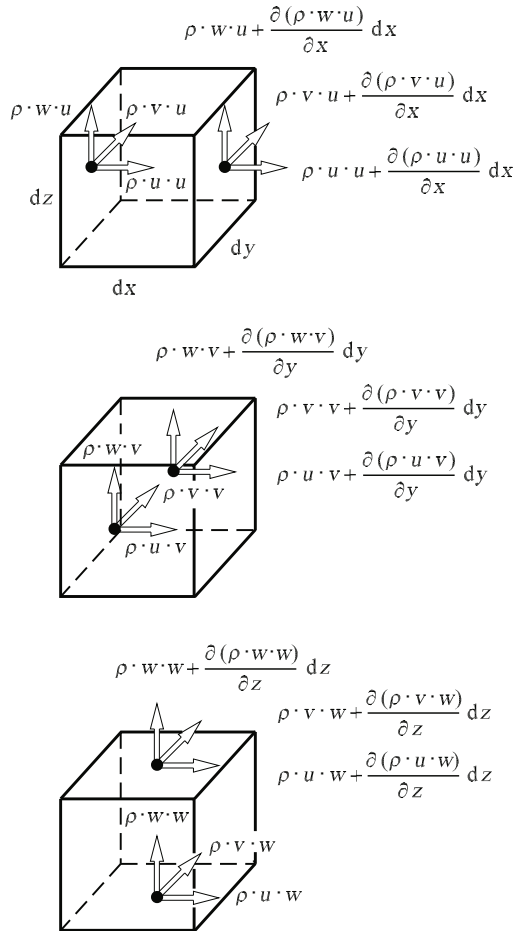


Abb. 3.3: Ein- und ausströmende Impulsströme

des Volumens wird zusätzlich durch die am Volumen angreifenden Kräfte geändert. Zu diesen Kräften gehören

- Normal- und Schubspannungen: Sie sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Ihre Größen ändern sich in x -, y - und z -Richtung, so dass an den Stellen $x + dx$, $y + dy$ und $z + dz$ jeweils ihre Größen plus der entsprechenden Änderungen eingezeichnet sind. Bezüglich der Bezeichnung und des Vorzeichens der Normal- und Schubspannungen treffen wir die folgenden Vereinbarungen: Der erste Index gibt an, auf welcher Oberfläche die Spannung wirkt. Zeigt die Normale der Oberfläche, auf der die betrachtete Spannung wirkt, z. B. in x -Richtung, so wird dies mit einem x als erstem Index gekennzeichnet. Der zweite Index gibt dann an, in welche Koordinatenrichtung die aus der Spannung resultierende Kraft wirkt (Abbildung 3.4).

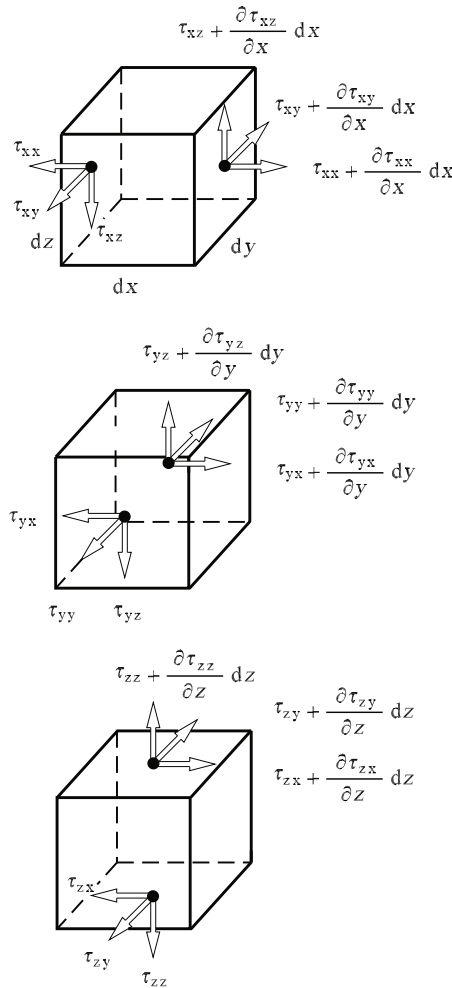


Abb. 3.4: Normal- und Schubspannungen

Eine Kraft zeigt zur Herleitung der Gleichungen in positive Koordinatenrichtung, wenn die Normale der Oberfläche in positive Koordinatenrichtung zeigt, sie zeigt in negative Richtung, wenn die Normale in negative Koordinatenrichtung weist.

- **Volumenkräfte:** Volumenkräfte sind die Kräfte, die auf die im Volumen befindliche Masse wirken. Zu ihnen gehört die Schwerkraft. Es können auch andere Volumenkräfte, wie z. B. elektrische und magnetische Kräfte, auf eine Strömung wirken. Wir bezeichnen sie mit $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Die Einheit der Volumenkraft ist $\{N/m^3\}$.

Entsprechend unseres Leitsatzes gilt

Die zeitliche Änderung des Impulses im Volumenelement =
 \sum **der eintretenden Impulsströme in das Volumenelement –**
 \sum **der ausströmenden Impulsströme aus dem Volumenelement +**
 \sum **der auf das Volumenelement wirkenden Scherkräfte, Normalspannungen +**
 \sum **der auf die Masse des Volumenelements wirkenden Kräfte.**

Daraus resultiert die Gleichung für die zeitliche Änderung des u -**Impulses** auf. Gemäß des angegebenen Satzes und den in Abbildung 3.3 dargestellten Impulsströmen, sowie den in Abbildung 3.4 dargestellten Normal- und Schubspannungen, ergibt sich für die zeitliche Änderung des Impulses $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot u$ die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = & \left(\rho \cdot u \cdot u - (\rho \cdot u \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} \cdot dx) \right) \cdot dy \cdot dz + \\
 & \left(\rho \cdot u \cdot v - (\rho \cdot u \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} \cdot dy) \right) \cdot dx \cdot dz + \\
 & \left(\rho \cdot u \cdot w - (\rho \cdot u \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} \cdot dz) \right) \cdot dx \cdot dy + \\
 & k_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \\
 & \left(-\tau_{xx} + (\tau_{xx} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} \cdot dx) \right) \cdot dy \cdot dz + \\
 & \left(-\tau_{yx} + (\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy) \right) \cdot dx \cdot dz + \\
 & \left(-\tau_{zx} + (\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz) \right) \cdot dx \cdot dy \quad . \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Mit Vereinfachung der Gleichung (3.9) erhalten wir die erste vorläufige u -Impulsgleichung für die x -Richtung. Sie lautet

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = k_x + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \quad . \quad (3.10)$$

Für die y - und z -Richtung erhalten wir mit einer analogen Rechnung die entsprechenden Gleichungen. Sie lauten wiederum

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} = k_y + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \quad ,$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot w)}{\partial z} = k_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad .$$

Diese Gleichungen beinhalten bereits die gesamte Physik bezüglich der Änderung des Impulses im Volumenelement. Jedoch stellen sich nun noch die folgenden Fragen:

- In welchem Term finden wir die Größe des Flüssigkeitsdruckes bzw., wenn wir ein Gas betrachten, den thermodynamischen Druck wieder?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Spannungen τ und den Geschwindigkeitskomponenten u , v und w ? Ein ähnlicher Zusammenhang, ist uns bereits mit dem Newtonschen Reibungsgesetz $\tau = \mu \cdot (\partial u / \partial z)$ bekannt.

Wir diskutieren zunächst die erste Frage. In einer reibungsfreien Außenströmung verschwinden alle Schubspannungen und es wirken nur noch die Normalspannungen, die wiederum alle gleich sind und dem Flüssigkeitsdruck bzw. im Falle eines Gases, dem thermodynamischen Druck entsprechen. Deshalb ist es zweckmäßig, den Druck wie folgt zu definieren

$$p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} \quad . \quad (3.11)$$

Das Minuszeichen berücksichtigt, dass der Druck als negative Normalspannung wirkt.

Die drei Normalspannungen τ_{xx} , τ_{yy} und τ_{zz} werden jeweils in zwei Anteile aufgespalten und zwar in einen Anteil p , der als Druck bezeichnet wird und in einen weiteren Anteil, der mit den Reibungseffekten des Fluids zusammenhängt und den wir nachfolgend, entsprechend der jeweiligen Richtung, mit σ_{xx} , σ_{yy} bzw. σ_{zz} bezeichnen werden. Drücken wir dies formelmäßig aus, erhalten wir

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} - p \quad , \quad \tau_{yy} = \sigma_{yy} - p \quad , \quad \tau_{zz} = \sigma_{zz} - p \quad . \quad (3.12)$$

Setzen wir τ_{xx} , τ_{yy} und τ_{zz} gemäß der Gleichungen (3.12) in die entsprechenden Gleichungen ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = \\ k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad , \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} = \\ k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad , \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} = \\ k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es bleibt nun noch übrig die zweite Frage zu beantworten. Wir suchen also den Zusammenhang zwischen den Spannungen σ bzw. τ und den Geschwindigkeitskomponenten u , v und w . Es geht um die Erweiterung des Newtonschen Reibungsgesetzes $\tau = \mu \cdot (du/dz)$, das einen linearen Ansatz zwischen den Geschwindigkeitsgradienten du/dz und der Schubspannung τ postuliert. Der nun folgende weiterreichende und für dreidimensionale Strömungen anzuwendende Stokessche Reibungsansatz, auf den wir nicht weiter eingehen wollen, beinhaltet das Newtonsche Reibungsgesetz. Er lautet

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \sigma_{yy} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \sigma_{zz} &= 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) , \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) , \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) .\end{aligned}\tag{3.16}$$

Der Stokessche Reibungsansatz erfüllt die folgende Symmetriebedingung

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} , \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} .\tag{3.17}$$

Eine Möglichkeit zum Nachweis dieser Symmetrie kann mit dem Aufstellen eines Momentengleichgewichts für die im Volumenelement enthaltene Masse erfolgen. Diese Betrachtung wird im Buch von *H. Schlichting, K. Gersten* 2006 erläutert, in dem auch der Stokessche Reibungsansatz erklärt wird.

Setzen wir die Normal- und Schubspannungen gemäß der Gleichungen (3.16) in die Impulsgleichungen (3.13), (3.14) und (3.15) ein, erhalten wir die Impulsgleichungen in Form der Navier-Stokes Gleichungen. Sie lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} &= k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] , \\ \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} &= k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} &= k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] & . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\nabla \cdot \vec{v}$ entspricht der Divergenz des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} , d. h.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad .$$

Wir wollen nun noch mit einer einfachen Rechnung die linke Seite der ersten Navier-Stokes Gleichung anders schreiben. Auf analoge Weise lassen sich die linken Seiten der restlichen Navier-Stokes Gleichungen umschreiben. Mit der Anwendung der Produktregel erhalten wir für die linke Seite der ersten Navier-Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} &= \\ \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \\ u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + u \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ u \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right) & . \end{aligned}$$

Der letzte Klammerausdruck verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung (3.1), so dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} &= \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) & . \end{aligned}$$

Für die linken Seiten der restlichen Navier-Stokes Gleichungen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} &= \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) & , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} =$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) .$$

Die Navier-Stokes Gleichungen lauten also in ihrer endgültigen Form für eine instationäre dreidimensionale und **kompresible** Strömung

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] , \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] , \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Navier-Stokes Gleichungen bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (3.1) und der Energiegleichung, die noch hergeleitet wird, die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Aus ihnen lassen sich weitere vereinfachte Gleichungen zur Berechnung von technisch interessierenden Strömungen ableiten, von denen die wichtigsten in diesem Lehrbuch noch beschrieben werden.

Wir beschränken uns zunächst auf Newtonsche Medien ($\mu \neq f(\tau)$) und auf **inkompresible** Strömungen. Die Gleichungen (3.18) vereinfachen sich dann auf die folgenden Gleichungen:

chungen (gemäß der Kontinuitätsgleichung (3.2) gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 0$)

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) , \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) , \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) , \end{aligned} \quad (3.19)$$

die wir in koordinatenfreier Schreibweise der Vektoranalysis wie folgt zusammenfassen können:

$$\boxed{\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{k} - \nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{v}} \quad . \quad (3.20)$$

In Gleichung (3.20) steht ∇p für den Gradienten von p und $(\vec{v} \cdot \nabla)$ für das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Nabla-Operator. Dies ergibt den Konvektionsoperator, der auf jede Komponente des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} angewandt wird. $\Delta \vec{v}$ steht für den auf \vec{v} angewandten Laplace-Operator. Für diese Abkürzungen gelten gemäß der Schreibweise der Vektoranalysis die folgenden Vereinbarungen

$$\begin{aligned} \nabla p &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T , \quad \vec{v} \cdot \nabla = u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z} , \\ \Delta \vec{v} &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Gleichungen (3.19) bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (3.2)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.22)$$

ein Gleichungssystem, bestehend aus **vier** skalaren partiellen nichtlinearen Differentialgleichungen von zweiter Ordnung, für die **vier** Unbekannten u, v, w und p , das für vorgegebene Anfangs- und Randbedingungen gelöst werden muss. Auf die Lösungsmethoden wird in diesem Buch später noch eingegangen.

Die Bedeutung der einzelnen Terme der Navier-Stokes-Gleichung (3.20) sowie deren Vereinfachungen für Strömungsbeispiele, die in Kapitel 2 behandelt wurden, sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Dabei werden die Volumenkräfte \vec{k} vernachlässigt. Die linke Seite der Navier-Stokes-Gleichung beschreibt die lokale und konvektive Beschleunigung, die wir bereits in Kapitel 2.3.1 kennen gelernt haben. Auch bei einer stationären Strömung mit $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ erfährt die Strömung eine konvektive Beschleunigung aufgrund der sich mit dem Ort ändernden Strömungsgrößen. Die Ursache der Strömungsbeschleunigung sind die Druck- und Reibungskräfte. Bei einer stationären ausgebildeten Rohrströmung findet keine Beschleunigung statt. Die Druckkraft ist konstant und man erhält in Zylinderkoordinaten Gleichung (2.63). Die ebene Kanalströmung führt nach zweimaliger Integration auf das parabolische Geschwindigkeitsprofil (2.66) der Poiseuille-Strömung.

Für die stationäre Plattengrenzschichtströmung wird der Druck von außen aufgeprägt und es ergibt sich die vereinfachte Navier-Stokes-Gleichung der Blasius-Grenzschicht

$$\rho \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \mu \cdot \Delta \vec{v} \quad .$$

Bei der stationären Zylinderströmung ist die Druckkraft zusätzlich zu berücksichtigen und es gilt die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{v} \quad .$$

Für die Berechnung der periodischen Wirbelablösung der Kármánschen Wirbelstraße sowie der instationären Ablösung am Profil sind alle Terme der Navier-Stokes-Gleichung (3.20) zu berücksichtigen. Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung existieren für die Strömungsbeispiele nicht. Man ist auf numerische Näherungslösungen angewiesen, die in Kapitel 4.2 beschrieben werden.

Betrachten wir ein Fluidelement, dann ist unmittelbar ersichtlich, dass Druckkräfte das Fluidelement in Richtung der Kraft verschieben und dabei verformen. Die Schubkräfte führen dagegen zu einer zusätzlichen Drehung des Fluidelementes. Dies ist für eine Grenzschicht in Abbildung 3.6 skizziert. In der reibungsfreien Außenströmung wird dem Fluidelement keine Drehung überlagert, während die Strömung in der reibungsbehafteten Grenzschicht drehungsbehaftet ist.

Der Drehvektor $\vec{\omega}$ berechnet sich aus dem Geschwindigkeitsvektor mit

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad ,$$

	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad + \quad \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad = \quad -\nabla p \quad + \quad \frac{1}{Re_L} \Delta \vec{v}$			
Strömung	lokale Beschleunigung	konvektive Beschleunigung	Druck	Reibung
Rohrströmung	✓			
Platten-grenzschicht	✓			
Zylinder-umströmung	✓			
Kármánsche Wirbelstraße	✓			
Profil-umströmung	✓			

Abb. 3.5: Vereinfachungen der Navier-Stokes-Gleichung der inkompressiblen Strömung

mit den Komponenten in Kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad .\end{aligned}$$

Integriert man ω über eine vorgegebene Oberfläche O erhält man die Zirkulation der Strömung in diesem Bereich

$$\Gamma = \int_O \vec{\omega} dO = \oint_L \vec{v} ds \quad .$$

Wird die Oberfläche ω von einer Linie L umschlossen, lässt sich das Oberflächenintegral mit dem Satz von Stokes in ein Linienintegral überführen. Die Zirkulation Γ charakterisiert die Drehung im Strömungsfeld.

Betrachten wir ein **kompressibles Fluid**, so haben wir als zusätzliche Unbekannte noch die Dichte ρ zu berücksichtigen. Dazu benötigen wir dann noch eine weitere Gleichung und zwar die **Energiegleichung**, deren Herleitung noch erläutert wird.

Kompressible Strömungen mit Wärmeübergang, die wir in Kapitel 2.4.6 kennengelernt haben, können unter Voraussetzung der Boussinesq-Annahme mit der Navier-Stokes-Gleichung (3.20) berechnet werden. Dabei wird die Dichteänderung infolge Druckänderung vernachlässigt. Infolge der Wärmeausdehnung ändert sich die Dichte jedoch mit der Temperatur. Bei Konvektionsströmungen ist dies die Ursache für die Auftriebskraft $\rho(T) \cdot \vec{g}$.

Im Rahmen der Boussinesq-Approximation wird die Dichteänderung nur im Auftriebsterm berücksichtigt und in allen anderen Termen vernachlässigt. Dabei ist der Ansatz für die Dichte:

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 - \alpha \cdot (T - T_0)) \quad , \quad (3.23)$$

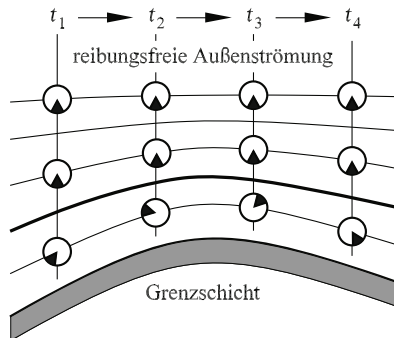


Abb. 3.6: Drehung einer Strömung in einer Grenzschicht

mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α , einer Bezugsdichte ρ_0 und einer Bezugstemperatur T_0 . Die Zähigkeit wird als konstant angenommen. Zusätzlich wird die Dissipation vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen erhält man die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \cdot \Delta \vec{v} - \rho \cdot \vec{g} \quad . \quad (3.24)$$

Hinzu kommt die Energiegleichung, die in Kapitel 3.3.1 behandelt wird.

3.2.2 Reynolds-Gleichungen für turbulente Strömungen

In den vorigen Abschnitten haben wir die Navier-Stokes Gleichungen für laminare Strömungen hergeleitet. Diese Gleichungen sind, zumindest aus der Sicht des Ingenieurs, als exakt anzusehen. Wenn wir sie mit analytischen oder numerischen Methoden für alle technischen Probleme lösen könnten, so könnten wir an dieser Stelle das Kapitel *Grundgleichungen der Strömungsmechanik* beenden und zu den Lösungsverfahren übergehen.

Die Gleichungen sind aber für die Mehrzahl der technischen Probleme nur näherungsweise lösbar und deshalb gibt es eine Reihe von modifizierten und vereinfachten Gleichungen, mit denen man das Wesentliche der Strömungsphysik erfassen und berechnen kann. Als Ingenieur muss man lernen, ein Strömungsproblem zu beurteilen um auf dieses die geeignet vereinfachten Gleichungen anzuwenden, so dass die Strömung genau berechnet bzw. mit der entsprechenden Software (Kapitel 5) auf einem Rechner simuliert werden kann.

Wir denken in diesem Zusammenhang an die in Kapitel 2 diskutierten Strömungsprobleme. Auf dem Tragflügel sind die Grenzschichten und die Nachlaufströmung für Reynoldszahlen größer $5 \cdot 10^5$ turbulent. Die Strömung um ein Kraftfahrzeug wird ebenfalls durch große turbulente Strömungsbereiche bestimmt und bei der Rohrströmung können wir davon ausgehen, dass die Strömung nach einer charakteristischen Lauflänge für Reynoldszahlen größer 2300 turbulent ist.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den modifizierten Navier-Stokes Gleichungen zur Berechnung von turbulenten Strömungen auseinandersetzen. Die vereinfachten Grundgleichungen werden dann in den nachfolgenden Abschnitten hergeleitet und deren Anwendungen erläutert. Bevor wir nun die modifizierten Gleichungen zur Berechnung von turbulenten Strömungen herleiten, müssen wir uns ergänzend zu Kapitel 2.4.1 nochmals den Grundlagen turbulenter Strömungen zuwenden und ergänzend zur **Reynolds-Mittelung** die **Favre-Mittelung** für turbulente kompressible Strömungen einführen.

Kompressible Strömungen

Wir betrachten wieder die Tragflügelströmung an zwei verschiedenen Stellen (Abbildung 3.7). Die erste Stelle, sie wird mit dem Index 1 gekennzeichnet, liegt im hinteren turbulenten Teil der Grenzschicht, an der die Strömung quasi-stationär (im zeitlichen Mittel stationär) ist. Weiterhin betrachten wir die Strömung an der Stelle mit dem Index 2 im turbulenten Nachlauf, wo die Strömung ebenfalls turbulent ist und zusätzlich im zeitlichen Mittel instationär.

In der Abbildung 3.8 sind die zeitlichen Verläufe des Betrages einer Strömungsgröße f (z. B. Geschwindigkeit, Druck etc.) an den Stellen 1 und 2 dargestellt. An beiden Stellen ändert sich die Strömung mit der Zeit, also sind streng genommen beide Strömungen als instationär anzusehen. Allerdings besitzt die Strömung an der Stelle 1 einen zeitlichen Mittelwert \bar{f} , der über die Zeit konstant ist und die betrachtete Strömungsgröße f schwankt mit nur kleinen Ausschlägen f' um diesen gemittelten Wert. Eine solche Strömung bezeichnet man als quasi-stationär. Ihren Mittelwert \bar{f} können wir mit der Gleichung

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f \cdot dt \right) \quad (3.25)$$

berechnen. Dabei gilt weiterhin

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f' \cdot dt \right) = 0 \quad . \quad (3.26)$$

An der Stelle 2 hingegen ändert sich der Mittelwert \bar{f} mit der Zeit und die Strömung wird dort als turbulent und instationär bezeichnet. Wir benutzen zur Definition wieder die bereits verwendete Gleichung

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f \cdot dt \quad . \quad (3.27)$$

Jedoch müssen wir das Mittelungsintervall $[0, T]$ geeignet groß wählen. Wird es zu groß gewählt, so wird der instationäre Verlauf herausgemittelt. Wird es zu klein gewählt, so repräsentiert der berechnete Wert nicht den tatsächlichen Mittelwert.

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die wir in den vorigen Abschnitten hergeleitet haben, beinhalten auch die Physik der Schwingungsbewegungen. Um diese allerdings für technische Probleme mit numerischen Verfahren berechnen zu können, müssten Rechner mit einer sehr großen Speicherkapazität und Rechenleistung zur Verfügung stehen, um die zeitlichen Verläufe und räumlichen Strukturen der turbulenten Schwingungen ausreichend auflösen zu können. Solche Rechner wird es auch in absehbarer Zeit nicht geben, so dass man gezwungen ist, für die Berechnung von technischen Strömungen die Schwingungsbewegungen mit sogenannten Turbulenzmodellen näherungsweise zu modellieren.

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Grundgleichungen der Strömungsmechanik dahingehend modifizieren, dass in ihnen die Turbulenzmodelle berücksichtigt werden können.

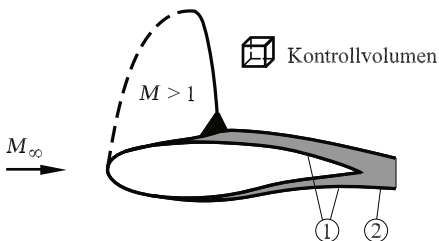


Abb. 3.7: Tragflügelströmung

Dazu werden wir die Grundgleichungen zeitlich mitteln. Die Turbulenzmodellierung, die immer noch ein Aufgabengebiet der Forschung ist, wird in einem nachfolgenden Abschnitt in ersten Ansätzen ausgeführt.

Wir führen zunächst die folgenden massengemittelten Größen ein

$$\tilde{u} = \frac{\overline{\rho \cdot u}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{v} = \frac{\overline{\rho \cdot v}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{w} = \frac{\overline{\rho \cdot w}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho \cdot T}}{\bar{\rho}} \quad , \quad \tilde{e} = \frac{\overline{\rho \cdot e}}{\bar{\rho}} \quad . \quad (3.28)$$

Mit dem Überstreichen der Produkte, z. B. von $\overline{\rho \cdot u}$, ist gemäß der Gleichung (3.25) (bzw. gemäß Gleichung (3.27)) die zeitliche Mittelung

$$\overline{\rho \cdot u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot u) \cdot dt \right) \quad (3.29)$$

gemeint, die man auch **Favre-Mittelung** nennt.

Die Größen u, v usw. lassen sich nun aus den zeitlichen Mittelwerten gemäß den Gleichungen (3.28) und einer Schwankungsgröße, die wir nachfolgend mit zwei Strichen kennzeichnen, zusammensetzen. Dabei werden der Druck p und die Dichte ρ (trivialerweise) nicht massengemittelt. Ihre Schwankungsgrößen werden mit nur einem Strich gekennzeichnet. Wir definieren also die folgenden Größen

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \quad , & p &= \bar{p} + p' \quad , \\ u &= \tilde{u} + u'' \quad , & v &= \tilde{v} + v'' \quad , & w &= \tilde{w} + w'' \quad , \\ T &= \tilde{T} + T'' \quad , & e &= \tilde{e} + e'' \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Es ist wichtig zu vermerken, dass die zeitlich gemittelten Größen von f'' (f'' steht für eine beliebige Schwankungsgröße um \tilde{u}, \tilde{v} , usw.), also $\overline{f''}$, nicht Null sind. Hingegen ist die Größe $\overline{\rho \cdot f''}$, wie nachfolgend gezeigt, Null. Um dies zu zeigen, betrachten wir das Produkt $\rho \cdot u$. Gemäß der eingeführten Definition gilt

$$\rho \cdot u = \rho \cdot (\tilde{u} + u'') = \rho \cdot \tilde{u} + \rho \cdot u'' \quad .$$

Durch das zeitliche Mitteln des Ausdrucks erhalten wir

$$\overline{\rho \cdot u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot \tilde{u} + \rho \cdot u'') \cdot dt \right) =$$

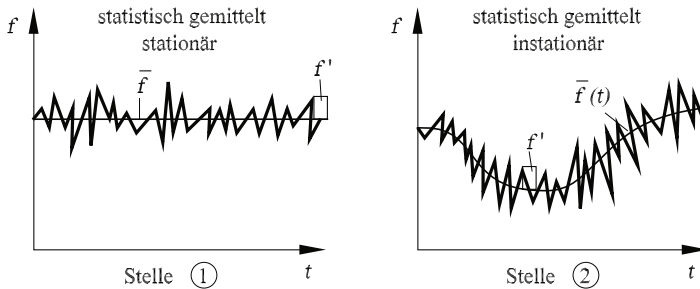


Abb. 3.8: Zeitlich gemittelte Größen

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot \tilde{u}) \cdot dt \right) + \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (\rho \cdot u'') \cdot dt \right) = \\
&= \tilde{u} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \rho \cdot dt \right) + \overline{\rho \cdot u''} = \bar{\rho} \cdot \tilde{u} + \overline{\rho \cdot u''} \quad .
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\overline{\rho \cdot u}}{\bar{\rho}} = \tilde{u} + \frac{\overline{\rho \cdot u''}}{\bar{\rho}} \quad .$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Definitionsgleichung für \tilde{u} , so erkennen wir, dass gilt: $\overline{\rho \cdot u''} = 0$.

Weiterhin gelten die folgenden Rechenregeln für zwei beliebige Größen f und g (dem Leser wird empfohlen, die Rechenregeln selbst nachzuvollziehen)

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad , \quad \overline{\bar{f} + \bar{g}} = \bar{f} + \bar{g} \quad , \quad \overline{\rho' \cdot \tilde{f}} = 0 \quad . \quad (3.31)$$

Mit den nun bekannten Rechenregeln ist es möglich, die Grundgleichungen zeitlich zu mitteln. Wir beginnen mit der zeitlichen Mittelung der Kontinuitätsgleichung, d.h wir wollen herausfinden, wie sich die Gleichung verändert, wenn wir sie nicht nur für einen Zeitpunkt betrachten, sondern für ein **Zeitintervall**. Da wir die Gleichungen für eine instationäre Strömung mitteln wollen, muss das Zeitintervall $[0, T]$, wie bereits diskutiert, geeignet groß gewählt werden (deshalb steht in den nachfolgenden Gleichungen nicht mehr $\lim_{T \rightarrow \infty}$).

Die zeitliche Mittelung schreibt sich für die Kontinuitätsgleichung wie folgt

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot dt = 0$$

oder

$$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}} = 0 \quad . \quad (3.32)$$

Setzen wir in die Gleichung (3.32) die Größen u , v und w gemäß der Gleichungen (3.30) ein, so können wir mit den Rechenregeln (3.31) und mit $\rho \cdot f'' = 0$ die folgende Rechnung durchführen

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial[\rho \cdot (\tilde{u} + u'')]}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial[\rho \cdot (\tilde{v} + v'')]}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial[\rho \cdot (\tilde{w} + w'')]}{\partial z}} &= 0 \quad , \\
\overline{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial[\bar{\rho} \cdot (\tilde{u} + u'')]}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial[\bar{\rho} \cdot (\tilde{v} + v'')]}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial[\bar{\rho} \cdot (\tilde{w} + w'')]}{\partial z}} &= 0 \quad , \\
\overline{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial[\bar{\rho} \cdot (\tilde{u}_i + u''_i)]}{\partial x_i}} &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Der zweite Summand beinhaltet die abkürzende Schreibweise für die drei Koordinaten- und Geschwindigkeitsrichtungen ($i = 1, \dots, 3$). Für ihn gilt weiterhin

$$\frac{\partial[\overline{\rho \cdot (\tilde{u}_i + u_i'')}] }{\partial x_i} = \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u}_i})}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u_i''})}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial x_i} \quad .$$

Die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung lautet also

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{w})}{\partial z} = 0} \quad . \quad (3.33)$$

Sie hat sich gegenüber der ursprünglichen Kontinuitätsgleichung rein äußerlich kaum verändert und enthält jetzt nicht mehr die Größen ρ und u_i , sondern $\bar{\rho}$ und \tilde{u}_i .

Es folgt nun die zeitliche Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen, die in analoger Weise wie die Mittelung der Kontinuitätsgleichung durchgeführt wird. Dabei beschränken wir uns wieder auf die Gleichung für die x -Richtung und schreiben (s. dazu Gleichung (3.13))

$$\frac{\partial(\overline{\rho \cdot u})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u \cdot v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u \cdot w})}{\partial z} = k_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} \quad ,$$

mit

$$\sigma_{xx} = \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \quad , \quad \tau_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad .$$

Mit den eingeführten Rechenregeln (3.31) erhalten wir

$$\frac{\partial(\overline{\rho \cdot u})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u \cdot v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u \cdot w})}{\partial z} = k_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} \quad . (3.34)$$

Gemäß der Definition von \tilde{u} ist $\overline{\rho \cdot u} = \bar{\rho} \cdot \tilde{u}$, so dass in der Gleichung (3.34) alle Summanden der linken und rechten Seite gemittelt bekannt sind, außer drei Summanden der linken Seite, die die räumlichen partiellen Ableitungen enthalten. Sie wollen wir nachfolgend weiter betrachten, indem wir in diese Glieder für u , v und w die entsprechenden Ausdrücke gemäß der Gleichungen (3.30) einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\overline{\rho \cdot (\tilde{u} + u'')^2}]}{\partial x} + \frac{\partial[\overline{\rho \cdot (\tilde{u} + u'') \cdot (\tilde{v} + v'')}] }{\partial y} + \frac{\partial[\overline{\rho \cdot (\tilde{u} + u'') \cdot (\tilde{w} + w'')}] }{\partial z} = \\ & \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u}^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u''^2})}{\partial x} + \frac{\partial(2 \cdot \overline{\rho \cdot \tilde{u} \cdot u''})}{\partial x} + \\ & \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{v}})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u} \cdot v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot \tilde{v}})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot v''})}{\partial y} + \\ & \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{w}})}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot \tilde{u} \cdot w''})}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot \tilde{w}})}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot w''})}{\partial z} = \\ & \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u''^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot v''})}{\partial y} + \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot u'' \cdot w'')}{\partial z} .$$

Setzen wir das Ergebnis der Rechnung in die Gleichung (3.34) ein, erhalten wir die Reynolds-Gleichung für die x -Richtung. Sie lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{w})}{\partial z} = \\ \bar{k}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot u''^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot u'' \cdot v'')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot u'' \cdot w'')}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Für die zeitlich gemittelten Normal- und Schubspannungen σ_{xx} , τ_{yx} und τ_{zx} erhalten wir mit einer einfachen zusätzlichen Rechnung die ergänzenden Gleichungen

$$\bar{\sigma}_{xx} = \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \right) + \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial \bar{u}''}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}'') \right) , \quad (3.36)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j''}{\partial x_i} \right) . \quad (3.37)$$

Die Ausdrücke $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ und $\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}''$ stehen für die Divergenzen

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} , \quad \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} + \frac{\partial w''}{\partial z} .$$

Die Gleichung (3.35) enthält im Vergleich zu der Navier-Stokes Gleichung auf der rechten Seite zusätzliche Glieder, mit denen die Schwankungsbewegungen der Strömung berücksichtigt werden. Diese Glieder sind Trägheitsglieder, denn sie rühren von den konvektiven nichtlinearen Termen her.

Die durch die Schwankungen verursachten Trägheitskräfte in der Strömung erwecken den Eindruck, dass in der Strömung eine zusätzliche Reibung wirksam ist. Deshalb werden diese Schwankungsterme auch als zusätzliche Reibungsglieder interpretiert, obwohl sie direkt nichts mit den Reibungseffekten gemeinsam haben. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von turbulenter Scheinreibung.

Weiterhin haben die Schwankungsbewegungen einen Einfluss auf die zeitlich gemittelten Normal- und Schubspannungen, wie wir es jeweils an dem zweiten Summanden der Gleichungen (3.36) und (3.37) erkennen können. Diese zuletzt genannten Summanden werden jedoch bei der Berechnung von Strömungsfeldern vernachlässigt, da ihr Einfluss auf die Ergebnisse der Strömungsberechnungen bekannterweise gering ist.

Die zusätzlichen Terme in der Gleichung (3.35) müssen für turbulente Strömungen geeignet modelliert werden (für laminare Strömungen sind sie verständlicherweise Null). Dazu gibt es Turbulenzmodelle.

Nachfolgend werden nun alle drei Reynolds-Gleichungen für die x -, y - und z -Richtung angegeben. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{w})}{\partial z} &= \tilde{k}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho \cdot u''^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot u'' \cdot w''})}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{w})}{\partial z} &= \tilde{k}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho \cdot v'' \cdot u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot v''^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot v'' \cdot w''})}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{w})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot \tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot \tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{w}^2)}{\partial z} &= \tilde{k}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \left(\frac{\partial(\overline{\rho \cdot w'' \cdot u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot w'' \cdot v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho \cdot w''^2})}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit

$$\bar{\sigma}_{ii} = \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \right) + \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}''}) \right), \quad (3.41)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \cdot \left(\frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_i} \right). \quad (3.42)$$

Inkompressible Strömungen

Für inkompressible Strömungen ($\rho = \text{konst.}$) vereinfachen sich die Gleichungen (3.28) und (3.30)

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \bar{u}, & \tilde{v} &= \bar{v}, & \tilde{w} &= \bar{w}, \\ u &= \bar{u} + u', & v &= \bar{v} + v', & w &= \bar{w} + w', & p &= \bar{p} + p'. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (3.44)$$

Die zeitlich gemittelten Navier-Stokes Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u} \cdot \bar{w})}{\partial z} \right) &= \bar{k}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} - \rho \cdot \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u' \cdot v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u' \cdot w'})}{\partial z} \right) , \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v} \cdot \bar{w})}{\partial z} \right) &= \bar{k}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} - \rho \cdot \left(\frac{\partial(\overline{v' \cdot u'})}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v' \cdot w'})}{\partial z} \right) , \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{w} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{w} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) &= \bar{k}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial z} - \rho \cdot \left(\frac{\partial(\overline{w' \cdot u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{w' \cdot v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'^2})}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.2.3 Turbulenzmodelle

Mit dem Herleiten der Reynolds-Gleichungen haben wir erreicht, dass wir bei der Berechnung von turbulenten Strömungen die Schwankungsbewegungen berücksichtigen können, ohne sie dabei detailliert zeitlich und räumlich auflösen zu müssen. Die zusätzlichen Terme, die die Schwankungsgrößen beinhalten, werden mit Turbulenzmodellen bestimmt. In diesem Abschnitt werden wir lernen, wie wir mit zusätzlichen Modellvorstellungen die Schwankungsterme für die jeweiligen technischen Strömungsprobleme ermitteln können.

Die Gleichungen (3.38) bis (3.40) können wir mit der folgenden vektoriellen Schreibweise zusammenfassen

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{\vec{v}})}{\partial t} + \bar{\rho} \cdot (\tilde{\vec{v}} \cdot \nabla) \tilde{\vec{v}} = \tilde{\vec{k}} - \nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\tau} + \nabla \cdot \tau_t , \quad (3.48)$$

mit

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\tau}_{yx} & \bar{\tau}_{zx} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\tau}_{zy} \\ \bar{\tau}_{xz} & \bar{\tau}_{yz} & \bar{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} , \quad \tau_t = \begin{pmatrix} -\overline{\rho \cdot u'^2} & -\overline{\rho \cdot u'' \cdot v''} & -\overline{\rho \cdot u'' \cdot w''} \\ -\overline{\rho \cdot v'' \cdot u''} & -\overline{\rho \cdot v'^2} & -\overline{\rho \cdot v'' \cdot w''} \\ -\overline{\rho \cdot w'' \cdot u''} & -\overline{\rho \cdot w'' \cdot v''} & -\overline{\rho \cdot w'^2} \end{pmatrix} . \quad (3.49)$$

In der Gleichung (3.48) ist auch der Ausdruck $(\tilde{\vec{v}} \cdot \nabla) \tilde{\vec{v}}$ ein Vektor.

Die meisten für technische Strömungsprobleme anwendbaren Turbulenzmodelle basieren auf der Boussinesq-Annahme, die wir bereits in Kapitel 2.4.1 kennengelernt haben. Bous-

sinesq schlug bereits im Jahre 1877 vor, die Schwankungsgrößen im rechten Tensor (3.49) mit einem Ansatz zu modellieren, der analog zur Berechnung der Normal- und Schubspannungen des linken Tensors (3.49) gilt.

Für die Schubspannungen $\bar{\tau}_{ij}$ gilt gemäß der Gleichung (3.42), wenn wir den zweiten Summanden dieser Gleichung (er ist sehr klein) vernachlässigen

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.50)$$

Die Boussinesq-Annahme geht davon aus, dass die Schwankungsgrößen $-\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''}$ in Analogie zur Gleichung (3.50) ermittelt werden können:

$$\boxed{-\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)} \quad (3.51)$$

μ_t wird als Austauschgröße oder als turbulente Viskosität beziehungsweise Wirbelviskosität bezeichnet. Diese steht in keinem direkten Zusammenhang mit der molekularen Zähigkeit, obwohl der Begriff 'turbulente Viskosität' darauf hindeutet. Wir haben bereits gelernt, dass die Terme des rechten Tensors (3.49) Trägheitsterme sind.

Turbulenzmodelle, die auf der Boussinesq-Annahme basieren, beschränken sich auf die Modellierung der Austauschgröße μ_t . Sie beinhalten Gleichungen, mit denen die Austauschgröße in Abhängigkeit von den mittleren Strömungsgrößen $\bar{\rho}$, \tilde{u} usw. berechnet werden kann. Es gibt je nach Strömungsproblem vergleichsweise einfache Turbulenzmodelle, die mit algebraischen Gleichungen die Austauschgröße angeben und wiederum kompliziertere, bei deren Anwendung partielle Differentialgleichungen gelöst werden müssen.

Turbulenzmodelle werden in der Literatur gemäß der Anzahl der partiellen Differentialgleichungen, die ein Modell beinhaltet, geordnet. So spricht man bei den algebraischen Turbulenzmodellen von Null-Gleichungsmodellen. Enthält ein Turbulenzmodell zur Beschreibung der Austauschgröße eine partielle Differentialgleichung, so wird dieses als ein Ein-Gleichungsmodell bezeichnet. Ein Zwei-Gleichungsmodell besitzt demzufolge zwei partielle Differentialgleichungen und stellt bei der Anwendung auf technische Probleme bezüglich des Aufwandes eine obere Grenze dar, insbesondere dann, wenn die Turbulenz von dreidimensionalen Strömungen modelliert wird.

Bei der Auswahl eines Turbulenzmodells zur Berechnung einer turbulenten Strömung müssen immer die beiden folgenden Punkte beachtet werden:

- Ein Turbulenzmodell ist in der Regel nur für eine bestimmte Strömung anwendbar. So gibt es z. B. Turbulenzmodelle für Strömungen mit starken Druckgradienten, kleinen Reynolds-Zahlen, für freie Scherströmungen und für Strömungen an rauen Oberflächen usw.. Vor der Anwendung muss geklärt werden, welche Art von Strömung berechnet werden soll.
- Jedes Turbulenzmodell basiert auf experimentellen Ergebnissen, die wiederum für festgelegte Reynolds- und Mach-Zahlbereiche sowie zusätzliche Parameter ermittelt wurden. Die in dem Turbulenzmodell enthaltenen Konstanten beziehen sich auf diese experimentellen Ergebnisse. Vor der Berechnung der Strömung muss also geprüft

werden, ob die im Turbulenzmodell enthaltenen Konstanten passend für die zu berechnende Strömung sind.

Wir werden nun nacheinander die einfachen (Null-Gleichungsmodelle) und die aufwendigeren (Ein- und Zwei-Gleichungsmodelle) kennenlernen. Alle basieren auf der Boussinesq-Annahme und setzen isotrope turbulente Strömungen voraus.

Einfache algebraische oder Null-Gleichungsmodelle

Zunächst beschränken wir uns auf eine zweidimensionale Grenzschichtströmung, um eine Vorstellung von der Methode der Turbulenzmodellierung zu erhalten. Eines der erfolgreichsten Turbulenzmodelle für eine Grenzschichtströmung ist von Prandtl im Jahre 1920 vorgeschlagen worden. Es beinhaltet das Mischungswegkonzept, das bereits im Kapitel 2.4.1 beschrieben wurde. Für detaillierte Ausführungen verweisen wir auf die Bücher von *L. Prandtl* – Führer durch die Strömungslehre, *H. Oertel jr.* 2008, *H. Schlichting*, *K. Gersten* 2006, *B. E. Launder*, *D. B. Spalding* 1979 und von *J. Piquet* 2001.

Daraus resultiert die Gleichung für die Berechnung der turbulenten Schubspannung μ_t

$$\mu_t = \bar{\rho} \cdot l^2 \cdot \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right| \quad , \quad (3.52)$$

mit der Mischungsweglänge l . Sie ist eine Funktion der Wandnormalenkoordinate und wird für die unterschiedlichen Turbulenzmodelle verschieden angegeben.

Für die Berechnung der Tragflügelströmungen wählen wir das Turbulenzmodell von *B. S. Baldwin*, *H. Lomax* 1978 aus, das nachfolgend beschrieben wird (s. dazu auch *T. Cebeci*, *A. M. O. Smith* 1974). Es basiert auf der Boussinesq-Annahme und nutzt zur Modellierung der Austauschgröße μ_T im wandnahen Bereich das Prandtlsche Mischungswegkonzept.

Baldwin und Lomax teilen die turbulente Prandtl-Grenzschicht in einen inneren und äußeren Bereich ein. Die Austauschgröße μ_t wird für den inneren Bereich gemäß des Prandtlschen Mischungswegkonzeptes berechnet und im äußeren Bereich mit einer algebraischen Gleichung, die auf Ergebnissen von Grenzschichtuntersuchungen beruht. Für

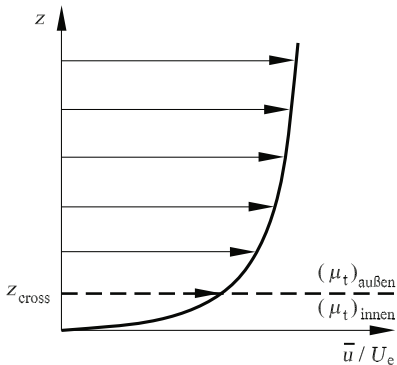


Abb. 3.9: Bereichseinteilung der turbulenten Grenzschicht

μ_t gilt also die folgende Aufspaltung der Abbildung 3.9

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{\text{innen}} & z < z_{\text{cross}} \\ (\mu_t)_{\text{außen}} & z > z_{\text{cross}} \end{cases} . \quad (3.53)$$

z_{cross} steht für die Wandnormalenkoordinate, die die Grenze zwischen dem inneren und äußeren Bereich bildet. Baldwin und Lomax haben die Gleichung (3.52) für dreidimensionale Grenzschichtströmungen erweitert. Sie berechnen für den inneren Bereich die Austauschgröße mit der Gleichung

$$(\mu_t)_{\text{innen}} = \bar{\rho} \cdot l^2 \cdot |\tilde{\omega}| \quad (3.54)$$

l steht wiederum für die Mischungsweglänge und ω für die Drehung der Strömung. Die Mischungsweglänge wird mit der Prandtl-Van-Driest-Gleichung

$$l = \kappa \cdot z \cdot [1 - \exp(-\frac{z^+}{A^+})]$$

berechnet, wobei

$$z^+ = \frac{\sqrt{\bar{\rho}_w \cdot \tau_w} \cdot z}{\mu} \quad (3.55)$$

ist (Index w für Größen auf der Kontur bzw. Wand). Für die Drehung gilt (s. dazu Abbildung 3.10)

$$|\tilde{\omega}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)^2} .$$

Die Drehung ω unterscheidet sich nicht wesentlich von dem Gradienten $\partial \tilde{u} / \partial z$, da alle Gradienten im Vergleich zu $\partial \tilde{u} / \partial z$ klein sind. Für die Anwendung des Baldwin-Lomax-Modells benötigt man nicht die Dicke der Grenzschicht, was wiederum bei der Anwendung anderer Turbulenzmodelle der Fall sein wird und die Durchführung von Rechnungen erschwert.

Die Gleichungen zur Berechnung der Mischungsweglänge beinhalten die Konstanten κ und A^+ . Sie sind in der Tabelle 3.1 angegeben.

Die Austauschgröße $(\mu_t)_{\text{außen}}$ berechnet sich gemäß den Angaben von Baldwin und Lomax mit der algebraischen Gleichung

$$(\mu_t)_{\text{außen}} = \bar{\rho} \cdot K \cdot C_{CP} \cdot F_{\text{WAKE}} \cdot F_{\text{KLEB}} \quad (3.56)$$

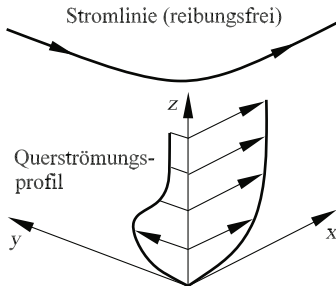


Abb. 3.10: Dreidimensionales Grenzschichtprofil

K und der Clauser-Parameter C_{CP} sind Konstanten (Tabelle 3.1). $F_{KLEB}(z)$ ist die Intermitenzfunktion von Klebanoff, die eine Funktion der Wandnormalenkoordinate z ist. Die Größe F_{WAKE} berechnet sich mit der Gleichung

$$\begin{aligned} F_{WAKE} &= \min(F_1, F_2) \quad , \\ F_1 &= z_{\max} \cdot F_{\max} \quad , \\ F_2 &= C_{WK} \cdot z_{\max} \cdot \frac{U_{DIF}^2}{F_{\max}} \quad . \end{aligned} \quad (3.57)$$

F_{\max} ist das Maximum der Funktion

$$F(z) = z \cdot |\tilde{\omega}| \cdot [1 - \exp(-\frac{z^+}{A^+})] \quad , \quad (3.58)$$

das an der Stelle $z = z_{\max}$ auftritt. Die Größe U_{DIF} berechnet sich mit der Gleichung

$$U_{DIF} = (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})_{\max} - (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})_{\min} \quad . \quad (3.59)$$

(Index max bzw. min für größten bzw. kleinsten Wert in der Grenzschicht). Der zweite Summand der Gleichung (3.59) wird für die Modellierung der Turbulenz in Grenzschichten Null gesetzt. Für die Modellierung der Turbulenz von Nachläufen muss die vollständige Gleichung (3.59) verwendet werden.

Die Intermitenzfunktion von Klebanoff F_{KLEB} lautet

$$F_{KLEB}(z) = \left[1 + 5.5 \cdot \left(\frac{C_{KLEB} \cdot z}{z_{\max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad . \quad (3.60)$$

Es bleibt noch die Frage offen, ab welcher Stelle z in der Grenzschicht von dem Wert $(\mu_t)_{\text{innen}}$ zum Wert $(\mu_t)_{\text{außen}}$ übergegangen werden muss. Die Stelle $z = z_{\text{cross}}$ ist die Stelle, wo bei zunehmenden z zum ersten Mal gilt: $(\mu_t)_{\text{innen}} = (\mu_t)_{\text{außen}}$.

Dem Leser des Buches stellt sich sicherlich die Frage, mit welchen Überlegungen sich die Konstanten und Gleichungen des Turbulenzmodells von Baldwin und Lomax begründen. Die Gleichungen und Konstanten basieren größtenteils auf experimentellen Ergebnissen. Es würde bei weitem den Rahmen dieses Lehrbuches sprengen, alle Gleichungen ausführlich zu diskutieren.

Wir haben das Turbulenzmodell von Baldwin und Lomax nur deshalb so ausführlich in diesem Buch beschrieben, da wir dem Leser einen Eindruck von der **praktischen** Anwendung eines einfachen algebraischen Turbulenzmodells geben wollen. Zudem werden

A^+	C_{CP}	C_{KLEB}	C_{WK}	κ	K	Pr	Pr_t
26	1.6	0.3	0.25	0.4	0.0168	0.72	0.9

Tab. 3.1 : Konstanten des Turbulenzmodells von Baldwin und Lomax

wir in diesem Buch noch numerische Rechnungen zur Tragflügelströmung, bei denen die Turbulenz mit dem Modell von Baldwin und Lomax berücksichtigt wurde, vorstellen.

Zur Berechnung der kompressiblen Tragflügelströmung benötigen wir nicht nur die zeitlich gemittelten Impulsgleichungen, sondern zusätzlich die zeitlich gemittelte Energiegleichung, die wir in Kapitel 3.3.2 behandeln werden. In dieser Gleichung treten auch Schwankungsgrößen auf, die entsprechend modelliert werden müssen.

In Gleichung (3.109) sind die Terme $\overline{u_i \cdot (\partial p / \partial x_j)}$ und $\lambda \cdot \overline{(\partial T'' / \partial x_i)}$ klein im Vergleich zu den Termen $\overline{\partial(-c_p \cdot \rho \cdot T'' \cdot u_j'') / \partial x_i}$. Entsprechendes gilt für die Gleichung (3.110). Die Terme $\overline{\sigma_{kk} \cdot (\partial u_k'' / \partial x_k)}$ und $\overline{\tau_{ij} \cdot (\partial u_i'' / \partial x_j)}$ sind im Vergleich zu den Gliedern $\overline{\tilde{\sigma}_{kk} \cdot (\partial \tilde{u}_k / \partial x_k)}$ bzw. $\overline{\tilde{\tau}_{ij} \cdot (\partial \tilde{u}_i / \partial x_j)}$ zu vernachlässigen. Die Turbulenzmodellierung bezüglich der Energiegleichung beschränkt sich also auf die Glieder

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u_i''}) \quad , \quad (3.61)$$

die den zusätzlichen Wärmefluss infolge der turbulenten Schwankungsbewegungen beschreiben.

Für diese Glieder wird in Analogie zur Boussinesq-Annahme der folgende Wärmeleitungsansatz gemacht. Er lautet

$$-c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u_i''} = -\lambda_t \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad . \quad (3.62)$$

λ_t steht für die turbulente Leitfähigkeit. Sie steht in keinem direkten Zusammenhang mit der molekularen Wärmeleitfähigkeit λ , sondern ist, wie die turbulente Viskosität μ_t , als eine Austauschgröße zu verstehen.

Um sie berechnen zu können, wird die turbulente Prandtlzahl eingeführt, die wie folgt definiert ist

$$\boxed{Pr_t = \mu_t \cdot \frac{c_p}{k_t} \quad , \quad k_t = \frac{\mu_t \cdot c_p}{Pr_t} \quad .} \quad (3.63)$$

Verwenden wir den Ausdruck für k_t in Gleichung (3.62), haben wir eine Berechnungsmöglichkeit für die Schwankungsgrößen $-c_p \cdot \rho \cdot T'' \cdot u_i''$, vorausgesetzt wir kennen die turbulente Prandtlzahl.

Gemäß vieler gebräuchlicher Turbulenzmodelle wird die turbulente Prandtlzahl Pr_t mit einem Wert nicht wesentlich kleiner eins, z. B. mit $Pr_t = 0.9$, angenommen. Experimente, die für Wandgrenschichten durchgeführt wurden zeigen jedoch, dass die turbulente Prandtlzahl am äußeren Rand $\approx 0.6 - 0.7$ beträgt und nach innen bis auf den Wert 1.5 zunimmt.

Ein typisches Anwendungsbeispiel für das Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell ist die Umströmung eines transsonischen Tragflügels, dessen Profilschnitt in Abbildung 3.11 gezeigt ist. Das Turbulenzmodell der kompressiblen Grenzschichtströmung wird an der Hinterkante des Profils in die Nachlaufströmung übergeführt.

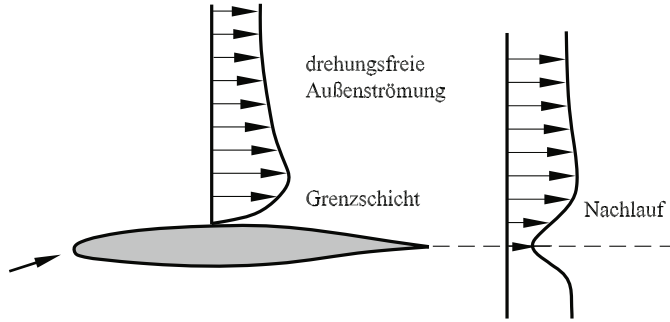


Abb. 3.11: Anwendungsbeispiel für das Baldwin-Lomax-Turbulenzmodell

Die Vorteile der algebraischen Turbulenzmodelle liegen auf der Hand. Sie sind einfach in numerische Verfahren zu integrieren und verursachen bei ihrer Anwendung wenig Rechenzeit, da nur einfache algebraische Gleichungen und keine komplizierten gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen gelöst werden müssen.

Andererseits werden die turbulenten Austauschgrößen μ_t und k_t nur in Abhängigkeit von den örtlichen Geschwindigkeitsprofilen berechnet. Bei der Berechnung wird nicht das turbulente Verhalten der Strömung stromauf oder stromab berücksichtigt. Außerdem beschreiben die algebraischen Modelle, die auf dem Prandtlschen Mischungswegkonzept basieren, die Turbulenz an Stellen mit $(\partial \tilde{u} / \partial z) = 0$ falsch. Experimente zeigen, dass z. B. in der turbulenten Rohrströmung die Turbulenz auf der Mittellinie des Rohres nicht verschwindet. Aus diesen Gründen sind kompliziertere Turbulenzmodelle entwickelt worden.

Ein-Gleichungsmodelle

Wir beschränken uns nachfolgend auf die Turbulenzmodellierung von inkompressiblen Strömungen. Die nachfolgend beschriebenen Modelle können mit Zusatztermen auf kompressible Strömungen entsprechend erweitert werden.

Ein-Gleichungsmodelle beinhalten in der Regel eine partielle Differentialgleichung für die Turbulenzenergie. Die Turbulenzenergie k' ist wie folgt definiert

$$\boxed{K' = k'^2 = \frac{1}{2} \cdot (u'^2 + v'^2 + w'^2)} \quad . \quad (3.64)$$

Wir führen noch zusätzlich die zeitlich gemittelte Turbulenzenergie ein. Die Gleichung dazu lautet

$$\boxed{K = \overline{k'^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{1}{2} \cdot (u'^2 + v'^2 + w'^2) \right) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)}} \quad . \quad (3.65)$$

Die Turbulenzenergie ist ein Maß für die Intensität der Turbulenz. Wir werden nun eine partielle Differentialgleichung für die zeitlich gemittelte Turbulenzenergie \bar{k} aufstellen. Auf ihr basieren die Ein- und Zwei-Gleichungsmodelle.

Die Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible Strömungen können wir abgekürzt wie folgt aufschreiben

$$\rho \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \cdot \left[u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \cdot \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right] \quad . \quad (3.66)$$

Mit x_i bzw. x_j sowie u_i bzw. u_j sind jeweils die Koordinatenrichtungen x, y, z bzw. die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w gemeint. Der Index $i = 1, 2, 3$ kennzeichnet die jeweilige Gleichung für die entsprechende Koordinatenrichtung. Mit dem Index $j = 1, 2, 3$ ist ein Summationsindex gemeint. So ist mit den in eckigen Klammern stehenden Gliedern konkret Folgendes gemeint

$$\left[u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^3 u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad , \quad \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right] = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad .$$

Wir behalten nachfolgend diese abkürzende Schreibweise bei, um die Herleitung übersichtlicher aufzuschreiben.

In der Gleichung (3.66) ersetzen wir die Geschwindigkeit u_i, u_j und den Druck p durch die zeitlichen Mittelwerte \bar{u}_i, \bar{u}_j bzw. \bar{p} plus der entsprechenden Schwankungsgröße u'_i, u'_j bzw. p' und multiplizieren sie auf beiden Seiten mit der Schwankungsgeschwindigkeit u'_i . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} \cdot u'_i + \rho \cdot \left[(\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right] \cdot u'_i = \\ - \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} \cdot u'_i + \mu \cdot \left[\frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \right] \cdot u'_i \quad . \quad (3.67) \end{aligned}$$

Durch zeitliches Mitteln der Gleichung (3.67) und die anschließend durchgeführte Rechnung gemäß den Rechenregeln (3.31) erhalten wir die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \overline{\rho \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} \cdot u'_i + \rho \cdot \left[(\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right] \cdot u'_i} = \\ \overline{- \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} \cdot u'_i + \mu \cdot \left[\frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \right] \cdot u'_i} \quad , \\ \rho \cdot \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial t} \cdot u'_i} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot u'_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} + \overline{u'_i \cdot u'_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] = \\ - \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} \cdot u'_i} + \mu \cdot \left[\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \cdot u'_i} \right] \quad . \quad (3.68) \end{aligned}$$

Beachte weiterhin, dass der Index j in der Gleichung (3.68) einen Summationsindex darstellt. Berücksichtigen wir die Identitäten

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} \cdot u'_i = \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u_i'^2)}{\partial t} \quad ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot u'_i &= \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u'^2_i)}{\partial x_j} \quad , \\ \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} \cdot u'_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot u'_i \right) - \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2\end{aligned}\quad (3.69)$$

in Gleichung (3.68), erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\rho \cdot \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u'^2_i)}{\partial t} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u'^2_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} + \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u'^2_i)}{\partial x_j} \cdot u'_j \right] = \\ - \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} \cdot u'_i} + \mu \cdot \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot u'^2_i)}{\partial x_j} - \mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad .\end{aligned}\quad (3.70)$$

Gleichung (3.70) beinhaltet drei Gleichungen ($i = 1, 2, 3$) für die drei Koordinatenrichtungen. Wenn wir diese drei Gleichungen addieren, erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für die zeitlich gemittelte Turbulenzenergie $\bar{k}^2 = K$ (siehe Gleichung (3.65)). Die Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned}\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] = \\ \mu \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2} - \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} \cdot u'_i} - \rho \cdot \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} + \overline{\frac{\partial K'}{\partial x_j} \cdot u'_j} \right] - \mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \quad .\end{aligned}\quad (3.71)$$

In Gleichung (3.71) sind sowohl i als auch j Summationsindizes. Es stehen also in der genannten Gleichung Doppelsummen. Berücksichtigen wir in dieser Gleichung noch die Identität

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} (f' \cdot u'_i)} = \overline{\frac{\partial f'}{\partial x_i} \cdot u'_i} + f' \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = \overline{\frac{\partial f'}{\partial x_i} \cdot u'_i} \quad ,$$

erhalten wir die endgültige Form der Differentialgleichung für die zeitlich gemittelte Turbulenzenergie pro Masse K (die Größe f steht für p und K). Sie lautet

$$\boxed{\begin{aligned}\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] = \\ \mu \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' \cdot u'_i} \right) - \rho \cdot \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} + \overline{\frac{\partial K'}{\partial x_j} \cdot u'_j} \right] - \mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2}\end{aligned}} \quad .\quad (3.72)$$

Da wir bereits mit der Herleitung der strömungsmechanischen Gleichungen vertraut sind, erkennen wir sofort die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. Auf der linken Seite der Gleichung (3.72) stehen die zeitliche Änderung der Turbulenzenergie pro Masse in dem raumfesten Kontrollvolumen $dx \cdot dy \cdot dz$ und die konvektiven Terme, mit denen die Bilanz des Transports von Turbulenzenergie in bzw. aus dem Kontrollvolumen beschrieben wird.

Auf der rechten Seite stehen Ausdrücke, die wir nur zum Teil sofort interpretieren können. Der erste und zweite Term sowie der zweite Ausdruck in der eckigen Klammer der rechten

Seite berücksichtigen die Diffusion der Turbulenzenergie. Der letzte Term der rechten Seite beschreibt die Dissipation der Turbulenzenergie. Für die Produktion der Turbulenzenergie steht der erste Ausdruck in der eckigen Klammer.

Wir kommen auf die Ermittlung der Glieder der rechten Seite der Gleichung (3.72) im Folgenden zurück. Es stellt sich nun die Frage, wie wir die Gleichung (3.72) zur Berechnung von Strömungen anwenden.

Prandtl und Kolmogorov haben 1940 die Annahme vorgeschlagen, dass die turbulente Viskosität μ_t mit der Beziehung

$$\mu_t = \rho \cdot l_\epsilon \cdot \sqrt{K} \quad (3.73)$$

berechnet werden sollte. l_ϵ ist ein Längenparameter, der der Mischungsweglänge ähnlich ist, jedoch nicht gleich dieser ist. Wir werden den Zusammenhang zwischen der Mischungsweglänge l und dem Längenparameter l_ϵ noch angeben. Der Ansatz von Prandtl und Kolmogorov (3.73) basiert auf der Dimensionsanalyse, auf die wir in Kapitel 4.1.1 zu sprechen kommen werden.

Bei der Berechnung von turbulenten Strömungen lösen wir zusätzlich zu den Reynolds-Gleichungen die partielle Differentialgleichung (3.72) zur Ermittlung von K und berechnen mit der Prandtl-Kolmogorov-Annahme die turbulente Viskosität μ_t .

Die Berechnung der Glieder der rechten Seite der Gleichung (3.72) basiert auf experimentellen Ergebnissen und Modellvorstellungen. Die Berechnungsformeln geben wir nachfolgend an. Alle anderen Turbulenzmodelle, auch Turbulenzmodelle, die nicht auf der Boussinesq-Annahme aufbauen, beinhalten zur Modellierung der Turbulenz experimentelle Ergebnisse. Wie sich aus den Experimenten die weiter unten angegebenen Gleichungen ableiten, sollte sich der Leser nach dem Durcharbeiten des vorliegenden Lehrstoffes mit Spezialvorlesungen und zusätzlicher Literatur aneignen. Ebenfalls kann er in weiterführenden Vorlesungen auch Turbulenzmodelle kennenlernen, die nicht auf der Boussinesq-Annahme basieren und noch zu den Forschungsaufgaben der Strömungsmechanik gehören.

Zur Modellierung der Turbulenz von Innenströmungen (Kapitel 2.4.4) können wir die Gleichung (3.72) dahingehend vereinfachen, dass wir alle Gradienten der rechten Seite in Strömungs- und Umfangsrichtung vernachlässigen, da sie im Vergleich zu den Gradienten über der Höhe des Kanals klein sind (s. dazu Abbildung 3.12). Wir gehen weiterhin davon

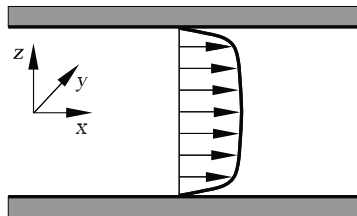


Abb. 3.12: Koordinatensystem für die Kanalströmung

Terme der Gl. (3.72)	physikalische Bedeutung	Modellterme
$\rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t}$	zeitliche Änderung von K	
$\rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial K}{\partial x_j} \right]$	Konvektion von K	
$\mu \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{p' \cdot w'} + \rho \cdot \overline{w' \cdot K})$	Diffusion von K	$\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \right]$
$-\rho \cdot \overline{u' \cdot w'} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$	Produktion von K	$\mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$
$\mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial z} \right)^2}$	Dissipation von K	$\frac{C_D \cdot \rho \cdot K^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon}$

Tab. 3.2 : Gleichungen zur Berechnung der rechten Seite der K -Gleichung

aus, dass auch die Gradienten

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

im Vergleich zu dem Gradienten $\partial \bar{u} / \partial z$ klein sind. Die getroffenen Annahmen sind ohne weiteres zulässig. Wir werden dies im nächsten Abschnitt besser verstehen können, wenn wir die Vereinfachungen zur Herleitung der Grenzschichtgleichungen diskutieren werden. Die Gleichung (3.72) vereinfacht sich also auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \right) = \\
 \mu \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{p' \cdot w'} + \rho \cdot \overline{w' \cdot K'}) - \rho \cdot \overline{u' \cdot w'} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \\
 \mu \cdot \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \right] \quad . \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Die Summanden der rechten Seite, von denen jeder einen physikalischen Vorgang zur zeitlichen Änderung der Turbulenzenergie pro Masse beschreibt, werden mit Ausdrücken berechnet, die auf zusätzlichen Modellvorstellungen und Messungen basieren. Sie sind in der Tabelle 3.2 angegeben. Die endgültige Gleichung zur Simulation der Turbulenzenergie

lautet demnach

$$\rho \left(\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \cdot \frac{\partial K}{\partial z} \right] + \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 - \frac{C_D \cdot \rho \cdot K^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon} \quad (3.75)$$

C_D ist eine weitere Konstante. Sie besitzt den Wert $C_D = 0.08 \dots 0.09$.

Gleichung (3.75) gilt nicht für den wandnahen Bereich, sondern nur für den räumlich wesentlich größeren voll turbulenten Bereich (Abbildung 3.13). Für den wandnahen Bereich $z^+ < 30$ (s. Gleichung (3.55)) muss die Turbulenz weiterhin mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz berechnet werden. Die Gleichung (3.75) geht für den wandnahen Bereich unmittelbar in den Ansatz des Prandtlschen Mischungsweges über, wie wir nachfolgend zeigen werden.

Experimentelle Ergebnisse zeigen, dass in unmittelbarer Wandnähe die konvektiven und diffusiven Glieder der Gleichung (3.75) verschwinden. Wenn wir diese experimentelle Kenntnis auf die Gleichung (3.75) anwenden, also die konvektiven und diffusiven Glieder vernachlässigen, erhalten wir die nachfolgende Gleichung die zum Ausdruck bringt, dass im wandnahen Bereich die Dissipation gleich der Produktion der Turbulenzenergie ist. Die Gleichung lautet

$$\mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \frac{C_D \cdot \rho \cdot K^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon} \quad (3.76)$$

Ersetzen wir auf der rechten Seite K mit der Prandtl-Kolmogorov-Annahme, erhalten wir die Gleichung

$$\mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = \frac{C_D \cdot \rho}{l_\epsilon} \cdot \left(\frac{\mu_t}{\rho \cdot l_\epsilon} \right)^3, \quad \mu_t = \left(\frac{1}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho \cdot l_\epsilon^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \quad (3.77)$$

Wenn wir Gleichung (3.77) mit Gleichung (3.52) vergleichen, erkennen wir, dass gilt

$$\left(\frac{1}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot l_\epsilon^2 = l^2, \quad l_\epsilon = l \cdot \sqrt[4]{C_D} \quad (3.78)$$

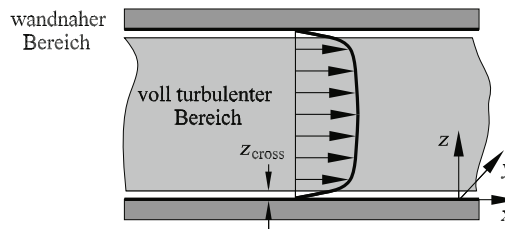


Abb. 3.13: Bereichseinteilung der turbulenten Innenströmung

Wir benötigen für die Anwendung der Differentialgleichung (3.75) noch geeignete Randbedingungen. Gemäß der Boussinesq-Annahme gilt $\tau_t = \mu_t \cdot (\partial \bar{u} / \partial z)$. Berücksichtigen wir diese Annahme in der Gleichung (3.77), erhalten wir für K die folgende Gleichung:

$$\mu_t^2 = \left(\frac{1}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho \cdot l_\epsilon^2 \cdot \tau_t \quad . \quad (3.79)$$

Ersetzen wir weiterhin μ_t auf der linken Seite gemäß der Prandtl-Kolmogorov Annahme, erhalten wir die folgende Gleichung

$$\rho^2 \cdot l_\epsilon^2 \cdot K = \left(\frac{1}{C_D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho \cdot l_\epsilon^2 \cdot \tau_t \quad , \quad K(x, y, z) = \frac{\tau_t}{\rho \cdot \sqrt{C_D}} \quad . \quad (3.80)$$

Mit Gleichung (3.80) können wir die Randbedingung für K berechnen. Ab der Stelle $z = z_{\text{cross}}$ sind die konvektiven und diffusiven Glieder nicht mehr vernachlässigbar. Für $z < z_{\text{cross}}$ gilt das Prandtlsche Mischungsweggesetz und für $z > z_{\text{cross}}$ wird μ_t gemäß der partiellen Differentialgleichung (3.75) berechnet. τ_t in Gleichung (3.80) wird mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz berechnet.

Mit der partiellen Differentialgleichung (3.75) für die Turbulenzenergie haben wir erreicht, dass wir bei der Berechnung der Turbulenz an einer festen Stelle im Strömungsfeld den Einfluss der Turbulenz stromauf und stromab mitberücksichtigen können. Allerdings ist die partielle Differentialgleichung immer noch abhängig von einer örtlichen algebraischen Gleichung für die Länge l_ϵ .

Es ist jedoch davon auszugehen, dass die Turbulenzdissipation $\epsilon = \mu \cdot \overline{(\partial u'_j / \partial z)^2}$, ähnlich wie die Turbulenzenergie K , von dem turbulenten Verhalten der Strömung an Stellen stromauf und stromab abhängig ist. Um die Turbulenzmodellierung bezüglich dieser physikalischen Vorstellung zu vervollständigen, sind die Ein-Gleichungsmodelle auf die Zwei-Gleichungsmodelle erweitert worden.

Zwei-Gleichungsmodelle

Eines der bekanntesten Zwei-Gleichungsmodelle, das häufig in numerische Verfahren implementiert ist, ist das K - ϵ -Modell. Es besteht aus der partiellen Differentialgleichung (3.75) und einer weiteren Differentialgleichung, die die Turbulenzdissipation beschreibt.

Wir nehmen wieder Bezug auf die Gleichung (3.74) und führen die vereinfachte Komponentenschreibweise u_i , x_i bzw. u_j , x_j mit $i, j = 1, 2, 3$ für u , v , w und x , y , z ein:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] = \\ = \mu \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' \cdot u'_i} \right) - \rho \cdot \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} + \frac{\partial \bar{K}'}{\partial x_j} \cdot \overline{u'_j} \right] - \mu \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad . \quad (3.81) \end{aligned}$$

Wir interessieren uns zunächst für den letzten Term auf der rechten Seite. Gemäß der vorausgegangenen physikalischen Interpretation steht er für die Dissipation der Turbulenzenergie K . Man beachte, dass sowohl der Index i als auch der Index j der Gleichung einem Summationsindex entspricht.

Im vorangegangenen Abschnitt ist dieser Term mit einer algebraischen Gleichung modelliert worden. Nachfolgend wollen wir eine **zweite partielle Differentialgleichung** für die Dissipation der Turbulenzenergie entwickeln. Diese Gleichung beschreibt ausführlicher die **Dissipation** als die bisher betrachtete algebraische Gleichung. Sie ermöglicht damit eine weiterführende Modellierung der turbulenten Schwankungsgrößen.

Die Dissipation ϵ ist wie folgt definiert:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \mu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2} \right) . \quad (3.82)$$

Im Folgenden werden die Summenzeichen weggelassen. Zunächst entwickeln wir die Gleichung für die Schwankungsgrößen. Dazu ersetzen wir in der Navier-Stokes-Gleichung wieder die Geschwindigkeiten u_i durch einen Mittelwert \bar{u}_i und eine Schwankungsgröße u'_i . Es gilt:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i . \quad (3.83)$$

i steht wieder für die jeweilige Raumrichtung ($i = 1, 2, 3$). Setzt man die Gleichung (3.83) in die Navier-Stokes-Gleichung, erhält man:

$$\rho \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \rho \cdot \left[(\bar{u}_j + u'_j) \cdot \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \mu \cdot \left[\frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} \right] . \quad (3.84)$$

Der Index j entspricht einem Summationsindex und i kennzeichnet die jeweilige Navier-Stokes-Gleichung für die entsprechende Raumrichtung. Durch einfaches Ausmultiplizieren und Umstellen der Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \cdot \left[\bar{u}_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] + \rho \cdot \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right] = \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} . \end{aligned} \quad (3.85)$$

Subtrahiert man von dieser Gleichung die zeitlich gemittelte i -te Navier-Stokes-Gleichung, erhält man die folgende Gleichung für die Schwankungsgrößen:

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial(\rho \cdot u'_i \cdot u'_j)}{\partial x_j} . \quad (3.86)$$

Die Gleichung (3.86) entspricht einer Transportgleichung für die Turbulenzmodellierung. Eine Gleichung für die Dissipation der Turbulenzenergie erhält man, indem die folgenden Schritte auf die Gleichung (3.86) angewendet werden:

- Anwendung des Operators $\partial/\partial x_j$ auf die i -te Gleichung.
- Multiplikation mit $\partial u_i/\partial x_j$.
- Zeitliche Mittelung der resultierenden Gleichung.

Mit der Durchführung dieser Schritte erhalten wir die gesuchte partielle Differentialgleichung für die Dissipation ϵ :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho \cdot \overline{\epsilon' \cdot u'_j} - \frac{2 \cdot \mu}{\rho} \cdot \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x_1}} + \mu \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - 2 \cdot \mu \cdot \overline{u'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \cdot \partial x_1} - 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_1} \cdot \left(\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x_1}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \\ &\quad - 2 \cdot \mu \cdot \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - 2 \cdot \left(\overline{\mu \cdot \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \cdot \partial x_j}} \right)^2, \quad (3.87) \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, 3 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Die Größe ϵ' steht für

$$\epsilon' = \mu \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad .$$

Die Gleichung (3.87) entspricht der exakten Gleichung für die Dissipation ϵ . Es ist zu erkennen, dass sie nicht direkt gelöst werden kann, da die zeitlichen Mittelwerte der rechten Seite nicht bekannt sind. Man ist also wieder darauf angewiesen, die rechte Seite durch passende Vereinfachungen zu modellieren.

Das erste und zweite Glied in der ersten runden Klammer auf der rechten Seite beschreibt die turbulente Diffusion von ϵ . Die molekulare Diffusion von ϵ wird durch das letzte Glied in der ersten Klammer ausgedrückt. In der zweiten Zeile der Gleichung (3.87) stehen die Glieder für die Produktion der Dissipation und in der letzten Zeile die Glieder für den Abbau der Größe ϵ .

Die turbulente Diffusion von ϵ (gemeint sind die ersten beiden Terme innerhalb der ersten runden Klammer auf der rechten Seite) wird in der Regel durch den Ausdruck

$$C_\epsilon \cdot \frac{K^2}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \quad (3.88)$$

modelliert, so dass gilt:

$$-\rho \cdot \overline{\epsilon' \cdot u'_j} - \frac{2 \cdot \mu}{\rho} \cdot \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x_1}} = C_\epsilon \cdot \frac{K^2}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} \quad . \quad (3.89)$$

Die Produktionsterme und Terme für die Vernichtung von ϵ werden entsprechend der Fachliteratur mit

$$-C_{\epsilon 1} \cdot \frac{\epsilon}{K} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

bzw. mit

$$-C_{\epsilon 2} \cdot \frac{\epsilon^2}{K}$$

angegeben, so dass die Gleichung (3.87) in vielen Fällen durch die Gleichung

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^2 \cdot C_\epsilon \cdot \frac{K^2}{\epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + \mu \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - \rho \cdot C_{\epsilon 1} \cdot \frac{\epsilon}{K} \cdot \overline{u'_i \cdot u'_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \cdot \frac{\epsilon^2}{K} \quad , \quad (3.90)$$

mit $j = 1, 2, 3$ modelliert wird.

C_ϵ , $C_{\epsilon 1}$ und $C_{\epsilon 2}$ basieren auf experimentellen Untersuchungen. Sie haben folgende Werte:

$$C_\epsilon = 0.07 \dots 0.09 \quad , \quad C_{\epsilon 1} = 1.41 \dots 1.45 \quad , \quad C_{\epsilon 2} = 1.90 \dots 1.92 \quad .$$

Die Herleitung der Gleichung (3.87) basiert auf den Navier-Stokes-Gleichungen. Durch die Modellierung der rechten Seite durch einfachere Ausdrücke verliert die Gleichung ihren Bezug zu den Navier-Stokes-Gleichungen und entspricht nur noch einer Gleichung der Turbulenzmodellierung bzw. der Modellierung der Dissipation ϵ . Der Leser stellt sich sicherlich die Frage, auf welchen Überlegungen die Ausdrücke der rechten Seite der Gleichung (3.90) basieren. Diese Fragestellung gehört zu dem weiterführenden Thema Turbulenzmodellierung und ist Gegenstand der Fachliteratur (siehe z. B. *J. Piquet* 2003).

Im einführenden Software-Kapitel 5.1 wird als Strömungsbeispiel der Rohrkrümmer gewählt. Wir greifen den numerischen Lösungsverfahren in Kapitel 4 voraus und zeigen in Abbildung 3.14 die mit dem K - ϵ -Turbulenzmodell berechneten Turbulenzgrößen. Die turbulente kinetische Energie wird im Bereich der starken Scherung der Umlenkung erzeugt und stromab transportiert, wo sie aufgrund der Diffusion und Dissipation abklingt. Die Dissipation besitzt ein Maximum im Inneren des Krümmers.

Die Wirbelviskosität ist mehrere Größenordnungen größer als die molekulare Viskosität mit $\mu = 3 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ und dominiert damit gegenüber der physikalischen Reibung.

Die Wahl der Randbedingungen für die Geschwindigkeit an der Wand kann auf unterschiedliche Weise vorgenommen werden.

Mit Vorgabe der physikalischen Randbedingungen

$$\bar{\vec{v}} = 0 \quad , \quad K = 0 \quad , \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0 \quad . \quad (3.91)$$

an der Wand wird das Modell als **Niedrig-Reynolds-Zahl K - ϵ -Modell** bezeichnet. Hier müssen sowohl die viskose Unterschicht als auch die wandnahe Schicht numerisch aufgelöst werden. Der Wandabstand der wandnächsten Gitterpunkte sollte etwa $z^+ \approx 1$ betragen, damit genügend Rechennetzpunkte für die Auflösung der viskosen Unterschicht vorhanden sind. Diese Variante des K - ϵ -Modells erfordert noch Korrekturen in der K -Gleichung, um die physikalischen Effekte bei niedrigen Reynolds-Zahlen besser abzubilden.

Bei großen Reynolds-Zahlen ist das logarithmische Wandgesetz des Kapitels 2.4.1 hinreichend genau, um die wandnahe Schicht zu approximieren. Anstelle der Haftbedingung wird für die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit \bar{u} die Bedingung (2.116)

$$u^+ = \frac{1}{0.41} \cdot \ln(z^+) + 5.5 \quad , \quad (3.92)$$

mit

$$z^+ = \frac{z \cdot u_\tau}{\nu} \quad , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad , \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$$

als Randbedingung berücksichtigt, welche die Wandschubspannung τ_w als zusätzliche Variable implizit enthält. Die Gleichung (3.92) stellt eine Bedingung zwischen der Geschwindigkeit am wandnächsten Punkt und der Wandschubspannung dar. Sie kann nur iterativ erfüllt werden. Das logarithmische Wandgesetz wird in diesem Zusammenhang oft als Wandfunktion bezeichnet. Das numerische Rechnetz in Wandnähe darf verglichen mit der ersten Variante relativ grob sein, da die Wandfunktion die sehr hohen Gradienten im Zwischenraum zwischen dem ersten wandnächsten Gitterpunkt und der Wand überbrückt. Diese Variante des Modells wird als **Standard K - ϵ -Modell** bezeichnet, da sie wegen des deutlich geringeren Aufwandes die bevorzugte Variante ist. Gleichung (3.92) ist nur im Bereich des logarithmischen Wandgesetzes aber nicht innerhalb der viskosen Unterschicht gültig. Daher ist bei der Anwendung darauf zu achten, dass z^+ deutlich größer als 30 gewählt wird. Strömungen mit Ablösung oder mit Staupunkten können mit Wandfunktionen nur ungenau approximiert werden.

Das Standard K - ϵ -Modell zählt zu den am häufigsten verwendeten Turbulenzmodellen, da es sich mit moderatem Rechenaufwand für viele Strömungsprobleme als hinreichend

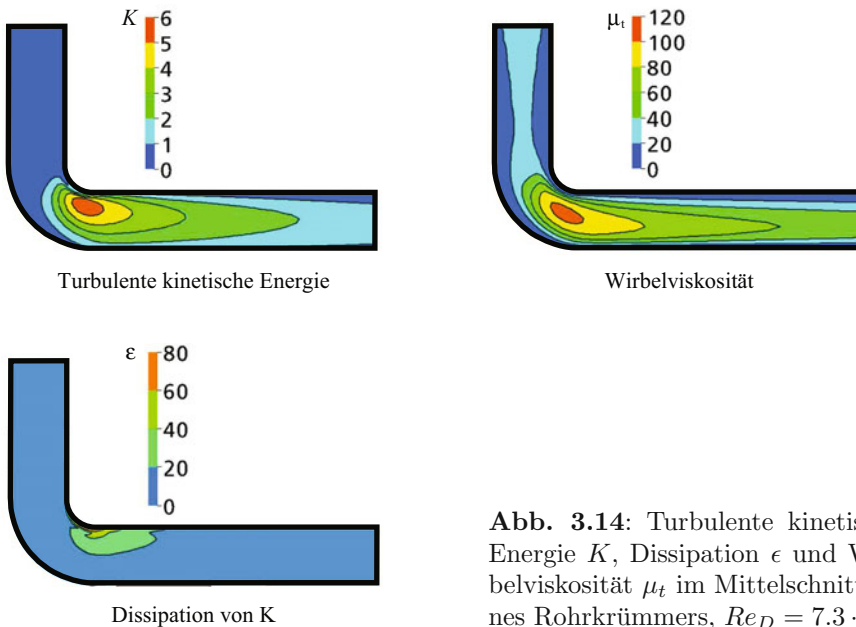


Abb. 3.14: Turbulente kinetische Energie K , Dissipation ϵ und Wirbelviskosität μ_t im Mittelschnitt eines Rohrkrümmers, $Re_D = 7.3 \cdot 10^7$

genau erwiesen hat. Der numerische Aufwand ist gegenüber dem Niedrig-Reynolds-Zahl Modell gerade bei großen Reynolds-Zahlen erheblich reduziert.

Anstelle der Dissipation ϵ wird oft die Größe $\omega = K/\epsilon$ verwendet. Dies führt zum **K - ω - Turbulenzmodell**, welches besonders in Wandnähe Vorteile aufweist. Eine Kombination dieser beiden Zweigleichungsmodelle ist das **SST-Scherspannungsmodell**, das sich in der industriellen Praxis durchgesetzt hat.

Weiterentwickelte Wirbelviskositätsmodelle

Mit einfachen Zweigleichungsmodellen, wie dem K - ϵ -Modell, können für einfache Strömungen und manche abgelöste Strömungen gute Ergebnisse erzielt werden. Für komplexere Strömungen versagen die einfachen Modelle jedoch:

- Strömungen mit niedriger Reynoldszahl
- Anisotropie in den Reynoldsspannungen
- Starke, entgegen der Strömungsrichtung wirkende Druckgradienten und Ablösegebiete.

Gegenüber der Grobstruktursimulationen des folgenden Kapitels, bietet der Reynoldsansatz jedoch den großen Vorteil, dass Strömungen, die im Mittel stationär sind (quasi-stationäre Strömungen), stationär berechnet werden können, da der turbulente, instationäre Anteil modelliert werden kann. Dies reduziert den numerischen Aufwand um ein bis zwei Größenordnungen. Daher wurden die Wirbelviskositätsmodelle konsequent weiterentwickelt. Im Folgenden werden die aktuellsten dieser weiterentwickelten Wirbelviskositätsmodelle kurz vorgestellt.

Niedrig-Reynoldszahl K - ϵ -Modell

Bei Strömungen niedriger Reynoldszahl gilt das logarithmische Wandgesetz nicht mehr. Es ist daher nicht mehr möglich, die Wandbedingungen über das Wandgesetz zu modellieren. Daher muss für diese Fälle die Grenzschicht bis zur Wand aufgelöst werden. Die hohen Gradienten für K und ϵ beim Übergang zur viskosen Unterschicht erfordern eine sehr hohe Auflösung bis in die viskose Unterschicht hinein. Der dimensionslose Wandabstand muss hierbei $z^+ < 1$ sein.

Wie bereits dargestellt, nimmt mit Annäherung an die viskose Unterschicht der Einfluss der turbulenten Viskosität im Vergleich zur molekularen Viskosität zu. Um bei Auflösung der Grenzschicht diesem Umstand Rechnung zu tragen, müssen die Transportgleichungen für K und ϵ umgeschrieben werden:

$$\mu_t = \rho \cdot C_\mu \cdot f_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \quad , \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot K)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \cdot K \cdot \bar{u}_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \epsilon \right) , \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \cdot \epsilon \cdot \bar{u}_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon \right) \\ &+ C_1 f_1 \frac{\epsilon}{K} \cdot 2 \cdot \mu_t \cdot S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\epsilon} \cdot f_2 \cdot \rho \cdot \frac{\epsilon^2}{K} . \end{aligned} \quad (3.95)$$

Die auffälligste Änderung ist die, dass in den Diffusionstermen die molekulare Viskosität enthalten ist. Außerdem werden die Konstanten C_μ , $C_{1\epsilon}$ und $C_{2\epsilon}$, die aus dem Standard K - ϵ -Modell bekannt sind, mit den entsprechenden Wanddämpfungsfunktionen f_μ , $f_{1\epsilon}$ bzw. $f_{2\epsilon}$ multipliziert. σ_K und σ_ϵ sind ebenfalls empirische Konstanten, die dem Strömungsproblem angepasst werden müssen. Die Wanddämpfungsfunktionen sind Funktionen der turbulenten Reynoldszahl $Re_t = \bar{u} \cdot l / \nu = K^2 / (\epsilon \cdot \nu)$ und $Re_z = K^{1/2} \cdot z / \nu$. Eine mögliche Formulierung ist:

$$f_\mu = (1 - \exp(-0.0165 Re_z))^2 \left(1 + \frac{20.5}{Re_t} \right) , \quad (3.96)$$

$$f_{1\epsilon} = \left(a + \frac{0.05}{f_\mu} \right)^3 , \quad f_{2\epsilon} = 1 - \exp(-Re_t^2) . \quad (3.97)$$

Gleichungen (3.93) - (3.95) sowie die Reynolds gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (3.33), (3.38), (3.40) und (3.113) müssen bis zur Wand integriert werden.

Während die Wandrandbedingung für K trivial ist, bereitet die Randbedingung für ϵ Probleme. Experimentelle Ergebnisse zeigen einen starken Anstieg von ϵ auf einen konstanten Wert direkt an der Wand, allerdings konnte der Wert von ϵ direkt an der Wand nicht bestimmt werden. Eine mögliche Randbedingung an der Wand ist daher $\partial \epsilon / \partial z = 0$. Andere Modelle benutzen eine modifizierte Dissipationsrate an der Wand $\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2 \cdot \nu \left(\partial \sqrt{K} / \partial n \right)^2$ und die Wandrandbedingung $\tilde{\epsilon} = 0$.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das Gleichungssystem durch die hohen Gradienten und die Einführung der Dämpfungsfunktion numerisch steif wird und das K - ϵ -Modell in Niedrig-Reynoldszahl-Formulierung häufig Konvergenzprobleme hat.

Zwei-Schichten-Modell

Die Zwei-Schichten-Modelle verfolgen dieselbe Zielsetzung wie die Niedrig-Reynoldszahl-Modelle, die Wandgrenzschicht bis zur viskosen Unterschicht aufzulösen. Die numerischen Probleme, die durch die nichtlineare Dämpfungsfunktion der Niedrig-Reynoldszahl-Formulierung entstehen, werden durch Aufteilung der Grenzschicht in zwei Schichten vermieden.

- Turbulenter Bereich ($Re_z = z \sqrt{K}/\nu \geq 200$), in dem die Standard-Formulierung des K - ϵ -Modells Anwendung findet. Die turbulente Viskosität wird mit der Gleichung $\mu_{t,t} = C_\mu \cdot \rho \cdot K^2/\epsilon$ berechnet.
- Viskoser Bereich ($Re_z < 200$), in dem nur die K -Gleichung gelöst wird. Die Dissipationsrate wird mit der Längenskala $l = K \cdot z (1 - \exp(-Re_z/A))$ als $\epsilon = C_\mu^{3/4} K^{3/2}/l$, mit $A = 2 \cdot \kappa \cdot C_\mu^{-2/4}$, berechnet. Die turbulente Viskosität im viskosen Bereich wird modelliert mit $\mu_{t,w} = C_\mu^{1/4} \cdot \rho \cdot \sqrt{K \cdot l}$ und $A = 70$.

Die Formulierung der Mischungsweglänge im wandnahen, viskosen Bereich entspricht damit der im Prandtlschen Mischungswegansatz oder dem Ein-Gleichungsmodell verwendeten Mischungsweglänge für die wandnahe Grenzschicht.

Zur Glättung des Übergangsbereichs zwischen viskosem und turbulentem Bereich und damit zwischen $\mu_{t,w}$ und $\mu_{t,t}$ bei $Re \approx 200$ wird eine Übergangsfunktion F_μ benutzt, so dass sich die turbulente Viskosität ergibt:

$$\mu_t = F_\mu \mu_{t,t} + (1 - F_\mu) \mu_{t,w} \quad . \quad (3.98)$$

Die Übergangsfunktion $F_\mu = F_\mu(Re_z)$ ist gleich null an der Wand, strebt im voll turbulenten Bereich ($Re_z \gg 200$) gegen 1 und bildet einen sanften Übergang für $Re_z \approx 200$.

Das Zweischichtmodell ist weniger von Rechennetzen abhängig und numerisch stabiler als der Niedrig-Reynoldsansatz und findet breite Verwendung in komplexen Strömungssimulationen, wenn eine Auflösung der Wandgrenzschicht notwendig ist.

K - ω -Modelle

Insbesondere in der Luftfahrt sind die klassischen Turbulenzmodelle problematisch. Die Probleme sind typischerweise charakterisiert durch komplexe Geometrie und einen weiten Bereich an Längenskalen. Auf der großen Längenskala ist die Strömung weitgehend reibungsfrei (Außenströmung), wobei jedoch durch extrem kleinskalige Vorgänge in den turbulenten Grenzschichten eine komplette Umstrukturierung des gesamten Strömungsfeldes möglich ist (Ablösung). Es ist daher schwierig, eine einheitliche Längenskala für die Turbulenzmodellierung zu finden. Der Einsatz des K - ω -Modells scheitert häufig an dessen mangelnder Genauigkeit im direkten Wandbereich und den daraus resultierenden Problemen bei der Vorhersage der druckgetriebenen Ablösung.

Die beiden offensichtlichen Mängel des K - ω -Modells sind:

- Überschätzung des turbulenten Austauschs bei entgegen der Strömungsrichtung wirkenden Druckgradienten, z. B. in gekrümmten Grenz- oder Scherschichten. Dies führt zur Unterschätzung der Ablöse neigung von verzögerten Grenzschichten und zur numerischen Unterdrückung der Ablösung bzw. der Verlagerung der Ablöselinie stromab.

- Der Einsatz der im nächsten Kapitel beschriebenen Grobstruktursimulation oder auch Reynolds-Spannungen-Transportgleichungsmodellen verbietet sich bei technischen Anwendungen aufgrund des damit verbundenen erhöhten Aufwandes. Daher wurden für diese Anwendungen Zwei- und Mehrgleichungsmodelle entwickelt, von denen im Folgenden zwei typische Vertreter beschrieben werden.

Wilcox- K - ω -Modell

Im K - ϵ -Modell wird die turbulente Längenskala zur Bestimmung der turbulenten Viskosität durch $l = K^{2/3}/\epsilon$ bestimmt. Die Dissipationsrate ϵ ist jedoch nicht die einzige denkbare Variable zur Bestimmung von l . Es wurden unzählige Zwei-Gleichungsmodelle vorgeschlagen, die auf anderen Längenskalen basieren. Die am weitesten verbreitete, alternative Größe zur Bestimmung von l ist die turbulente Frequenz $\omega = \epsilon/K$. Die Längenskala ergibt sich zu $l = \sqrt{K}/\omega$. Die turbulente Viskosität lässt sich als

$$\mu_t = \frac{\rho \cdot K}{\omega} \quad (3.99)$$

darstellen.

Die Transportgleichungen für K und ω lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot K)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot K \cdot \bar{u}_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) \\ &+ \left(2 \cdot \rho \cdot S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \\ &- \beta^* \cdot \rho \cdot K \cdot \omega \quad , \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot \omega \cdot \bar{u}_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_w} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &+ \gamma_1 \left(2 \cdot \rho \cdot S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \omega \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \\ &- \beta_1 \cdot \rho \cdot \omega^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.101)$$

mit den Modell-Konstanten:

$$\sigma_k = 2.0, \quad \sigma_w = 2.0, \quad \gamma_1 = 0.553, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \beta^* = 2.0.$$

Die Formulierung des Diffusionsterms entspricht der des Niedrig-Reynoldszahl- K - ϵ -Modells. Die Formulierung in ω erlaubt jedoch den Verzicht auf die nichtlinearen Dämpfungsterme. Die Wandrandbedingungen sind ebenfalls einfacher. Die Wandrandbedingung für K ist wiederum trivial. Für ω ergibt sich damit eine Polstelle an der Wand. In der praktischen Anwendung lässt sich der Anstieg von ω ins Unendliche jedoch durch Vorgabe eines sehr hohen Wertes oder eine hyperbolische Variation $\omega_P = 6 \cdot \nu / (\beta_1 \cdot z_p^2)$ annähern, ohne dass die Ergebnisse stark sensitiv von der genauen Behandlung abhängen.

Für den Eintrittsrand müssen die Werte für K und ω vorgegeben werden. Am Austrittsrand kommt eine Gradientenrandbedingung zum Einsatz. Die Fernfeldrandbedingung $K \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow 0$ bereitet aufgrund der Singularität für $\omega = 0$ in Gleichung (3.99) Probleme. Es muss daher aus mathematischen Gründen am Fernfeldrand ein sehr kleiner Wert für ω vorgegeben werden. Unerfreulicherweise zeigt sich, dass die Ergebnisse sehr sensitiv auf kleine Variationen dieses Randwerts reagieren, was das Modell für den Einsatz in der Luftfahrtanwendung, in denen typischerweise Fernfeldrandbedingungen benötigt werden, problematisch macht.

Menter- K - ω -SST-Modell

Es zeigt sich, dass die Ergebnisse des K - ϵ -Modells deutlich weniger sensitiv auf die willkürliche Festlegung der Fernfeldrandwerte der Dissipation sind, als die des K - ω -Modells. Andererseits liefert das K - ω -Modell deutlich bessere Ergebnisse für Wandgrenzschichten mit Druckgradienten. Dies legt eine Kombination der Stärken beider Modelle nahe.

Das K - ω -SST Modell besteht aus:

- einer Transformation des K - ϵ -Modells in ein K - ω -Modell in Wandnähe und
- dem Standard K - ϵ -Modell im wandfernen, turbulenten Außenbereich.

Die turbulente Viskosität berechnet sich wie im Wilcox- K - ω -Modell aus

$$\mu_t = \frac{\rho \cdot K}{\omega} \quad . \quad (3.102)$$

Die Transportgleichung für K ist ebenfalls identisch zu Gleichung (3.100). Die Gleichung für den Transport von ω ergibt sich durch direkte Transformation der ϵ -Gleichung (3.95) mit $\epsilon = K/\omega$ zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \cdot \omega \cdot \bar{u}_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega,1}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \omega \right) \\ &+ \gamma_2 \left(2 \cdot \rho \cdot S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \cdot \omega \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) - \beta_2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \\ &+ 2 \cdot \frac{\rho}{\sigma_{\omega,2}} \cdot \frac{\partial K}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_k} . \end{aligned} \quad (3.103)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gleichung (3.101) durch den letzten Term auf der rechten Seite, den so genannten Quer-Diffusionsterm, der bei der Transformation $\epsilon = K/\omega$ entsteht.

Die geänderten Modellkonstanten sind:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\omega,1} = 2.0, \quad \sigma_{\omega,2} = 1.17, \quad \gamma_2 = 0.44, \quad \beta_2 = 0.083, \quad \beta_* = 0.09.$$

Zur Vermeidung von numerischen Instabilitäten durch mögliche Unstetigkeiten beim Übergangsbereich zwischen K - ω - und K - ϵ -Modell werden analog zum Zweischichten-Modell Übergangsfunktionen für den Quer-Diffusionsterm, sowie die Modellkonstanten C_1 und C_2 verwendet.

Auch das K - ω -SST-Modell zeigt die oben für das K - ϵ -Modell dargelegten Probleme in Bereichen starker Umlenkung wie z. B. in Staupunkten. Um diese zu mindern, werden typischerweise so genannte Limiter eingesetzt. Diese limitieren

- die turbulente Viskosität in Bereichen mit gegen die Strömungsrichtung wirkenden Druckgradienten
- die Produktion von turbulenter Energie in Staupunkten.

Nicht-lineare- K - ϵ -Modelle

Allen bisher behandelten Zwei-Gleichungs-Modellen ist gemein, dass sie die Effekte der Anisotropie der Turbulenz nicht berücksichtigen können, da die Boussinesq-Approximation diese nichtlinearen Effekte vernachlässigt. Neben den Reynolds-Spannungs-Modellen, die für jede turbulente Spannung eine eigene Transportgleichung lösen, dadurch jedoch einen deutlich erhöhten Rechenaufwand fordern und häufig Konvergenzprobleme aufweisen, wurde das K - ϵ -Modell um nichtlineare Terme erweitert, die die Sensitivität für anisotrope Effekte der Turbulenz in die Modelle integrieren sollen.

Die linearen Zwei-Gleichungs-Modelle basieren auf dem Boussinesq-Ansatz

$$-\rho \cdot \overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij} = \tau_{ij}(S_{ij}, K, \epsilon, \rho) \quad , \quad (3.104)$$

wobei τ_{ij} nur von den lokalen Bedingungen abhängt. Die turbulenten Spannungen und damit die Turbulenz an sich muss sich instantan an die lokalen Zustände anpassen, während sie konvektiv durch das Feld transportiert werden. Analog zu den Betrachtungen bei den algebraischen Turbulenzmodellen, die zu den Transportgleichungsmodellen führen, kann argumentiert werden, dass diese instantane Anpassung nicht physikalisch ist und daher die turbulenten Spannungen auch von Änderungen der Scherung dS_{ij}/dt abhängen muss.

Ausgehend von dieser Idee wurden verschiedene Ansätze für nichtlineare K - ϵ -Modelle vorgeschlagen. Ein möglicher Ansatz geht von einer asymptotischen Erweiterung aus, die unter Berücksichtigung der quadratischen Terme auf

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} = -\rho \cdot \overline{u'_i u'_j} = & -\frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \delta_{ij} + \rho \cdot C_\mu \cdot \frac{K^2}{\epsilon} \cdot 2 \cdot S_{ij} \\
& - 4 \cdot C_D \cdot C_\mu^2 \cdot \frac{K^3}{\epsilon^2} \left(S_{im} \cdot S_{mj} - \frac{1}{3} \cdot S_{mn} \cdot S_{mn} \cdot \delta_{ij} \right. \\
& \left. + \dot{S}_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \dot{S}_{ij} \cdot \delta_{ij} \right) , \quad (3.105)
\end{aligned}$$

mit

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(S_{ij} - \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_m} \cdot S_{mj} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_m} \cdot S_{mi} \right) \right) \quad (3.106)$$

und der zu kalibrierenden Konstanten

$$C_D = 1.68 \quad (3.107)$$

führt.

Die Standardformulierung der turbulenten Spannungen mit dem Boussinesq-Ansatz kann als Sonderfall der Gleichung (3.105) für geringe Deformationsraten verstanden werden.

Ein Ansatz zur Sensitivierung des K - ϵ -Modells, basierend auf den Erkenntnissen aus den Reynolds-Spannungs-Modellen, hat als Grundlage eine generalisierte Formulierung der Wirbelviskositätshypothese auf Grundlage einer Potenzreihe von Tensorprodukten der mittleren Scherrate:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

und der mittleren Wirbelstärke

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) .$$

Dies führt auf die quadratische Formulierung:

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} = & -\rho \cdot \overline{u'_i u'_j} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \delta_{ij} \\
& - C_1 \cdot \mu_t \frac{K}{\epsilon} \left(S_{ik} \cdot S_{jk} - \frac{1}{3} \cdot S_{kl} \cdot S_{kl} \cdot \delta_{ij} \right) \\
& - C_2 \cdot \mu_t \frac{K}{\epsilon} (S_{ik} \cdot \Omega_{jk} + S_{jk} \cdot \Omega_{ik}) \\
& - C_3 \cdot \mu_t \frac{K}{\epsilon} \left(\Omega_{ik} \cdot \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \cdot \Omega_{kl} \cdot \Omega_{kl} \cdot \delta_{ij} \right) . \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Durch die Einführung von drei quadratischen Termen, die durch Anpassung der drei zusätzlichen Modellkonstanten gewichtet werden, können die drei Reynolds-Hauptspannungen unterschiedliche Werte annehmen, was die Erfassung von Anisotropieeffekten der turbulenten Strömung ermöglicht.

Analog zu der hier dargestellten quadratischen Erweiterung wird häufig eine kubische Erweiterung des K - ϵ -Modells eingesetzt, auf deren detaillierte Darstellung verzichtet wird. Durch die Berücksichtigung dieser nichtlinearen Terme sind mit dem K - ϵ -Modell Vorhersagequalitäten erreichbar, die denen der vollen Reynoldsspannungsmodelle entsprechen.

Wir beenden an dieser Stelle die Einführung in die Turbulenzmodellierung. In diesem Abschnitt des Buches sollte der Leser einen ersten Eindruck von der Denkweise der Turbulenzmodellierung vermittelt bekommen. Wir haben gelernt, dass Turbulenzmodelle auf einfachen empirischen Vorstellungen und umfangreichen Experimenten beruhen. Die weitere Vertiefung dieser Kenntnisse insbesondere im Hinblick auf die direkte Strömungssimulation mit der so genannten Large-Eddy-Simulationsmethode ist Gegenstand des folgenden Kapitels (siehe auch *E. Laurien, H. Oertel jr.* 2013).

3.2.4 Grobstruktursimulation

Die bisher beschriebenen Turbulenzmodelle gehen weitgehend von einer Strömung isotroper Turbulenz aus. Darunter versteht man, dass die homogene turbulente Strömung keine Vorzugsrichtung oder Orientierung aufweist. Im Gegensatz dazu zeigt die Momentaufnahme der inhomogenen **anisotropen turbulenten Strömung** der Abbildung 3.15 mehrere miteinander gekoppelte Längenskalen, die gleichzeitig angeregt sind. Das Bild eines turbulenten Wasserjets illustriert Wirbelstrukturen unterschiedlicher Größenordnungen mit zunehmender Komplexität. Derartige turbulente Strömungen lassen sich mit den bisher beschriebenen Turbulenzmodellen nicht berechnen. Auch ist der Reynolds-Ansatz (3.30)

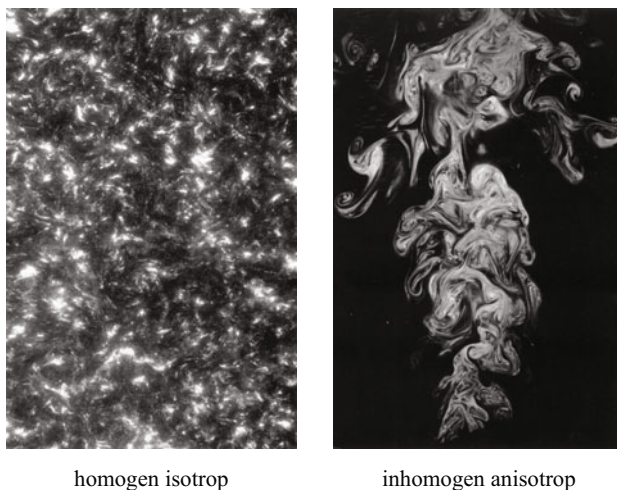


Abb. 3.15: Turbulente Strömungen

nicht mehr gültig.

Dies führt zur **direkten Simulation** turbulenter Strömungen, die das vollständige Spektrum turbulenter Strömungsstrukturen numerisch auch ohne Turbulenzmodell simulieren. Dabei werden die Navier-Stokes-Gleichungen (3.18) bzw. (3.20) ohne Turbulenzmodell gelöst. Jedoch wird dies auch in Zukunft nur für einfache Geometrien und niedrige Reynolds-Zahlen möglich sein. Daher scheidet diese Methode zur Durchführung von praxisorientierten Berechnungen von Strömungen großer Reynolds-Zahlen aus. Sie kann lediglich zur Entwicklung und Überprüfung von Turbulenzmodellen beitragen.

Die Abbildung 3.16 zeigt das Ergebnis der direkten Simulation der turbulenten Rohrströmung bei der Reynolds-Zahl $Re_D = 5600$. Die Isolinien der Stromabgeschwindigkeit u und deren turbulenten Schwankungen u' machen die räumliche Turbulenzstruktur in Wandnähe deutlich, die sich mit fortschreitender Zeit ändert. Die Geschwindigkeitsschwankungen in Radial- und Umfangsrichtung sind dabei wesentlich kleiner als die stromabwärtigen Schwankungen. Im zeitlichen und räumlichen Mittel berechnet man das in Abbildung 2.82 gezeigte lineare Geschwindigkeitsprofil der viskosen Unterschicht und das logarithmische Wandgesetz im Bereich der Wandturbulenz.

Unterteilt man die turbulenten Strukturen von Strömungen hoher Reynolds-Zahlen in zwei Anteile, die großräumigen und die feinskaligen, so kommt man zu einer anderen Berechnungsmethodik. Die großräumigen Strukturen einer turbulenten Strömung werden in ihrer zeitlichen und räumlichen Entwicklung direkt simuliert und nur die feinskaligen Strukturen werden modelliert. Diese Methode wird als **Grobstruktursimulation** (Large-Eddy-Simulation, LES) bezeichnet. Sie ist stets instationär und erfordert daher zeitgenaue Berechnungsmethoden, die in Kapitel 4.2 behandelt werden.

Die räumliche Diskretisierung des Rechengebietes sowie die zeitliche Auflösung müssen

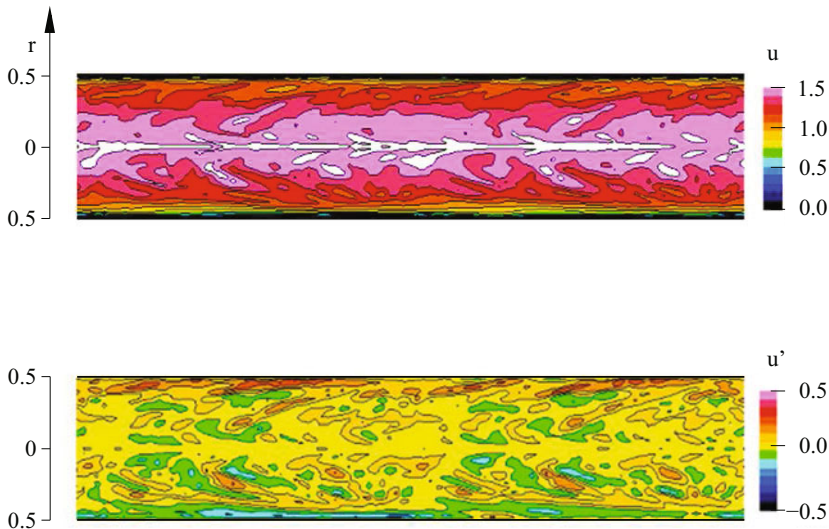


Abb. 3.16: Direkte Simulation der turbulenten Rohrströmung, $Re_D = 5600$

genügend fein gewählt werden, so dass die Wirbelstrukturen aufgelöst werden können. Man kann davon ausgehen, dass die größten Strukturen im Stadium ihrer Entstehung etwa den charakteristischen Abmessungen des Strömungsgebietes entsprechen und im Verlauf ihrer Weiterentwicklung zunehmend kleinere Strukturen erzeugen, welche in noch kleinere zerfallen. Die Bedeutung der großräumigen Strukturen für den turbulenten Austausch bleibt dabei erhalten.

Misst man die Geschwindigkeitsfluktuationen in einer turbulenten Strömung an einem festen Ort mit hoher zeitlicher Auflösung, so enthält das Signal die unterschiedlichen charakteristischen Zeitskalen aller in der Turbulenz enthaltenen Wirbel. Dieses Signal kann mit Hilfe einer Fourieranalyse in seine einzelnen Frequenzanteile aufgespalten werden (Abbildung 3.17). Bei dem so definierten Energiespektrum ist auf der horizontalen Achse die Frequenz f und auf der vertikalen Achse der zugehörige Energieinhalt aufgetragen. Die Frequenz f kann auch durch eine Wellenzahl a (Anzahl der Wellen oder Wirbel pro Längeneinheit) ersetzt werden, da die hochfrequenten Schwankungen von kleinen und die niederfrequenten Schwankungen von großen Wirbeln erzeugt werden. Damit ist eine Grundlage für die Aufteilung in große und kleine Wirbel gegeben.

Ein typisches Turbulenzspektrum bei hohen Reynolds-Zahlen wird in Abbildung 3.17 in verschiedene Bereiche unterteilt. Der Bereich niedriger Frequenzen oder Wellenzahlen wird durch die großräumigen energietragenden Wirbel hervorgerufen. Hier findet die Erzeugung der Turbulenz statt. Diese Strukturen beinhalten auch die stärkste Anisotropie, da sie im Stadium ihrer Entstehung eng mit der Geometrie des Strömungsgebietes verbunden sind. Diese Strukturen werden bei der Grobstruktursimulation direkt, also ohne Turbulenzmodell, simuliert.

Der Bereich mittlerer Frequenzen oder Wellenzahlen wird als der Trägheitsbereich bezeichnet. Hier findet der weitere Zerfall in immer kleinere Strukturen statt. Man kann

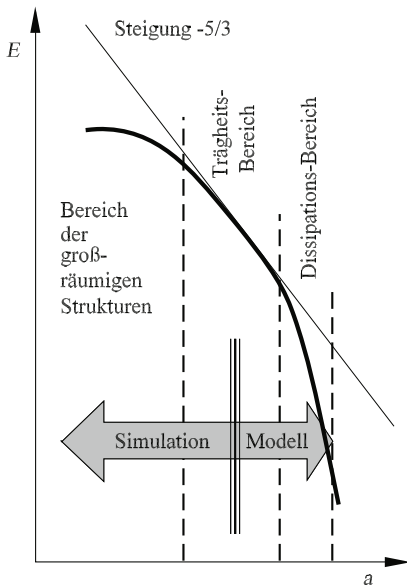


Abb. 3.17: Energiespektrum der Turbulenz

zeigen, dass dafür die nichtlinearen Trägheitsterme verantwortlich sind. Die Reibung ist dabei von untergeordneter Bedeutung. Während des Zerfalls wird die Turbulenz mehr und mehr isotrop und die Geometrie des Strömungsgebietes tritt in den Hintergrund. Die Theorie isotroper Turbulenz besagt, dass die Energie E mit der Wellenzahl a wie $E \sim a^{-5/3}$ abnimmt. Dies ist für zahlreiche Strömungen experimentell bestätigt worden. Der Trägheitsbereich ist umso ausgedehnter, je größer die Reynolds-Zahl ist. In diesem Bereich befindet sich die Grenze zwischen großräumigen und feinskaligen Strukturen im Sinne einer Grobstruktursimulation.

Im Bereich hoher Frequenzen oder Wellenzahlen geht der Trägheitsbereich allmählich in den Dissipationsbereich über, in dem der Abfall der Energie mit der Wellenzahl auf $E \sim a^{-7/3}$ vom Betrag her zunimmt. Hier findet der Zerfall weiterhin statt. Zusätzlich spielt die turbulente Dissipation eine Rolle, da mit abnehmender Wirbelgröße die Reibungseinflüsse gegenüber den Trägheitseinflüssen mehr und mehr hervortreten. Dieser Größenbereich wird nicht numerisch aufgelöst sondern hinsichtlich seiner Auswirkungen auf die großräumigen Strukturen mit Hilfe eines Feinstruktur-Turbulenzmodells modelliert.

Eine Grobstruktur-Simulation beginnt, ausgehend von einer Anfangsbedingung, mit einer zeitlichen Phase der Strömungsbildung in der großräumige Strukturen im Strömungsfeld instationär gebildet werden und dieses nach und nach ausfüllen. Danach wird die Strömung statistisch stationär. Das bedeutet, dass die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen an jedem Ort im Strömungsfeld nicht mehr von der Größe des Mittelungsintervalls abhängen. Das Ergebnis kann zeitlich gemittelt werden.

Vergleicht man in Abbildung 3.18 die Grobstruktur-Turbulenz mit der Feinstruktur-Turbulenz, so erkennt man, warum die Simulation der ersten und die Modellierung der zweiten methodisch günstig ist. Die Schwierigkeit die geometrieabhängigen, inhomogenen und anisotropen Grobstrukturen zu modellieren wird durch ihre Simulation umgangen. Das Feinstrukturmodell ist einfacher und genauer als ein Turbulenzmodell, welches das gesamte Turbulenzspektrum modelliert. Die Feinstruktur-Turbulenz kann als universell homogen und isotrop sowie kurzlebig angesehen werden.

Für die Beschreibung der Methode betrachtet man die räumliche Verteilung eines Mess-

GROBSTRUKTUR-TURBULENZ	FEINSTRUKTUR-TURBULENZ
wird von der mittleren Strömung erzeugt	wird von der Grobstruktur-Turbulenz erzeugt
abhängig von Strömungsfeldgeometrie	universell
geordnet	stochastisch
erfordert deterministische Beschreibung	kann statistisch modelliert werden
inhomogen	homogen
anisotrop	isotrop
langlebig	kurzlebig
diffusiv	dissipativ
schwierig zu modellieren	einfacher zu modellieren

Abb. 3.18: Eigenschaften der Grobstruktur- und der Feinstruktur-Turbulenz

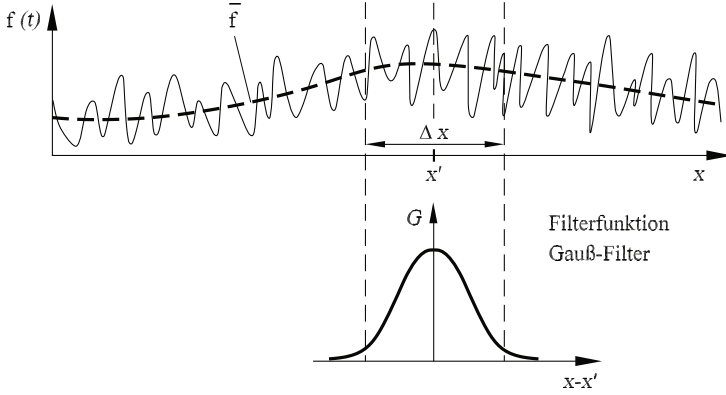


Abb. 3.19: Filterung einer Strömungsgröße

signals $f(t)$ entlang einer Koordinate x (Abbildung 3.19). Die Skizze lässt erkennen, dass sowohl großräumige als auch feinskalige Strukturen vorhanden sind. Zur Trennung dieser Strukturen nehmen wir eine mathematische Filterung vor. Diese bedeutet, dass an jeder Stelle x die Strömungsgröße f mit einer Filterfunktion $G(x')$ multipliziert und anschließend über Δx integriert wird:

$$\bar{f}(x, t) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} f(x - x', t) \cdot G(x - x') \cdot dx' \quad . \quad (3.109)$$

Dabei ist x' die zugehörige Integrationsvariable. Das gefilterte Signal entspricht der gestrichelten Linie. Es handelt sich nicht um eine stationäre Größe, wie bei der Reynolds-Mittelung, sondern der gefilterte Wert ist selbst eine Funktion der Zeit. Die feinskaligen Schwankungen wurden jedoch herausgefiltert. Es sind unterschiedliche Filterfunktionen vorgeschlagen worden, von denen hier nur der Gauß-Filter betrachtet werden soll (andere Filterfunktionen führen auf entsprechende Ergebnisse). Die Filterung wird in allen drei Raumrichtungen vorgenommen und die Filterfunktionen müssen bestimmten Anforderungen genügen. Der Unterschied zur Mittelung besteht darin, dass vor der Integration noch mit der Filterfunktion multipliziert wird.

Wie bei der Reynolds-Mittelung (3.30) wird nun jede lokale Strömungsgröße als Summe von gefiltertem Wert und Schwankungswert aufgefasst. Z. B. erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u_m(x, t) = \bar{u}_m(x, t) + u'_m(x, t) \quad , \quad (3.110)$$

wobei der gefilterte Wert überstrichen dargestellt ist. Im Unterschied zur Mittelung verschwindet die gefilterte Fluktuation nicht:

$$\overline{u'_m} \neq 0 \quad .$$

Unter Beachtung dieses Unterschiedes, kann die Herleitung der Grundgleichungen der Grobstruktursimulation nun analog zur Herleitung der Reynolds-Gleichungen durchgeführt werden.

Das Ergebnis der gefilterten Grundgleichungen sowie Ansätze der Feinstrukturmodellierung finden sich in unserem weiterführenden Lehrbuch *Numerische Strömungsmechanik*. Eine Einführung in die Theorie der Grobstruktursimulation wird in dem Buch von P. Sagaut 2006 gegeben.

3.2.5 Feinstrukturmodellierung

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, wird bei der Grobstruktursimulationen LES das Strömungsfeld mittels einer Filteroperation in einem Grob- sowie einen Feinstrukturanteil zerlegt, wobei der Feinstrukturanteil

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (3.111)$$

und dessen Einfluss auf den Grobstrukturanteil durch ein Feinstrukturmodell modelliert wird. Da die Dissipation der turbulenten Störungen in diesen kleinen Skalen stattfindet, besteht die Hauptaufgabe des verwendeten Feinstrukturmodells darin, die Dissipation geeignet wiederzugeben, also der Strömung das richtige Maß an Energie zu entziehen.

Einige dieser Modelle sind an die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Turbulenzmodelle angelehnt. Verbreitet ist das algebraische Smagorinsky-Modell. Desweiteren lassen sich Ähnlichkeits- und dynamische Modelle finden, die die Wechselwirkung zwischen den kleinsten aufgelösten und den größten nicht-aufgelösten Skalen zu beschreiben versuchen. Typischerweise wird bei einer Grobstruktursimulation versucht, ca. 80% der turbulenten Energie direkt aufzulösen. Ist die Filterweite gröber, so sind aufwändigere Feinstrukturmodelle anzuwenden. Wird ein wesentlicher Teil der turbulenten kinetischen Energie modelliert, wird von einer *Very Large Eddy Simulation* (VLES) gesprochen.

Das **Smagorinsky-Feinstrukturen-Modell** basiert auf dem Boussinesq-Ansatz (2.111). Es gilt:

$$\tau_{ij}^{turb} - \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij} \tau_{kk} = -\nu_t \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -2 \cdot \nu_t \cdot \overline{S_{ij}} = \tau_{ij}^{SM} \quad , \quad (3.112)$$

Wobei $\overline{S_{ij}}$ der gefilterte Deformationstensor ist. Dieser Term beschreibt den turbulenzbedingten Impulstransport. Der zweite Term auf der linken Seite ist als turbulenter Druck zu verstehen, als die Spur des Tensors. Er wird zum Druckterm der gefilterten Gleichungen zugerechnet und daher im Folgenden nicht weiter betrachtet. Analog zum Prandtlischen Mischungswegmodell wird der Ansatz verwendet, dass die turbulente Wirbelviskosität proportional zu einer charakteristischen Länge und einer charakteristischen Geschwindigkeit ist, also $\tau_t = l_c u_c$. Desweiteren ist $u_c = l_c |\overline{S_{ij}}|$, wobei $|\overline{\mathbf{S}}| = \sqrt{2 \cdot \overline{S_{ij}} \cdot \overline{S_{ij}}}$. Es liegt nahe, die charakteristische Länge l_c über die Gitterweite Δ zu definieren. Dies führt mit einer Modellkonstanten C_s auf die Feinstrukturlänge

$$l_c = C_s \cdot \Delta \quad (3.113)$$

und somit auf

$$\tau_{ij}^{SM} = -2 \cdot (C_s \cdot \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \bar{S}_{ij} \quad . \quad (3.114)$$

Als Δ wird meist $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$ herangezogen, es sind aber auch andere Formulierungen möglich. Im Gegensatz zum Prandtlschen Mischungswegkonzept besteht hier nicht mehr das Problem, eine charakteristische Länge zu definieren zu müssen, da diese bereits durch die Gitterweite gegeben ist. Die Smagorinsky-Konstante C_s ist hingegen abhängig vom Strömungsproblem. Ein durch die Theorie isotroper Turbulenz bestimmter Wert liegt bei etwa $C_s = 0.17$. Für praktische Anwendungen hat sich ein Wert von $C_s = 0.1$ als sinnvoll erwiesen.

Beim Smagorinsky-Modell handelt es sich um ein rein dissipatives Modell, das so genannte Backscatter-Effekte, bei denen lokal Energie von den kleinen zu den großen Wirbeln übertragen wird, nicht abbilden kann. Desweiteren verschwindet wegen $|S| > 0$ die Wirbelviskosität ν_t in laminaren Strömungen nicht. Ebenfalls von Nachteil ist die isotrope Dissipation, die der Strömung in allen Richtungen in gleichem Maße Energie entzieht. Von Vorteil ist seine Einfachheit und seine Robustheit.

Ein Problem der LES ist die Tatsache, dass die Größe der turbulenten Skalen sich in Wandnähe stark verändern. Dies gilt insbesondere für hohe Reynoldszahlen, da die Grenzschichtdicke mit steigender Reynoldszahl abnimmt. Außerdem findet im Gegensatz zur Außenströmung in Wandnähe eine turbulente Produktion in den kleinen Skalen statt. Es existieren zwei Ansätze, zum einen die Auflösung der Grenzschicht durch ein entsprechend feines Gitter oder zum anderen die Modellierung der wandnahen Strömung mit einer Wandfunktion. Die Verwendung einer Wandfunktion benötigt einen geringeren Diskretisierungsaufwand, allerdings kann so keine Kenntnis über die wandnahe Strömung gewonnen werden und sie ist für von Wand- und Ablöseeffekten geprägten Strömung kein adäquater Ansatz.

Diese Umstände haben zur Entwicklung der **Detached Eddy Simulation** (DES) geführt. Ziel der DES ist es, abgelöste Strömungen bei hohen Reynoldszahlen zu simulieren, ohne den hohen Aufwand einer Grobstruktursimulation mit Wandauflösung betreiben zu müssen. Die wandnahe Strömung ist durch starke Scherschichten gekennzeichnet, die bereits mit einfachen Turbulenzmodellen gut modelliert werden können. Die DES macht

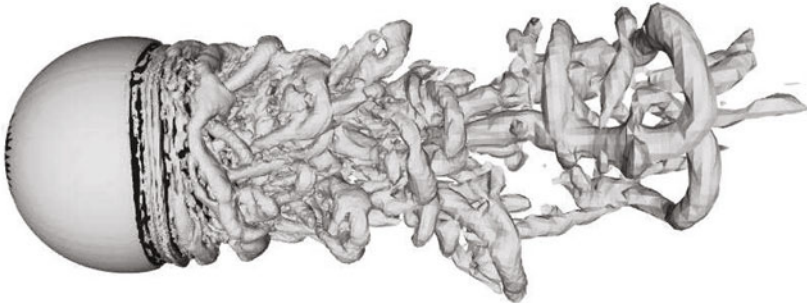


Abb. 3.20: DES der Kugelumströmung, $Re_D = 1 \cdot 10^5$

sich die Tatsache zunutze, dass die wandnahe Strömung mit einer klassischen Turbulenzmodellierung (Kapitel 3.2.3) durchgeführt werden kann und in der freien Strömung die Grobstruktursimulation angewandt wird. Da im wandfernen Bereich ein Gitter vorliegen muss, das dem Anspruch einer Grobstruktursimulation in diesem Bereich genügt, ist der Rechenaufwand zwar deutlich größer, als bei einer Reynoldsgemittelten Simulation, aber deutlich geringer als bei einer Grobstruktursimulation mit aufgelöster Grenzschicht. Die Abbildung 3.20 zeigt das Beispiel einer solchen Detached Eddy Simulation der Kugelumströmung bei einer Reynoldszahl $Re_d = 1 \cdot 10^5$. Deutlich sind die in der Abbildung 2.103 dargestellten rotierenden Wirbelschleifen im Nachlauf der Kugel aber mit einer wesentlich besseren Detailauflösung zu erkennen.

3.3 Energiegleichungen (Erhaltung der Energie)

3.3.1 Laminare Strömung

Die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie im Volumenelement =
 \sum der durch die Strömung ein- und ausfließenden Energieströme +
 \sum der durch Wärmeleitung ein- und ausfließenden Energieströme +
 \sum der durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte am Volumenelement geleisteten Arbeiten pro Zeit +
 der Energiezufuhr von außen +
 Arbeit pro Zeit, die durch das Wirken der Volumenkräfte verursacht wird.

Wir leiten nun die Energiegleichung her. Dazu betrachten wir die zeitliche Änderung der Gesamtenergie E in dem infinitesimal kleinen Volumenelement. Die im Volumenelement befindliche Energie setzt sich aus der inneren Energie $\rho \cdot e \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ($e\{J/kg\}$) und der kinetischen Energie $\rho \cdot (V^2/2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = (1/2) \cdot \rho \cdot (u^2 + v^2 + w^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ des Gases zusammen ($\vec{v} \cdot \vec{v} =: V^2$). Die zeitliche Änderung der im Volumenelement befindlichen Energie lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial \left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right]}{\partial t} = \frac{\partial \left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right]}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad . \quad (3.115)$$

Die im Volumenelement befindliche Gesamtenergie wird durch die nachfolgend aufgelisteten Vorgänge geändert:

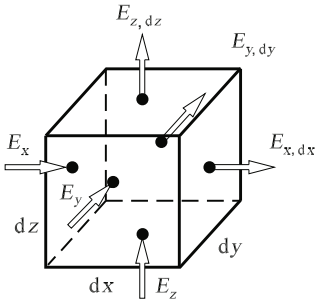
- Durch die mit der Strömung in das Volumenelement hinein- und heraustransportierte innere und kinetische Energie pro Zeit. Wir bezeichnen diesen Anteil der Änderung nachfolgend mit $d\dot{E}$.
- Durch den Transport von Energie, die pro Zeiteinheit durch Wärmeleitung in das Volumen ein- bzw. austritt. Diesen Anteil der Änderung bezeichnen wir nachfolgend mit $d\dot{Q}$.
- Durch die am Volumenelement durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte geleistete Arbeit pro Zeit. Wir bezeichnen diesen Anteil der Änderung nachfolgend mit $d\dot{A}$.
- Durch Energie pro Zeit, die von außen dem im Volumenelement befindlichen Gas zugeführt wird. Dies kann z. B. durch Strahlung und/oder durch im Gas ablaufende Verbrennungsprozesse erfolgen. Wir bezeichnen diesen Anteil bzw. diese Anteile bezogen auf die im Volumenelement befindliche Masse zusammenfassend mit $\dot{q}_s\{J/(kg \cdot s)\}$.
- Durch die Arbeit, die am Volumenelement durch das Wirken der Volumenkraft $\vec{k}\{N/m^3\}$ pro Zeit geleistet wird. Zu den Volumenkräften zählen die Schwerkraft sowie magnetische und elektrische Kräfte, die ggf. auf die Strömung wirken. Die zeitliche Änderung der Energie des im Volumenelement befindlichen Gases, die durch die Kraft $\vec{k} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ bewirkt wird, entspricht der Leistung $(\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$.

Wir beginnen mit der Betrachtung von $d\dot{E}$. In der Abbildung 3.21 sind die ein- und ausfließenden Energieströme dargestellt. Mit einer analogen Betrachtung wie bei der Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen erhalten wir für den Term $d\dot{E}$

$$d\dot{E} = \left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot u - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \right] \cdot dy \cdot dz +$$

$$\left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot v - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right) \right] \cdot dx \cdot dz +$$

$$\left[\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot w - \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right) \right] \cdot dx \cdot dy \quad .$$



$$E_x = \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot u \cdot dy \cdot dz$$

$$E_y = \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot v \cdot dx \cdot dz$$

$$E_z = \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot w \cdot dx \cdot dy$$

$$E_{x,dx} = \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz$$

$$E_{y,dy} = \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot v)}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz$$

$$E_{z,dz} = \left(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot w + \frac{\partial(\rho \cdot (e + \frac{V^2}{2}) \cdot w)}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy$$

Abb. 3.21: Konvektive Energieströme

Durch Vereinfachung erhält man

$$d\dot{E} = - \left(\frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.116)$$

Wir stellen nun die Gleichung für den Anteil $d\dot{Q}$ auf. Gemäß des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes fließt die Wärmeenergie in Richtung abnehmender Temperaturen. Z. B. gilt für ein eindimensionales Wärmeleitungsproblem die Gleichung $\dot{q} = -\lambda \cdot (dT/dx)$. \dot{q} steht für den Wärmefluss pro Fläche $\{W/m^2\}$ und λ für die Wärmeleitfähigkeit $\{W/(m \cdot K)\}$, die im Allgemeinen von dem jeweiligen Fluid, dem Druck und der Temperatur abhängig ist. Wenden wir das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz zur Berechnung des Anteils $d\dot{Q}$ an, so erhalten wir für den gesamten Energiefluss durch Wärmeleitung in bzw. aus dem Volumenelement den nachfolgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} d\dot{Q} = & \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot dx \right] \right) \cdot dy \cdot dz + \\ & \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot dy \right] \right) \cdot dx \cdot dz + \\ & \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} - \left[-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot dz \right] \right) \cdot dx \cdot dy \quad (3.117) \end{aligned}$$

Durch Vereinfachung erhält man

$$d\dot{Q} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.118)$$

Nachfolgend werden wir nun die Beziehungen für die durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte am Volumenelement geleisteten Arbeiten aufstellen. Auf jeder Oberfläche des Volumenelements wirken drei Spannungen, die auf die Reibung zurückzuführen sind und der statische Druck. Die durch den Druck und die Spannungen resultierenden Kräfte leisten Arbeit an dem Volumenelement. Die Arbeit pro Zeit, die wir auch als Leistung bezeichnen, ergibt sich jeweils aus dem Produkt der Geschwindigkeit und der Kraft, die in Richtung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente wirkt. Eine Arbeit pro Zeit wird mit einem positiven Vorzeichen berücksichtigt, wenn die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Druck-, Normalspannungs- bzw. Schubspannungskraft zeigt. Trifft dies nicht zu, wird die Arbeit pro Zeit mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Wir wollen uns zunächst nur auf die Leistung $d\dot{A}_x$ beschränken, die dem Volumenelement über die beiden Oberflächen mit dem Flächeninhalt $dy \cdot dz$ zu- bzw. abgeführt wird. Für die verbleibenden Leistungen $d\dot{A}_y$ und $d\dot{A}_z$ erhalten wir analoge Ausdrücke (s. Abbildung 3.4). Wir erhalten für $d\dot{A}_x$ gemäß der folgenden Rechnung den Ausdruck

$$d\dot{A}_x = p \cdot dy \cdot dz \cdot u - \left(p \cdot dy \cdot dz \cdot u + \frac{\partial(p \cdot dy \cdot dz \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) -$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz \cdot u + \left(\sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz \cdot u + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) - \\
& \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot v + \left(\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot v + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot v)}{\partial x} \cdot dx \right) - \\
& \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \cdot w + \left(\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \cdot w + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \cdot w)}{\partial x} \cdot dx \right) \quad . \quad (3.119)
\end{aligned}$$

Durch Vereinfachung erhält man

$$d\dot{A}_x = \left(-\frac{\partial(p \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad . \quad (3.120)$$

Für die y - und z -Richtung erhalten wir entsprechende Ausdrücke für $d\dot{A}_y$ und $d\dot{A}_z$. Sie lauten

$$d\dot{A}_y = \left(-\frac{\partial(p \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} \cdot w)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad , \quad (3.121)$$

$$d\dot{A}_z = \left(-\frac{\partial(p \cdot w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} \cdot v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz} \cdot w)}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad . \quad (3.122)$$

$d\dot{A}$ ergibt sich nun aus der Summe von $d\dot{A}_x$, $d\dot{A}_y$ und $d\dot{A}_z$.

Wir können nun die Energiegleichung in ihrer vorläufigen Form aufstellen. Der Leitsatz dazu lautet

Die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie im Volumenelement =
 \sum der durch die Strömung ein- und ausfließenden Energieströme +
 \sum der durch Wärmeleitung ein- und ausfließenden Energieströme +
 \sum der durch die Druck-, Normalspannungs- und Schubspannungskräfte am Volumenelement geleisteten Arbeiten pro Zeit +
 der Energiezufuhr von außen +
 Arbeit pro Zeit, die durch das Wirken der Volumenkräfte verursacht wird.

Gemäß des Leitsatzes und den Gleichungen (3.115), (3.116), (3.118), (3.120), (3.121), (3.122) sowie den Ausdrücken $(\rho \cdot \dot{q}_s) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ und $(\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ lautet der Energiesatz in seiner vorläufigen Form (der Term $dx \cdot dy \cdot dz$ kürzt sich auf beiden Seiten heraus)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}])}{\partial t} = \\
& - \left(\frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}] \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}] \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot [e + \frac{V^2}{2}] \cdot w)}{\partial z} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \\
& \left(-\frac{\partial(p \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xx} \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy} \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz} \cdot w)}{\partial x} \right) + \\
& \left(-\frac{\partial(p \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx} \cdot u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz} \cdot w)}{\partial y} \right) + \\
& \left(-\frac{\partial(p \cdot w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx} \cdot u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy} \cdot v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz} \cdot w)}{\partial z} \right) + \vec{k} \cdot \vec{v} + \rho \cdot \dot{q}_s \quad . \quad (3.123)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (3.123) beinhaltet bereits die vollständige Physik und es bleibt nun die Aufgabe übrig, die Energiegleichung in eine für das weitere Arbeiten geeignetere Form zu überführen und für die Normal- und Schubspannungen die entsprechenden Ausdrücke gemäß des Stokesschen Reibungsgesetzes (3.16) einzusetzen. Zuerst werden wir die Gleichung (3.123) in eine andere Form bringen. Durch Umformen und Differenzieren erhalten wir die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \right) + \\
& \rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \\
& \rho \cdot \left(\frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \left(\frac{V^2}{2} \right)}{\partial z} \right) = \\
& \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) - \\
& p \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) - \left(u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
& u \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \\
& w \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \sigma_{xx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \\
& \tau_{xy} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \\
& \vec{k} \cdot \vec{v} + \rho \cdot \dot{q}_s \quad . \quad (3.124)
\end{aligned}$$

Der erste Summand in der Gleichung (3.124) ist wegen der Kontinuitätsgleichung (3.1) gleich Null. Ebenfalls können wir den dritten Summanden der linken Seite der Gleichung (3.124) und die Terme

$$\begin{aligned}
& u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad , \quad u \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad , \\
& v \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad , \quad w \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad , \quad \vec{k} \cdot \vec{v}
\end{aligned}$$

herausstreichen. Die für diese Vereinfachung dazugehörige Rechnung soll hier nicht vorgeführt werden. Sie wird nachfolgend nur kurz beschrieben.

- Man multipliziert die erste Gleichung (3.13) mit u , die zweite Gleichung (3.14) mit v und die dritte Gleichung (3.15) mit w .
- Danach addiert man die so erhaltenen Gleichungen und erhält eine resultierende Gleichung, die man von der Gleichung (3.124) wiederum subtrahiert. Dabei fällt der Term $\vec{k} \cdot \vec{v}$ heraus.

Wenn wir die genannte Rechnung mit Gleichung (3.124) durchführen, erhalten wir die folgende Energiegleichung

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) - p \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) + \rho \cdot \dot{q}_s + \\ \sigma_{xx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \\ \tau_{zy} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \end{aligned} \quad (3.125)$$

Es bleibt nun nur noch übrig, in die Gleichung (3.125) die Normal- und Schubspannungsterme gemäß des Stokesschen Reibungsgesetzes (3.16) einzusetzen. Mit einer weiteren einfachen Rechnung erhält man dann die Energiegleichung in der endgültigen Form. Sie lautet

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) - p \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) + \rho \cdot \dot{q}_s + \mu \cdot \Phi \end{aligned} \quad , \quad (3.126)$$

mit der Dissipationsfunktion Φ

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad . \quad (3.127)$$

Diese enthält nur quadratische Glieder und ist deshalb an jeder Stelle im Strömungsfeld größer als Null. Sie bedeutet physikalisch die Umwandlung von Reibungsverlusten in Wärmeenergie, die aufgrund der quadratischen Terme irreversibel ist.

Bei der Herleitung der Energiegleichung haben wir bis jetzt noch keine Einschränkungen gemacht. Sie gilt noch vollkommen allgemein und beschreibt den Energiehaushalt in einem

kleinen Volumenelement auch für Strömungen, in denen z. B. chemische Prozesse ablaufen oder, was gleichbedeutend ist, Verbrennungsprozesse stattfinden. Wir haben nur vorausgesetzt, dass die Strömung homogen ist (es dürfen also z. B. keine Rußpartikel in der Strömung vorhanden sein) und, dass das Fluid ein Newtonsches Medium ist. Nachfolgend werden wir nun die Energiegleichung speziell für kalorisch perfekte Gase aufstellen.

Für ein kalorisch perfektes Gas sind die spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v keine Funktion der Temperatur und es gelten die folgenden thermodynamischen Beziehungen

$$e = c_v \cdot T \quad , \quad h = e + \frac{p}{\rho} = c_p \cdot T$$

oder

$$e = c_p \cdot T - \frac{p}{\rho} \quad . \quad (3.128)$$

Mit Gleichung (3.126) und (3.128) erhält man nach einer kleineren Rechnung unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung (3.1) die Energiegleichung für ein kalorisch perfektes Gas

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \rho \cdot \dot{q}_s + \mu \cdot \Phi \quad . \end{aligned} \quad (3.129)$$

Mit der Boussinesq-Approximation, die wir für Strömungen mit Wärmetransport in Abschnitt 3.2.1 eingeführt haben, erhält man die Energiegleichung in der folgenden Form:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = \lambda \cdot \Delta T \quad . \quad (3.130)$$

3.3.2 Turbulente Strömungen

Als Nächstes wollen wir nun die Energiegleichung zeitlich mitteln. Dabei beschränken wir uns auf kalorisch perfekte Gase und kommen wieder auf die Gleichung (3.129) zurück. Bevor sie zeitlich gemittelt wird, werden wir ihre rechte Seite noch modifizieren. Durch Erweitern der linken Seite der Gleichung (3.129) durch die linke Seite der Kontinuitätsgleichung (3.1) und die anschließende Zusammenfassung erhalten wir (der Index i steht wieder für die drei Raum- bzw. Geschwindigkeitsrichtungen)

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + T \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u_i)}{\partial x_i} \right) =$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T \cdot u_i)}{\partial x_i} \quad .$$

Die Energiegleichung kann also wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot T \cdot w)}{\partial z} = \\ & \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) + \rho \cdot \dot{q}_s + \Psi \quad . \end{aligned} \quad (3.131)$$

Ψ ist die Summe der folgenden Produkte (vgl. dazu (3.125))

$$\begin{aligned} \Psi = & \sigma_{xx} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & \tau_{xz} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \end{aligned}$$

Wir mitteln nun die Energiegleichung und setzen dafür in die Energiegleichung die Größen u , v , w , p und T gemäß den Gleichungen (3.30) ein. Dadurch erhalten wir die folgende Gleichung (wir verwenden wieder die abkürzende Schreibweise)

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot (\tilde{T} + T''))}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\rho \cdot c_p \cdot (\tilde{T} + T'') \cdot (\tilde{u}_i + u''_i))}{\partial x_i}} = \\ & \overline{\left(\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial t} + (\tilde{u}_i + u''_i) \cdot \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} \right)} + \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \cdot \frac{\partial(\tilde{T} + T'')}{\partial x_i} \right] \right)} + (\bar{\rho} + \rho') \cdot \dot{q}_s + \Psi. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Mit der Anwendung der bereits bekannten Rechenregeln erhalten wir die zeitlich gemittelte Energiegleichung für kalorisch perfekte Gase

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T})}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{u})}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{v})}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{w})}{\partial z}} = \\ & \overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}} + \tilde{u} \cdot \overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}} + \tilde{v} \cdot \overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}} + \tilde{w} \cdot \overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}} + \overline{u'' \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}} + \overline{v'' \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}} + \overline{w'' \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}} + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \overline{T''}}{\partial x} - c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u''} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \overline{T''}}{\partial y} - c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot v''} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial \overline{T''}}{\partial z} - c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot w''} \right) + \bar{\rho} \cdot \dot{q}_s + \bar{\Psi} \end{aligned} \quad , \quad (3.133)$$

mit

$$\bar{\Psi} = \sigma_{kk} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \bar{\sigma}_{kk} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} + \sigma_{kk} \cdot \overline{\frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} + \bar{\tau}_{ij} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \cdot \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \quad (3.134)$$

Für die zeitlich gemittelten Normal- und Schubspannungen $\bar{\sigma}_{kk}$ bzw. $\bar{\tau}_{ij}$ gelten die Gleichungen (3.41) und (3.42).

Die Gleichung (3.133) enthält auf der rechten Seite drei zusätzliche Terme. Weiterhin hat sich die Anzahl der Glieder von $\bar{\Psi}$ im Vergleich zu Ψ verdoppelt. Es ist nicht schwer, die Herkunft der zusätzlichen Ausdrücke nachzuvollziehen. Der Term $\partial(c_p \cdot \rho \cdot \overline{T'' \cdot u_j''})/\partial x_j$ rührt wieder von den nichtlinearen, konvektiven Gliedern her. Er beschreibt in der Energiegleichung den zusätzlichen Energietransport, der durch die turbulenten Schwankungsbewegungen hervorgerufen wird.

Bevor wir diesen Abschnitt beenden, wollen wir noch die zeitlich gemittelte Energiegleichung für inkompressible Strömungen angeben. Zur Berechnung der Strömungsgrößen \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} und des Druckes \bar{p} reichen die Gleichungen (3.44) bis (3.47) vollständig aus. Ist jedoch darüberhinaus die Temperaturverteilung im Strömungsfeld von Interesse, so muss zusätzlich die Energiegleichung gelöst werden.

Bei der Berechnung von inkompressiblen Strömungen ist die Energiegleichung von der Kontinuitätsgleichung und den Impulsgleichungen entkoppelt, d. h. man kann zuerst die Gleichungen (3.44) bis (3.47) lösen und benutzt anschließend mit der Kenntnis von \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} und \bar{p} die Energiegleichung zur Bestimmung des Temperaturfeldes.

Die Energiegleichung für ein inkompressibles Medium lautet mit $c = c_v$

$$\begin{aligned} \rho \cdot c \cdot \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{T} \cdot \bar{w})}{\partial z} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot v'} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} - \rho \cdot c \cdot \overline{T' \cdot w'} \right) + \rho \cdot \dot{q}_s + \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Wir kommen nun auf unser ursprüngliches Problem zurück, das wir uns am Anfang dieses Kapitels gestellt haben. Es sollten die Gleichungen zur Berechnung der inkompressiblen Fahrzeugströmung sowie der kompressiblen Tragflügelströmung aufgestellt werden. Nachfolgend wollen wir die Anwendungen der Gleichungen auf die genannten Probleme erläutern.

• Die inkompressible Fahrzeugströmung

Mit der Kontinuitätsgleichung (3.2) und den Navier-Stokes Gleichungen (3.19) haben wir **vier** Gleichungen für die **vier** Unbekannten u , v , w und p zur Verfügung. Die Zähigkeit μ setzen wir als bekannt und nicht abhängig von der Temperatur voraus.

Die Navier-Stokes Gleichungen (3.19) sind nichtlinear und von zweiter Ordnung. Die Lösungsverfahren dieses Systems partieller Differentialgleichungen werden in Kapitel 4. erläutert.

- **Die kompressible Tragflügelströmung**

Bei der Berechnung von kompressiblen Strömungen muss neben den Größen u , v , w und p noch die Dichte ρ in Abhängigkeit von den drei Koordinaten x , y und z berechnet werden. Mit der Kontinuitätsgleichung (3.1), den Navier-Stokes Gleichungen (3.18) und der Energiegleichung (3.109) haben wir **fünf Gleichungen** für die **fünf Unbekannten** u , v , w , p und T zur Verfügung. Die Dichte können wir nach der Berechnung der zuletzt genannten Größen mit der thermischen Gasgleichung

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

berechnen.

Auch diese Gleichungen sind, wie die Gleichungen für inkompressible Strömungen, nichtlinear und können in der Regel für technische Probleme nur mit numerischen Verfahren auf leistungsfähigen Rechnern gelöst werden. Die Lösungsmethoden werden wiederum in Kapitel 4. behandelt.

Insbesondere bei der Berechnung von kompressiblen Strömungsfeldern muss die Strömungsphysik mitberücksichtigt werden. So wissen wir bereits, dass in kompressiblen Strömungen Verdichtungsstöße auftreten können, über die sich die Strömungsgrößen unstetig ändern. Jedoch sind unsere aufgestellten Differentialgleichungen an der Stelle solcher Unstetigkeiten nicht gültig, so dass sich nun die Frage stellt, wie man an diesen Stellen die Strömung berechnen kann. Es gibt in der numerischen Strömungsmechanik geeignete Techniken, Unstetigkeiten im Strömungsfeld zu berücksichtigen. Diese Techniken werden später einführend vorgestellt.

- **Die heiße kompressible Strömung**

Das Gas der kompressiblen Tragflügelströmung kann als kalorisch ideales Gas angenommen werden. Wird jedoch die Zuström-Mach-Zahl groß ($M_\infty > 2$) oder sogar sehr groß ($M_\infty > 5$), so verhält sich das Gas nicht mehr kalorisch perfekt. Diese Fälle treten z. B. bei der Umströmung von Überschallflugzeugen (z.B. Concorde) und Raumfahrtfluggeräten (z. B. Space Shuttle) auf, die die Erdatmosphäre verlassen oder wiedereintreten. In solchen Fällen kann die Energiegleichung (3.129) für kalorisch perfekte Gase nicht mehr angewendet werden. Es muss dann die allgemeingültigere Energiegleichung (3.126) zur Lösung des Problems herangezogen werden. Weitere Beziehungen für die innere Energie e sowie für die Werte der Zähigkeit μ und der Wärmeleitfähigkeit λ müssen der Thermodynamik entnommen werden. Hier beginnt das interessante Gebiet der Aerothermodynamik, das die Strömungsmechanik idealer Gase mit der Chemie heißer Gase verknüpft. Für viele Probleme der Aerothermodynamik reichen die hier aufgestellten Gleichungen wegen der Hochtemperatureffekte nicht mehr aus und sie müssen deshalb für die Aufgaben und Fragestellungen der Aerothermodynamik erweitert werden (s. dazu *H. Oertel jr.* 1994, 2005).

- **Strömungen mit Wärmeübertragung**

Für die freie und erzwungene Konvektionsströmung, die wir in Kapitel 2.6 eingeführt haben, kann die Boussinesq-Approximation angewendet werden. Sie besagt,

dass die Stoffgrößen als konstant vorausgesetzt werden und lediglich die Temperaturabhängigkeit der Dichte (3.23)

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot [1 - \alpha \cdot (T - T_0)]$$

im Auftriebsterm berücksichtigt wird. Daraus resultieren wiederum fünf vereinfachte nichtlineare Differentialgleichungen für die fünf unbekannten u , v , w , p und T .

3.4 Grenzschichtgleichungen

Ludwig Prandtl hat im Jahre 1904 in seiner berühmten achtseitigen Arbeit (vgl. *L. Prandtl* 1961) nachgewiesen, dass sich bei der Umströmung von Körpern bei großen Reynolds-Zahlen ($Re_L > 10^4$) die Reibungseffekte auf eine sehr dünne Schicht um den Körper beschränken. Außerhalb dieser Schicht, die wir Grenzschicht nennen, kann die Strömung als reibungsfrei angenommen werden.

Die Dicke der Grenzschicht ist abhängig von der Reynolds-Zahl. Bei der Profilumströmung besitzt sie z. B. bei einer Reynolds-Zahl von $Re_L = \rho \cdot u_\infty \cdot L / \mu \approx 10^5 - 10^6$ an der Hinterkante eine Dicke von ungefähr 5% der Profillänge L vorausgesetzt, dass die Grenzschichtströmung turbulent ist. Eine laminare Grenzschicht ist wesentlich dünner.

Für die Strömung außerhalb der Grenzschicht vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen auf die Euler-Gleichungen, da die Reibungsglieder für diesen Teil der Strömung verschwinden. Die Navier-Stokes Gleichungen lassen sich ebenfalls für die Grenzschichtströmung vereinfachen. Wie wir nachfolgend sehen werden, können wir für die Grenzschichtströmung in den Navier-Stokes-Gleichungen gewisse Terme vernachlässigen, da sie im Vergleich zu den übrigen Gliedern der Gleichungen eine Größenordnung kleiner sind.

3.4.1 Inkompressible Strömungen

Um die Grenzschichtgleichungen aus den Navier-Stokes-Gleichungen ableiten zu können, führen wir eine Größenordnungsabschätzung der einzelnen Glieder der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen durch. Wir wollen uns zunächst mit der Größenordnungsabschätzung vertraut machen und betrachten dazu die horizontale Geschwindigkeitskomponente $u^* = u/u_\infty$ der Plattengrenzschichtströmung (Abbildung 3.22).

Wir gehen zunächst davon aus, dass die Grenzschichtströmung zweidimensional, inkompressibel und stationär sei. Später betrachten wir dann das komplexere dreidimensionale Strömungsproblem. Die dimensionslosen Strömungsgrößen u^* , w^* und p^* erfüllen zusammen die nachfolgenden dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung (s. Gleichung (3.198)). Die Gleichungen lauten unter Vernachlässigung

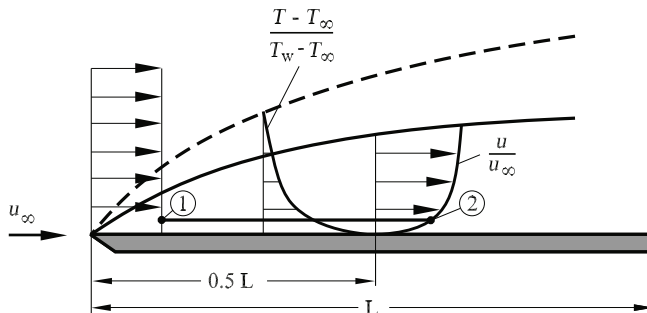


Abb. 3.22: Plattengrenzschichtströmung

der Volumenkräfte k_i

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad , \quad (3.136)$$

$$u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad , \quad (3.137)$$

$$u^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad , \quad (3.138)$$

mit

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} \quad , \quad z^* = \frac{z}{L} \quad , \quad Re_L = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot L}{\mu} \quad , \\ u^* &= \frac{u}{u_\infty} \quad , \quad w^* = \frac{w}{u_\infty} \quad , \quad p^* = \frac{p}{\rho \cdot u_\infty^2} \quad . \end{aligned}$$

L entspricht der Länge der Platte und u_∞ steht für die Anströmgeschwindigkeit.

Bei der Durchführung der Größenordnungsabschätzung interessiert uns nicht, ob die einzelnen Glieder sich durch einen Faktor von drei, vier etc. unterscheiden. Wir wollen die Unterschiede in den Größenordnungen (Faktor zehn oder mehr) der einzelnen Glieder herausfinden.

Um mit der Größenordnungsabschätzung vertraut zu werden, betrachten wir den Differentialquotienten $\partial u^*/\partial x^*$, der in den Gleichungen (3.136) und (3.137) steht. Betrachten wir z. B. die Stellen 1 und 2 in Abbildung 3.22, an denen die Größe u^* ungefähr 1.0 (Stelle 1) bzw. 0.1 (Stelle 2) ist, so lässt sich der Differentialquotient $\partial u^*/\partial x^*$ wie nachfolgend gezeigt abschätzen

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right| \approx \left| \frac{0.1 - 1}{0.5 - 0} \right| = 1.8 \quad .$$

Die Größe $\partial u^*/\partial x^*$ nimmt also im dimensionslosen Rechengbiet Zahlenwerte zwischen 1 und 10 an. Sie ist also von der Größenordnung Eins.

Bei unserer weiteren Abschätzung gehen wir davon aus, dass die Grenzschichtdicke δ klein und von der Größenordnung ϵ ist, wobei ϵ für eine kleine Größenordnung steht. Diese Annahme ist insofern richtig, als wir im Experiment beobachten können, dass bei großen Reynolds-Zahlen $Re > 10^4$ die Grenzschichtdicke δ sehr viel kleiner als z. B. die Profillänge L ist.

Mit dieser Kenntnis können wir nun den zweiten Differentialquotienten $\partial w^*/\partial z^*$ in der Kontinuitätsgleichung abschätzen. Die Größe z^* kann in der Grenzschicht nur Werte der Größenordnung ϵ annehmen. Da $\partial u^*/\partial x^*$ die Größenordnung Eins besitzt und deshalb auch $\partial w^*/\partial z^*$ von der Größenordnung Eins sein muss (sonst kann die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt sein), muss auch die Größe w^* von der Größenordnung ϵ sein. Wir erhalten also die folgende Abschätzung

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad .$$

$$1 \quad \epsilon$$

Die Geschwindigkeitskomponente w^* ist also sehr klein und die Kontinuitätsgleichung bleibt für die Grenzschichtströmung weiterhin unverändert bestehen.

Wir können nun dazu übergehen, die Glieder der Navier-Stokes Gleichungen abzuschätzen. Gemäß unserer vorigen Überlegungen erhalten wir die folgende Abschätzung (unter den Gleichungen sind jeweils die Größenordnungen der einzelnen Glieder angegeben)

$$\begin{aligned} u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad , \\ 1 \cdot 1 \quad \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} &= 1 \quad \epsilon^2 \cdot \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\epsilon^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} u^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad . \\ 1 \cdot \frac{\epsilon}{1} \quad \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon} &= \epsilon \quad \epsilon^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{1} \quad \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \right) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Bezüglich der Abschätzung ist Folgendes zu ergänzen:

- Wir setzen voraus, dass die Reynolds-Zahl so groß ist, dass der Ausdruck $1/Re_L$ mindestens von der Größenordnung ϵ^2 klein ist.
- In der Gleichung (3.140) besitzt der Druckgradient $\partial p^*/\partial z^*$ die Größenordnung ϵ , da alle anderen Glieder in der Gleichung von dieser Größenordnung sind.
- Wir können also Gleichung (3.140) bei der Berechnung der Grenzschichtströmung streichen und davon ausgehen, dass sich der Druck p in z -Richtung kaum ändert. Es gilt also für die Berechnung $p \neq f(z)$.
- Der Druckgradient $(\partial p^*/\partial x^*) = (dp^*/dx^*)$ besitzt die Größenordnung Eins. Betrachten wir die Gleichung (3.139) für den Bereich des Grenzschichtrandes, wo die reibungsbehaftete Strömung in die reibungslose Strömung übergeht, so können wir die Reibungsglieder vernachlässigen. Da die Gleichung (3.139) auch am Grenzschichtrand erfüllt ist und die linke Seite die Größenordnung Eins besitzt, ist auch der Druckgradient dp^*/dx^* von der Größenordnung Eins.
- Aus der Größenordnungsabschätzung für die Gleichung (3.139) geht hervor, dass die zweite Ableitung in x^* -Richtung sehr klein ist und in der Gleichung vernachlässigt werden kann.

Wir gehen wieder zu den dimensionsbehafteten Größen über und nutzen die Kenntnisse der Größenordnungsabschätzung zur Formulierung der Grenzschichtgleichungen. Sie lauten für eine zweidimensionale, inkompressible und stationäre Grenzschichtströmung (Abbildung 3.23)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.141)$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad . \quad (3.143)$$

Der Druckgradient dp/dx kann in der Gleichung (3.142) als bekannt vorausgesetzt werden. Weiter unten wird beschrieben, wie er ermittelt werden kann. Die Grenzschichtgleichungen (3.141) und (3.142) sind also **zwei Gleichungen** für die **zwei Unbekannten** u und w , wenn wir die Gleichung (3.143) nicht mitberücksichtigen.

Um den Druckgradienten dp/dx zu ermitteln, betrachten wir eine Stromlinie entlang des Grenzschichtrandes einer Profilmströmung (Abbildung 3.23). Da auf dem Grenzschichtrand die Reibungseffekte verschwinden, gilt in einer gewissen Umgebung die eindimensionale Euler-Gleichung. Sie lautet entsprechend Kapitel 2.3.3

$$\rho \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad . \quad (3.144)$$

$U_e = u(\delta)$ steht für die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand. Sie berechnet sich mit der Theorie der reibungsfreien Außenströmung, auf die wir im nachfolgenden Abschnitt zu sprechen kommen.

Zur Berechnung der Grenzschichtströmung benötigen wir noch geeignete Randbedingungen für die partiellen Differentialgleichungen (3.141) und (3.142). Auf der Kontur, also für $z = 0$, gilt die Haftbedingung $u(z = 0) = 0$ und $w(z = 0) = 0$. Am Grenzschichtrand nimmt die u -Geschwindigkeitskomponente den Wert U_e an die, wie bereits erwähnt, mit der Theorie für reibungslose Strömungen berechnet wird. Die Grenzschichtdicke δ ist schwer definierbar, da sich die Größe u bekanntlich asymptotisch in z -Richtung dem Wert U_e annähert. Deshalb wird bezüglich dieser Randbedingung des öfteren in der Literatur die mathematische Formulierung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u(x, z) = U_e(x)$$

verwendet.

Mit den Gleichungen (3.141) und (3.142) können wir das Strömungsproblem vollständig

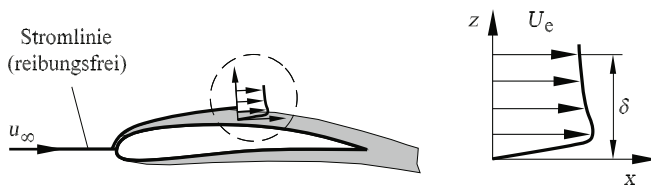


Abb. 3.23: Zweidimensionale, inkompressible Grenzschicht

lösen. Für die Berechnung der **Temperaturgrenzschicht** benötigen wir jedoch noch eine weitere Grenzschichtgleichung, die wir wiederum durch eine Größenordnungsabschätzung der einzelnen Glieder der Energiegleichung (3.135) erhalten. Da wir weiterhin eine zweidimensionale inkompressible und stationäre Grenzschicht betrachten, vereinfacht sich die Gleichung entsprechend. Wir vernachlässigen wieder die Volumenkräfte k_i und den Wärmestrom q .

Um die Größenordnungsabschätzung durchführen zu können, überführen wir die Gleichung (3.135) in die nachfolgende dimensionslose Form. Dazu führen wir die zusätzliche dimensionslose Größe θ ein, die wie folgt definiert ist

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad .$$

T_w und T_∞ stehen für die Temperatur der Platte bzw. für die Temperatur der Anströmung. Die entsprechende dimensionslose Form der Energiegleichung lautet (der Leser sollte die entsprechende Rechnung dazu selbst durchführen)

$$\begin{aligned} u^* \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = \\ Ec \cdot \left(u^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{Re_L \cdot Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re_L} \cdot \Phi^* \quad . \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die Größen Re , Pr und Ec stehen der Reihe nach für die Reynolds-, Prandtl- und Eckert-Zahl. Sie sind wie folgt definiert

$$Re_L = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot L}{\mu} \quad , \quad Pr_\infty = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda} \quad , \quad Ec = 2 \cdot \frac{T_0 - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad .$$

In der Gleichung zur Definition der Eckert-Zahl Ec steht T_0 für die Gesamttemperatur. Beachte beim Durchführen der Rechnung zur Überführung der Energiegleichung in die dimensionslose Form, dass gemäß des Energiesatzes der Thermodynamik die Gleichung

$$\frac{u_\infty^2}{T_w - T_\infty} = Ec \cdot c_p$$

gilt. Φ^* ist die dimensionslose Dissipationsfunktion. Sie lautet entsprechend

$$\Phi^* = 2 \cdot \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \quad .$$

Bei der Größenordnungsabschätzung gehen wir wieder davon aus, dass $1/Re_L$ von der Größenordnung ϵ^2 ist und, dass die Prandtl- und Eckert-Zahl von der Größenordnung Eins sind. Es gibt Anwendungen, bei denen die Prandtl- oder Eckert-Zahl eine Größenordnung größer oder kleiner als Eins sein können. In der Mehrzahl der Anwendungen treffen unsere Annahmen jedoch zu.

Mit den getroffenen Annahmen erhalten wir nun die folgende Größenordnungsabschätzung für die Energiegleichung (3.145)

$$\begin{aligned} u^* \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = \\ 1 \cdot 1 \quad \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = \end{aligned}$$

$$Ec \cdot \left(u^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{Re_L \cdot Pr_\infty} \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re_L} \cdot \Phi^* \quad .$$

$$1 \cdot \left(1 \cdot 1 \quad \epsilon \cdot \epsilon \right) \quad \epsilon^2 \quad \cdot \left(1 \quad \frac{1}{\epsilon^2} \right)$$

Für den letzten Summanden der rechten Seite erhalten wir die nachfolgende Größenordnungsabschätzung

$$\frac{Ec}{Re_L} \cdot \Phi^* = \frac{Ec}{Re_L} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] \cdot$$

$$\epsilon^2 \cdot \left[1 \quad 1 \quad \epsilon^2 \quad \epsilon \quad \frac{1}{\epsilon} \quad \frac{1}{\epsilon^2} \right]$$

Die Größenordnungsabschätzung für den Differentialquotienten $\partial\theta/\partial x^*$ erfolgt in analoger Weise zur Abschätzung von $\partial u^*/\partial x^*$. θ besitzt auf der Kontur den Wert 1 und am Grenzschichtrand für die Plattenströmung den Wert 0.

Gemäß der Größenordnungsabschätzung erhalten wir aus der Energiegleichung für die Temperaturgrenzschicht die nachfolgende Gleichung. Sie schreibt sich mit den dimensionsbehafteten Größen wie folgt

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad . \quad (3.146)$$

Für die Gleichung (3.146) benötigen wir noch zwei Randbedingungen für die Größe T . Betrachten wir eine Kontur mit einer bekannten Temperatur T_w , so lauten die beiden Randbedingungen

$$T(x, z = 0) = T_w \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(x, z) = T_e \quad .$$

Betrachten wir hingegen eine Kontur, in die ein bekannter Wärmestrom q fließt, so lauten die Randbedingungen entsprechend

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{q(x)}{\lambda} \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(x, z) = T_e \quad .$$

Die Temperatur T_e am Grenzschichtrand wird mit der reibungslosen Theorie ermittelt, auf die wir im nachfolgenden Kapitel eingehen werden.

Von den Grenzschichtgleichungen der **Strömungen mit Wärmeübertragung** haben wir bereits in Kapitel 2.6 Gebrauch gemacht. Für die freie Konvektionsströmung der beheizten vertikalen Platte führt man die Grenzschichttransformation ein:

$$x^* = \frac{x}{L} \cdot Gr_L^{\frac{1}{4}} \quad , \quad z^* = \frac{z}{L} \quad ,$$

$$u^* = \frac{u}{\sqrt{g \cdot \alpha \cdot L \cdot (T_m - T_\infty)}} \cdot Gr_L^{\frac{1}{4}} \quad , \quad w^* = \frac{w}{\sqrt{g \cdot \alpha \cdot L \cdot (T_m - T_\infty)}} \quad ,$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_m - T_\infty} \quad .$$

Damit werden die Grenzschichtgleichungen unabhängig von der Rayleigh- bzw. Grashof-Zahl. Es ergibt sich mit der Boussinesq-Approximation und unter Vernachlässigung der Dissipation das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \quad , \\ u^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + T^* \quad , \\ u^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial z^*} &= \frac{1}{Pr_\infty} \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \quad . \end{aligned}$$

Der Energie- und Impulsausgleich ist über die Temperatur T^* im Auftriebsterm gekoppelt. Die Temperaturverteilung der freien Konvektionsströmung erzeugt demzufolge die Geschwindigkeitsverteilung.

Für die erzwungene Konvektionsströmung der beheizten längs angeströmten Platte der Abbildung 3.22 vereinfachen sich die Grenzschichtgleichungen (3.143) und (3.146) unter der Voraussetzung der Boussinesq-Approximation und Vernachlässigung der Dissipation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \quad , \\ u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad , \\ u^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial T^*}{\partial z^*} &= \frac{1}{Pr_\infty \cdot Re_L} \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \quad . \end{aligned}$$

Statt der Grashof-Zahl charakterisiert bei der erzwungenen Konvektionsströmung die Reynolds-Zahl die Grenzschichtströmung mit Wärmeübertragung. Für die Gültigkeit der Grenzschichtgleichungen muss zusätzlich zu $Re_L \gg 1$, $Re_L \cdot Pr_\infty \gg 1$ gefordert werden. Die Kontinuitäts- und Impulsgleichungen sind jetzt von der Energiegleichung entkoppelt. Damit kann die Strömungsgrenzschicht unabhängig von der Temperaturgrenzschicht berechnet werden.

Bis jetzt haben sich unsere Betrachtungen auf zweidimensionale laminare Grenzschichten beschränkt. Nachfolgend werden wir die entsprechenden Erweiterungen der Gleichungen auf turbulente zweidimensionale Grenzschichten diskutieren.

Um die Gleichungen zur Berechnung einer **turbulenten Grenzschicht** aufzustellen, müssen wir eine Größenordnungsabschätzung für die einzelnen Terme der Reynolds-Gleichungen durchführen. Diese lauten für eine zweidimensionale Grenzschicht unter Vernachlässigung der Volumenkräfte in dimensionsloser Form (Gleichungen (3.44) bis (3.47))

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad , \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= \\ -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) &- \frac{\partial(\overline{u^{*'}{}^2})}{\partial x^*} - \frac{\partial(\overline{u^{*'} \cdot w^{*'}})}{\partial z^*} \quad , \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$u^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{\partial(\overline{u^{*'} \cdot w^{*'}})}{\partial x^*} - \frac{\partial(\overline{w^{*'}^2})}{\partial z^*} \quad (3.149)$$

u^* , w^* und p^* in den Gleichungen (3.147) bis (3.149) sind dimensionslose und **zeitlich gemittelte** Größen. Alle Geschwindigkeiten, einschließlich der Schwankungsgeschwindigkeiten, sind mit der Zuströmgeschwindigkeit u_∞ dimensionslos gemacht worden. Die Größe p^* steht für $p/(\rho \cdot u_\infty^2)$.

Die Kontinuitätsgleichung (3.147) bleibt, wie im laminaren Fall, gemäß der Größenordnungsabschätzung unverändert. Damit wir die zeitlich gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen abschätzen können ist es unumgänglich, experimentelle Ergebnisse für die Größen $\overline{u^{*'}^2}$ und $\overline{u^{*'} \cdot w^{*'}}$ heranzuziehen.

In der Abbildung 3.24 sind diese Größen über der Koordinate normal zur Oberfläche dargestellt (siehe auch Abbildung 2.83). Wie wir der genannten Abbildung entnehmen können, verschwinden die Schwankungsgrößen am Grenzschichttrand und infolge der Haftbedingung ebenfalls auf der Oberfläche. Die Schwankungsgrößen $\overline{u^{*'}^2}$ und $\overline{u^{*'} \cdot w^{*'}}$ unterscheiden sich innerhalb der Grenzschicht um einen Faktor der nicht größer als zehn ist, d. h. sie sind von gleicher Größenordnung. Die Größenordnung dieser Glieder beträgt ϵ .

Mit dieser Kenntnis können wir nun die Größenordnung der Terme der Schwankungsgrößen abschätzen. Wir beginnen mit der Größenordnungsabschätzung für die Schwankungsgrößen der Gleichung (3.148). Diese ergibt

$$-\left(\frac{\partial(\overline{u^{*'}^2})}{\partial x^*} + \frac{\partial(\overline{u^{*'} \cdot w^{*'}})}{\partial z^*} \right) \quad \frac{\epsilon}{1} \quad \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

Wir erkennen, dass nur der zweite Summand von der Größenordnung Eins ist und deshalb in der Gleichung (3.148) erhalten bleibt.

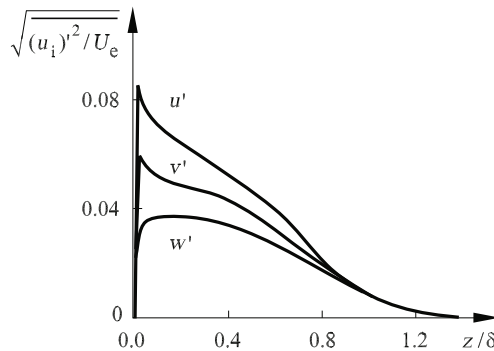


Abb. 3.24: Schwankungsgrößen in der turbulenten Grenzschicht

Abschließend müssen noch die Größenordnungen der Ausdrücke der Gleichung (3.149) bestimmt werden. Die nachfolgende Größenordnungsabschätzung ergibt

$$u^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \cdot \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{Re_L} \cdot \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{\partial(\overline{u'^* \cdot w'^*})}{\partial x^*} - \frac{\partial(\overline{w'^*{}^2})}{\partial z^*} \quad .$$

$$1 \cdot \frac{\epsilon}{1} \quad \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon} = 1 \quad \epsilon^2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{1} \quad \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \right) \quad \frac{\epsilon}{1} \quad \frac{\epsilon}{\epsilon}$$

Alle Glieder der Größenordnung Eins bleiben erhalten. Der Druckgradient $\partial p^*/\partial z^*$ ist also im Gegensatz zur laminaren Grenzschicht von der Größenordnung Eins. Die entsprechende dimensionsbehaftete Grenzschichtgleichung für die z -Richtung lautet also

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho \cdot \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \quad . \quad (3.150)$$

Für die Berechnung der Grenzschicht können wir die Gleichung (3.150) allerdings vernachlässigen, da der Druck vom Grenzschichttrand bis zur Oberfläche nur um einen Wert der Größenordnung ϵ variiert.

Nach der Herleitung der Grenzschichtgleichungen mittels einer Größenordnungsabschätzung durch dimensionslose Kennzahlen gehen wir nun wieder zu dimensionsbehafteten Gleichungen über. Die Gleichungen für eine stationäre, zweidimensionale und turbulente Grenzschichtströmung können wir also wie folgt aufschreiben, wenn wir den Druckgradienten $\partial \bar{p}/\partial x$, wie bereits beschrieben, gemäß der eindimensionalen Eulergleichung berücksichtigen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.151)$$

$$\rho \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \rho \cdot \frac{\partial(\overline{u' \cdot w'})}{\partial z} \quad . \quad (3.152)$$

Das Überstreichen der einzelnen Größen soll auf die zeitlich gemittelten Größen hinweisen.

Für die Berechnung der turbulenten inkompressiblen Temperaturgrenzschicht benötigen wir die gemäß einer Größenordnungsabschätzung vereinfachte Energiegleichung. Da wir das Wesentliche zur Herleitung der Grenzschichtgleichungen bereits diskutiert haben und da sich auch bei der Vorgehensweise zur Vereinfachung der Energiegleichung nichts ändert, geben wir diese Gleichung ohne Herleitung wie folgt an. Sie lautet

$$\rho \cdot c \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) =$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w' \cdot T'}) - \bar{u} \cdot U_e \cdot \frac{dU_e}{dx} + \left(\mu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \cdot \overline{w' \cdot u'} \right) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad . \quad (3.153)$$

Die Gleichungen für eine turbulente Grenzschichtströmung besitzen auf der rechten Seite für die Schwankungsgrößen nur Differentialquotienten bezüglich der z -Richtung. Die

entsprechenden Differentialquotienten in Hauptströmungsrichtung (x -Richtung) sind vernachlässigbar klein. Die in den Grenzschichtgleichungen stehenden Schwankungsgrößen müssen mit geeigneten Turbulenzmodellen, auf die wir im vorigen Abschnitt eingegangen sind, entsprechend modelliert werden.

Im verbleibenden Teil dieses Abschnittes wollen wir die aufgestellten Gleichungen auf dreidimensionale Grenzschichten erweitern. Eine dreidimensionale Grenzschichtströmung, so wie sie z. B. bei der Kraftfahrzeugumströmung auftritt, ist in Abbildung 3.25 dargestellt. Die Gleichungen für eine inkompressible und turbulente Grenzschichtströmung sind nachfolgend angegeben. Sie basieren, wie die Gleichungen für die zweidimensionalen Grenzschichtströmungen, auf einer Größenordnungsabschätzung der Reynolds-Gleichungen und beinhalten deshalb bezüglich ihrer Herleitung nichts wesentlich Neues. Auf den dreidimensionalen Strömungszustand kommen wir noch zu sprechen.

Die Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.154)$$

$$\rho \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \rho \cdot \frac{\partial \overline{u' \cdot w'}}{\partial z} \quad , \quad (3.155)$$

$$\rho \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \rho \cdot \frac{\partial \overline{v' \cdot w'}}{\partial z} \quad . \quad (3.156)$$

Die Druckgradienten $\partial \bar{p} / \partial x$ und $\partial \bar{p} / \partial y$ lassen sich mit der Theorie der reibungslosen Strömungen berechnen, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden. Für die Berechnung von laminaren Grenzschichten entfallen die Schwankungsglieder auf der rechten Seite der Gleichungen (3.155) und (3.156). Die Größen \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} und \bar{p} sind dann nicht als zeitlich gemittelte Größen aufzufassen. Es ergeben sich die bereits abgeleiteten Gleichungen (3.141) bis (3.143) für laminare Grenzschichten.

Die Randbedingungen für die Gleichungen (3.154) bis (3.156) lauten gemäß der Haftbedingung der Strömung auf der Wand und der freien Außenströmung wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{u}(z=0) &= 0 \quad , \quad \bar{v}(z=0) = 0 \quad , \quad \bar{w}(z=0) = 0 \quad , \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{u} &= U_e \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{v} = V_e \quad . \end{aligned}$$

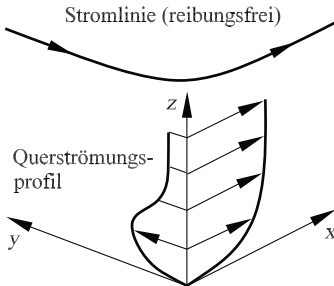


Abb. 3.25: Dreidimensionale Grenzschichtströmung

3.4.2 Kompressible Strömungen

Die Herleitung der Gleichungen für eine dreidimensionale kompressible Grenzschichtströmung basiert auf analogen Überlegungen, die wir bereits bei der Herleitung der übrigen Grenzschichtgleichungen kennengelernt haben. Allerdings ist ihr Umfang wesentlich größer, so dass wir die Gleichungen abschließend ohne Herleitung angeben werden.

Die nachfolgenden Grenzschichtgleichungen beinhalten im Gegensatz zur Favre-Mittelung Strömungsgrößen, die einfach zeitlich gemittelt sind (s. dazu Gleichung (3.25)). Für eine dreidimensionale kompressible Grenzschichtströmung lauten diese Gleichungen

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{w})}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.157)$$

$$\bar{\rho} \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \overline{u' \cdot w'})}{\partial z} \quad , \quad (3.158)$$

$$\bar{\rho} \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \overline{v' \cdot w'})}{\partial z} \quad . \quad (3.159)$$

Mit der Größe \tilde{w} ist die Größe

$$\tilde{w} = \frac{\bar{\rho} \cdot \bar{w}}{\bar{\rho}}$$

gemeint. Die vereinfachte Energiegleichung lautet für die dreidimensionale Grenzschichtströmung wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial y} + \tilde{w} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{Pr_\infty} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial z} - \bar{\rho} \cdot c_p \cdot \overline{w' \cdot T'} + \right. \\ &\quad \left. \mu \cdot \left(1 - \frac{1}{Pr_\infty} \right) \cdot \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \bar{\rho} \cdot \bar{u} \cdot \overline{w' \cdot u'} - \bar{\rho} \cdot \bar{v} \cdot \overline{w' \cdot v'} \right] \quad . \quad (3.160) \end{aligned}$$

h_0 steht für die Gesamtenthalpie pro Masse, die sich mit der Gleichung

$$h_0 = c_p \cdot T + \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{v}^2}{2}$$

berechnet. Die Randbedingungen für die Grenzschichtgleichungen lauten entsprechend

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z = 0) &= 0 \quad , \quad \bar{v}(x, y, z = 0) = 0 \quad , \quad \tilde{w}(x, y, z = 0) = 0 \quad , \\ \bar{\rho}(x, y, z = \delta) &= \bar{\rho}_e \quad , \quad h_0(x, y, z = \delta) = h_{0,e} \quad . \end{aligned}$$

Die Größen am Grenzschichttrand und die Druckgradienten in den Gleichungen (3.158) und (3.159) werden mit der reibungslosen Theorie ermittelt, auf die wir im nachfolgenden Abschnitt eingehen werden.

3.5 Potentialgleichungen

Im vorigen Abschnitt haben wir die Grenzschichtgleichungen kennen gelernt, für deren Anwendung wir die Strömungsgrößen am äußeren Grenzschichtrand kennen müssen. Wenn wir die Strömungsgrößen am Grenzschichtrand kennen dann wissen wir auch, welche Druckverteilung auf die Kontur wirkt, denn beim Herleiten der Grenzschichtgleichungen haben wir gelernt, dass innerhalb der Grenzschicht für den Druck die Bedingung $(\partial p / \partial z) \approx 0$ gilt.

Die Kenntnis der Druckverteilung auf der Kontur ist eine notwendige Voraussetzung zur Beantwortung vieler technischer Fragen. So können z. B. Festigkeitsrechnungen am Flugzeug nicht ohne diese Kenntnis durchgeführt werden. Dies gilt ebenfalls für die Ermittlung von Verstellkräften bei Tragflügelklappensystemen. In diesem Abschnitt werden wir die Gleichungen zur Ermittlung der Druckverteilung herleiten.

Wir betrachten den Grenzschichtrand, der für große Reynolds-Zahlen Re_L näherungsweise mit der Kontur übereinstimmt.

In Abbildung 3.26 ist ein Tragflügelprofil dargestellt, das von links mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt wird. Wie bereits im vorangegangenen Kapitel erläutert gehen wir davon aus, dass die Strömung außerhalb der Grenzschicht nahezu reibungsfrei ist.

Für die Berechnung der in Abbildung 3.26 gezeigten Strömung eignen sich die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichungen, die den bereits bekannten Navier-Stokes Gleichungen ohne Reibungsglieder entsprechen. Die Gleichungen lauten also, wenn wir wieder die Volumenkräfte vernachlässigen und davon ausgehen, dass die Strömung stationär ist

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.161)$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad (3.162)$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad (3.163)$$

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad . \quad (3.164)$$

Die in Abbildung 3.26 gezeigte Strömung beinhaltet neben der geringen Reibung noch eine weitere Eigenschaft, die die Berechnung vereinfacht. Wie wir unmittelbar einsehen werden, ist die Anströmung drehungsfrei. Nun kann mit dem bekannten Croccoschen Wirbelsatz (wir gehen auf ihn nicht gesondert ein) gezeigt werden, dass die Strömung auch

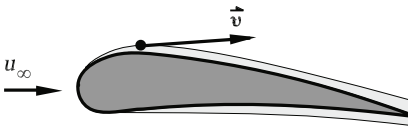


Abb. 3.26: Profilströmung

weiter stromab drehungsfrei bleibt, wenn im Strömungsfeld keine Entropie- und Gesamtenthalpiegradienten auftreten. Da wir eine isentrope Strömung ohne Energiezufuhr bzw. -abfuhr betrachten, bleibt auch die in Abbildung 3.26 gezeigte Strömung weiter stromab drehungsfrei.

Die Drehungsfreiheit ist für Strömungen ohne Energiezufuhr und -abfuhr nur dann nicht erfüllt, wenn die Strömung reibungsbehaftet ist (z. B. Grenzschichtströmung) oder wenn im Strömungsfeld ein gekrümmter Verdichtungsstoß auftritt, wie es z. B. bei einem stumpfen Körper in Überschallanströmung der Fall ist (Abbildung 3.27). Zur Berechnung der Strömung des zuletzt genannten Strömungsproblems müssen die Gleichungen (3.161) bis (3.164) angewandt werden. Detaillierte Kenntnisse über diese Zusammenhänge kann der Leser in *Prandtl – Führer durch die Strömungslehre*, H. Oertel jr. 2008 erwerben.

Wir wollen nachfolgend voraussetzen, dass die Strömung reibungs- und drehungsfrei ist. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich das Gleichungssystem mit den Gleichungen (3.161) bis (3.164) auf ein einfacheres Gleichungssystem vereinfachen, das im Wesentlichen nur eine partielle Differentialgleichung beinhaltet. Diese Differentialgleichung wird als **Potentialgleichung** bezeichnet. Die Motivation für diese Namensgebung werden wir nachfolgend kennen lernen.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Strömung drehungsfrei ist, dann gilt für das Strömungsfeld die Bedingung

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (3.165)$$

Anders geschrieben lautet die Bedingung (3.165)

$$\vec{i} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad , \quad (3.166)$$

so dass für das drehungsfreie Strömungsfeld an jeder Stelle die Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.167)$$

gelten.

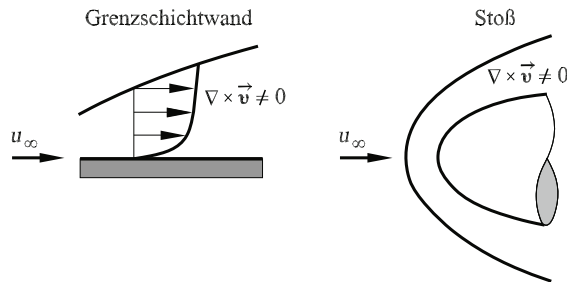


Abb. 3.27: Drehungsbehaftete Strömungen

Die Bedingungen für die Drehungsfreiheit (3.167) kombinieren wir zunächst mit den Euler-Gleichungen (3.162) - (3.164). Wir betrachten dazu die Gleichung (3.162), die wir mit dem Differential dx multiplizieren. Wir erhalten

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dx + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dx \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad . \quad (3.168)$$

Nun gelten gemäß der Drehungsfreiheit der Strömung die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad . \quad (3.169)$$

Setzen wir diese in die Gleichung (3.168) ein, erhalten wir die folgende Gleichung

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$$

oder

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial x} \frac{w^2}{2} \cdot dx \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \quad . \quad (3.170)$$

Mit einer analogen Rechnung bezüglich der Euler-Gleichungen (3.163) und (3.164) erhalten wir die nachfolgenden Gleichungen für die y - und z -Richtung. Diese lauten

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2}{2} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v^2}{2} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial y} \frac{w^2}{2} \cdot dy \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy \quad , \quad (3.171)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{u^2}{2} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial z} \frac{v^2}{2} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial z} \frac{w^2}{2} \cdot dz \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \quad . \quad (3.172)$$

Durch die Addition der drei Gleichungen (3.170) bis (3.172) ergibt sich die Gleichung

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{V^2}{2} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \frac{V^2}{2} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \frac{V^2}{2} \cdot dz \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) , \quad (3.173)$$

mit $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Die Gleichung (3.173) enthält auf der linken Seite das vollständige Differential für das Geschwindigkeitsfeld und auf der rechten Seite das vollständige Differential für das Druckfeld, so dass wir die Gleichung (3.173) auch wie folgt schreiben können

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot d(V^2) = -dp \quad \text{bzw.} \quad \rho \cdot V \cdot dV = -dp} \quad . \quad (3.174)$$

Mit der Gleichung (3.174) sind wir bereits aus der Stromfadentheorie vertraut. Jedoch lernten wir, dass diese Gleichung nur entlang eines Stromfadens gültig ist. Diese Einschränkung haben wir nun bei ihrer Herleitung nicht getroffen, d. h. sie gilt für ein drehungsfreies Strömungsfeld nicht nur entlang eines Stromfadens, sondern auch in jeder beliebigen Richtung im Strömungsfeld. Die Gleichung (3.174) benötigen wir für die weitere Herleitung der Potentialgleichung.

Zur Herleitung der Potentialgleichung benutzen wir die folgende Aussage der Vektoranalysis. Für eine differenzierbare skalare Funktion F gilt

$$\nabla \times \nabla F = 0 \quad . \quad (3.175)$$

Es bleibt dem Leser überlassen, diese Aussage auf ihre Richtigkeit zu untersuchen, was mit wenig Aufwand durchführbar ist.

Da wir davon ausgehen, dass das Strömungsfeld drehungsfrei ist (es gilt also $\nabla \times \vec{v} = 0$), können wir den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} über eine skalare Funktion Φ angeben, so dass gilt

$$\boxed{\vec{v} = \text{grad}\Phi = \nabla\Phi} \quad . \quad (3.176)$$

Mit der Funktion Φ , die als Potentialfunktion bezeichnet wird, können wir die Geschwindigkeitskomponenten u , v und w wie folgt angeben

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad . \quad (3.177)$$

Als nächstes Ziel wollen wir eine Bestimmungsgleichung für die Potentialfunktion Φ aufstellen. Wenn wir Φ ermittelt haben, können wir unmittelbar mit den Gleichungen (3.177) den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} berechnen und mit der Bernoulli-Gleichung den Druck.

Um die Gleichung aufzustellen, betrachten wir die Kontinuitätsgleichung (3.161). Wir ersetzen die Geschwindigkeitskomponenten gemäß den Gleichungen (3.177). Durch Einsetzen und Differenzieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) &= 0 \quad , \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial\rho}{\partial z} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.178)$$

Die Gleichung (3.178) lassen wir zunächst in ihrer jetzigen Form stehen. Als nächsten Schritt werden wir Ausdrücke für die Differentialquotienten $\partial\rho/\partial x$, $\partial\rho/\partial y$ und $\partial\rho/\partial z$ aufstellen, die wir anschließend in die Gleichung (3.178) einsetzen. Damit erreichen wir die Eliminierung der Größe ρ aus der Gleichung (3.178).

Wir kommen nun auf die Gleichung (3.174) zurück und ersetzen die Größe V^2 mit den Gleichungen (3.177) zu

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \quad .$$

Wir erhalten dann mit der Gleichung (3.174) die folgende Gleichung

$$dp = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot d \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad . \quad (3.179)$$

Da wir ein isentropes Strömungsfeld betrachten ($s = \text{konst.}$), gilt weiterhin für die Schallgeschwindigkeit a^2

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{dp}{d\rho} = a^2 \quad , \quad d\rho = \frac{dp}{a^2} \quad . \quad (3.180)$$

Wir ersetzen in der Gleichung (3.180) das Differential dp durch die Gleichung (3.179) und erhalten die Gleichung

$$d\rho = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{a^2} \cdot d \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right] \quad . \quad (3.181)$$

Diese Gleichung können wir speziell für die x -Richtung des Strömungsfeldes formulieren. Die Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right]$$

oder, wenn wir auf der rechten Seite differenzieren

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right) \quad . \quad (3.182)$$

Für die y - und z -Richtung erhalten wir die entsprechenden Gleichungen. Sie lauten

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right) \quad , \quad (3.183)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (3.184)$$

Wenn wir nun in der Gleichung (3.178) die Differentialquotienten $\partial \rho / \partial x$, $\partial \rho / \partial y$ und $\partial \rho / \partial z$ gemäß den Gleichungen (3.182) - (3.184) einsetzen, erhalten wir die Potentialgleichung für eine dreidimensionale reibungs- und drehungsfreie Strömung. Sie lautet

$$\left[a^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right] \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - 2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0 \quad . \quad (3.185)$$

Die Potentialgleichung (3.185) ist eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie enthält als Unbekannte die Potentialfunktion Φ und die Schallgeschwindigkeit a . Für die Schallgeschwindigkeit gilt die Bernoulli-Gleichung (siehe Kapitel 2.3.3)

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \cdot (u^2 + v^2 + w^2) = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right] \quad . \quad (3.186)$$

a_0 steht für die Schallgeschwindigkeit der Gesamt- oder Ruhegrößen ($a_0 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_0}$, T_0 = Gesamt- bzw. Ruhetemperatur). Sie ist für die Berechnung des Strömungsfeldes als bekannt vorauszusetzen. Mit κ ist der Isentropenexponent des Gases gemeint.

Die Berechnung des Strömungsfeldes wird mit den Gleichungen (3.185) und (3.186) wie folgt durchgeführt:

- Es werden die Gleichungen (3.185) und (3.186) unter Einhaltung von Randbedingungen gelöst. Man erhält Φ und a .
- Mit den Gleichungen (3.177) werden die Geschwindigkeiten berechnet.
- Danach wird die Mach-Zahl $M = (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}/a)$ berechnet.
- Der Druck, die Temperatur und die Dichte berechnen sich mit den Gleichungen (Kapitel 2.3.3)

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2} \quad , \\ \frac{p}{p_0} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad , \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad . \end{aligned}$$

T_0 , p_0 und ρ_0 sind die Gesamt- bzw. Ruhegrößen des Strömungsfeldes, die für die Berechnung bekannt sind.

Die nichtlineare Differentialgleichung (3.185) lässt sich zusammen mit der Gleichung (3.186) für technische Probleme nur numerisch lösen. Allerdings kann man sie für die Umströmung von schlanken Profilen linearisieren. Die linearisierte Form besitzt für Überschallanströmungen eine analytische Lösung. Wir kommen in dem Abschnitt 4.1.2 Linearisierung auf die Herleitung ausführlich zu sprechen.

Abschließend wollen wir noch den Grenzfall der inkompressiblen Strömungen betrachten. Für eine inkompressible Strömung gilt $a \rightarrow \infty$. Dividieren wir die Gleichung (3.185) auf beiden Seiten durch a^2 und betrachten anschließend den Fall $a \rightarrow \infty$, erhalten wir die Potentialgleichung für eine inkompressible Strömung. Sie lautet

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0} \quad . \quad (3.187)$$

Die Differentialgleichung (3.187) entspricht der Laplace-Gleichung. Sie ist linear und von zweiter Ordnung.

3.6 Grundgleichungen in Erhaltungsfom

Bevor wir uns mit den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen in Erhaltungsfom befassen, wollen wir zunächst die in den vorangegangenen Kapiteln abgeleiteten Modellgleichungen der Strömungsmechanik in einer Hierarchie ihrer Ableitung zusammenfassen (Abbildung 3.28).

Die allgemeinste Form der mathematischen Beschreibung einer Strömung bietet die Gaskinetik, von der wir im einführenden Kapitel 1.2 Gebrauch gemacht haben. Im Gegensatz zur Kontinuumstheorie wird hier die molekulare Struktur der Strömung betrachtet. In der kinetischen Gastheorie wird der Zustand des Systems durch die Angabe des Ortes und der Geschwindigkeiten aller Moleküle beschrieben. Die Molekülpositionen werden im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem festgelegt. Dieser Raum wird physikalischer Raum genannt. Die Geschwindigkeiten der Moleküle, die sich im Volumenelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ befinden unterscheiden sich im Allgemeinen durch Größe und Richtung. Zur Kennzeichnung der Geschwindigkeiten wird zusätzlich ein Geschwindigkeitsraum eingeführt. Beide Räume sind in Abbildung 3.29 dargestellt. Sie werden zu einem sechsdimensionalen Raum zusammengefasst. Ein Punkt in diesem Raum ist durch die Angabe der kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$ und den Geschwindigkeiten $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ festgelegt und repräsentiert ein Molekül.

Ein Fluid mit N Teilchen wird demnach durch N Punkte im sechsdimensionalen Raum repräsentiert. Ein Mol eines Gases besitzt also $6 \cdot 10^{23}$ Bildpunkte. Wegen dieser hohen Partikelzahl empfiehlt sich die Einführung einer stetigen Funktion zur Beschreibung der Teilchendichte im sechsdimensionalen Raum. Die Verteilungsdichtefunktion in diesem Raum wird durch

$$f(\vec{x}, \vec{c}) = \frac{dN}{d\vec{x} \cdot d\vec{c}} \quad (3.188)$$

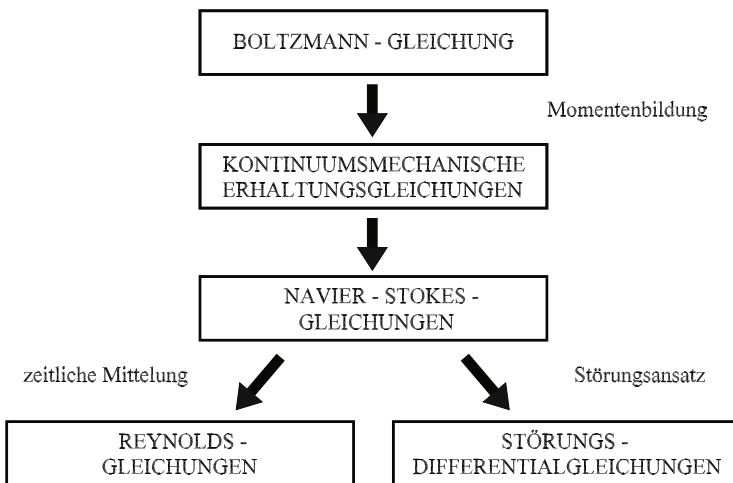


Abb. 3.28: Hierarchie der strömungsmechanischen Grundgleichungen

definiert. Sie beschreibt die statistische Verteilung der Partikel auf den physikalischen und den Geschwindigkeitsraum. Dabei ist dN die Anzahl der Bildpunkte im Volumenelement $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dc_x \cdot dc_y \cdot dc_z$ an der Stelle \vec{x}, \vec{c} und $d\vec{c} = dc_x \cdot dc_y \cdot dc_z$. Aus der Integration der Verteilungsfunktion über alle Geschwindigkeits- und Ortskoordinaten ergibt sich als Summe aller Bildpunkte die Gesamtzahl der Teilchen

$$N = \int_{\vec{c}} \int_{\vec{x}} f(\vec{x}, \vec{c}, t) \cdot d\vec{x} \cdot d\vec{c} \quad . \quad (3.189)$$

Aus der Kenntnis der mikroskopischen Struktur der Strömung in der Form der skalaren Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$, können alle Fluideigenschaften in Abhängigkeit der Zeit abgeleitet werden. Im Geschwindigkeitsraum kann eine Verteilungsfunktion über die Beziehung

$$dN = N \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} \quad (3.190)$$

definiert werden.

Makroskopische Größen werden zu einem bestimmten Zeitpunkt als Mittelwerte molekularer Eigenschaften aufgefasst. Die makroskopischen Größen ergeben sich durch Mittelung der molekularen Größen Q gewichtet mit der Verteilungsfunktion $f(\vec{c})$:

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \cdot \int_N Q \cdot dN$$

und mit Gleichung (3.190):

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot N \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} \quad . \quad (3.191)$$

Die beschriebene Vorgehensweise wird als Bildung von **Momenten** der Verteilungsfunktion bezeichnet. Die wichtigsten Momente der Verteilungsfunktion sind die mittlere

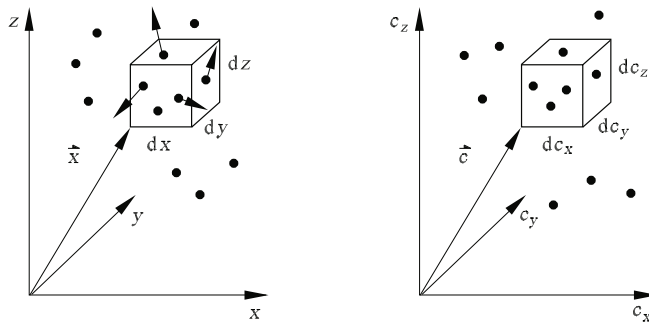


Abb. 3.29: Physikalischer Raum und Geschwindigkeitsraum

Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{\vec{c}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{c} \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} \quad , \quad (3.192)$$

der Druck p

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{3} \cdot c^2 \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} \quad (3.193)$$

und Temperatur T

$$T = \frac{2}{3 \cdot n \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} \cdot c^2 \cdot f(\vec{c}) \cdot d\vec{c} \quad , \quad (3.194)$$

mit der Teilchendichte n (Anzahl der Teilchen pro Volumen), der Teilchenmasse m und der Boltzmann-Konstanten k . Mit den Gleichungen (3.191) - (3.194) ist die Verknüpfung der mikroskopischen mit der makroskopischen Betrachtungsweise hergestellt.

Für die Verteilungsfunktion f lässt sich eine Transportgleichung formulieren, die die statistische Verteilung der Partikel im physikalischen und Geschwindigkeitsraum beschreibt. Diese gaskinetische Grundgleichung nennt man **Boltzmann-Gleichung**:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{c}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \right] \quad . \quad (3.195)$$

Die linke Seite der Boltzmann-Gleichung stellt die substantielle Ableitung der Verteilungsfunktion f nach der Zeit im sechsdimensionalen Phasenraum dar, wobei der Term $(\vec{F}/m) \cdot (\partial f / \partial \vec{c})$ die Änderung der Verteilungsfunktion durch die Beschleunigung der Partikel aufgrund äußerer Kraftfelder \vec{F} beschreibt. Die rechte Seite repräsentiert die Änderung der Verteilungsfunktion als Folge der Kollisionen der Partikel. Dieser Term ist ein Integralausdruck in dem die Verteilungsfunktion quadratisch erscheint:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int \int \int (f' \cdot f'_1 - f \cdot f_1) \cdot c_r \cdot b \cdot db \cdot d\epsilon \cdot dc_1 \quad , \quad (3.196)$$

dabei bezeichnet c_r die Relativgeschwindigkeit der Partikel und b den Stoßparameter.

Nachdem die Boltzmann-Gleichung eingeführt ist kommen wir zur Hierarchie der strömungsmechanischen Grundgleichungen der Abbildung 3.28 zurück. Die **kontinuumsmechanischen Erhaltungsgleichungen** für Masse, Impuls und Energie ergeben sich mit der Momentenbildung aus der Boltzmann-Gleichung. Für Newtonsche Medien erhält man mit der Stokes-Annahme die **Navier-Stokes-Gleichungen** für kompressible und inkompressible Fluide. Die zeitliche Mittelung führt zu den **Reynolds-Gleichungen** turbulenter Strömungen. Die Berechnung kleiner Störungen im Strömungsfeld erfolgt über einen Störansatz mit den **Störungsdifferentialgleichungen**, die in Kapitel 4.1.3 benutzt werden.

Aus den Navier-Stokes-Gleichungen leiten sich die in Abbildung 3.30 dargestellten vereinfachten Modellgleichungen ab. Für reibungsfreie Strömungen ergibt sich die **Euler-Gleichung**. Ist die Strömung zusätzlich drehungsfrei gilt die **Potentialgleichung**. Strömungen bei geringen Mach-Zahlen führen zu den **Navier-Stokes-Gleichungen** inkompressibler Fluide. Ist die Dichte des Fluids nur von der Temperatur und nicht vom Druck abhängig, ergibt sich unter Berücksichtigung des hydrodynamischen Auftriebs die **Boussinesq-Gleichung**. Für Strömungen bei großen Reynolds-Zahlen ist die Dicke der wandnahen Grenzschicht klein gegenüber den geometrischen Abmessungen, daher können einzelne Terme innerhalb der Grenzschicht vernachlässigt werden. Dies führt zu den **parabolisierten Navier-Stokes-Gleichungen** und den **Grenzschichtgleichungen**.

Für die numerische Berechnung von Strömungen ist es von Vorteil die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen für Masse (3.1), Impuls (3.13), (3.14), (3.15) und Energie (3.123) der vorangegangenen Kapitel in **Erhaltungssform** umzuschreiben. Dies bedeutet, dass in den Grundgleichungen die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie als Divergenz dieser Größen dargestellt werden. So enthält die Kontinuitätsgleichung als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v})$, die Impulsgleichungen als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v})$ mit dem Tensorprodukt $\vec{v} \cdot \vec{v} = u_l \cdot u_m, l = 1, 2, 3, m = 1, 2, 3$ und letztlich die Energiegleichung als Divergenz den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \cdot E \cdot \vec{v})$ mit der Gesamtenergie pro Masse $E = e + (V^2/2)$. Führt man dimensionslose Größen ein (Index *) ergibt sich für die dimensionslosen kartesischen Koordinaten

$$x_m^* = \frac{x_m}{L} \quad , \quad m = 1, 2, 3 \quad ,$$

mit einer für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen **Bezugslänge** L . Dabei steht x_m^* für

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \quad .$$

Die dimensionslose Zeit ist

$$t^* = \frac{t \cdot u_\infty}{L} \quad ,$$

mit einer für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen **Bezugsgeschwindigkeit** u_∞ .

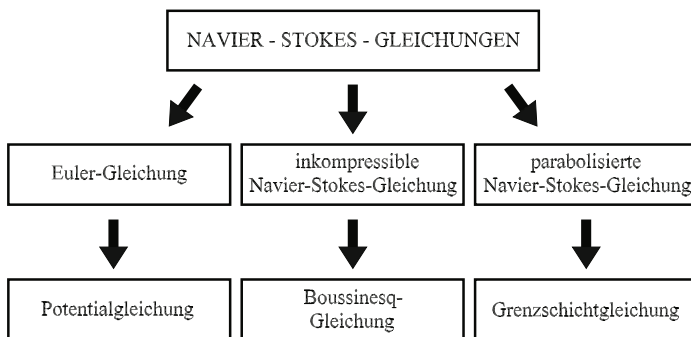


Abb. 3.30: Vereinfachte Modellgleichungen

Für die dimensionslosen Geschwindigkeiten ergibt sich

$$u_m^* = \frac{u_m}{u_\infty} \quad , \quad m = 1, 2, 3 \quad .$$

Dabei steht u_m^* für

$$\vec{v}^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix} \quad .$$

Die dimensionslosen Zustandsgrößen für Dichte ρ^* , Druck p^* , Temperatur T^* und innere Energie e^* berechnen sich aus

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad , \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty \cdot u_\infty^2} \quad , \quad T^* = \frac{T}{T_\infty} \quad , \quad e^* = \frac{e}{u_\infty^2} \quad ,$$

mit für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen Bezugsgrößen ρ_∞ und T_∞ . Schließlich werden die dynamische Zähigkeit μ und die Wärmeleitfähigkeit λ mit wiederum für das gesamte Strömungsfeld charakteristischen Stoffgrößen μ_∞ und λ_∞ dimensionslos gemacht

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad , \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} \quad .$$

Die Größen x_m^* und t^* sind die vier **unabhängigen Variablen** in denen die Differentialgleichungen formuliert sind. Die **abhängigen Variablen** sind im **Lösungsvektor** zusammengefasst

$$U^*(x_m^*, t^*) = \begin{pmatrix} \rho^* \\ \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \\ \rho^* \cdot E^* \end{pmatrix} \quad , \quad (3.197)$$

mit den Komponenten $\rho^* \cdot u_m^*$ des dimensionslosen **Impulsvektors** pro Volumen

$$\rho^* \cdot \vec{v}^* = \frac{\rho \cdot \vec{v}}{\rho_\infty \cdot u_\infty} = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u_1^* \\ \rho^* \cdot u_2^* \\ \rho^* \cdot u_3^* \end{pmatrix}$$

und der dimensionslosen spezifischen **Gesamtenergie** pro Volumen

$$\rho^* \cdot E^* = \frac{\rho \cdot E}{\rho_\infty \cdot u_\infty^2}$$

des Fluids. Die Größe E bezeichnet die Gesamtenergie pro Masse (innere Energie e + kinetische Energie $(1/2) \cdot V^2$).

Die dimensionslosen **Erhaltungsgleichungen** für ein kompressibles laminares Fluid lauten in **Erhaltungssform** (Masse-, Impuls- und Energieerhaltung)

$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial F_m^*}{\partial x_m^*} - \frac{1}{Re_L} \cdot \sum_{m=1}^3 \frac{\partial G_m^*}{\partial x_m^*} = 0} \quad . \quad (3.198)$$

Man spricht von Erhaltungsform oder **konservativer** Form, da das Differentialgleichungssystem (3.198) an einem raumfesten Kontrollvolumen hergeleitet wurde, so dass jede Gleichung direkt die Massen-, Impuls- oder Energieerhaltung ausdrückt. Der Lösungsvektor (3.197) enthält in jeder Zeile die zu erhaltenden Variablen (**konservative Variablen**), bezogen auf das Volumen, also Masse pro Volumen ρ^* , Impuls pro Volumen $\rho^* \cdot \vec{v}$ und Gesamtenergie pro Volumen $\rho^* \cdot E^*$. Im Gegensatz zu den konservativen Variablen stehen die **primitiven Variablen** Geschwindigkeit, Druck und Temperatur, die in den vorangegangenen Kapiteln benutzt wurden.

Unter Vernachlässigung der Volumenkräfte \vec{k} und der Energiezufuhr q_s ist in (3.198) \mathbf{F}_m^* der Vektor der **konservativen Flüsse** in Richtung m

$$\mathbf{F}_m^* = \begin{pmatrix} \rho^* \cdot u_m^* \\ \rho^* \cdot u_m^* \cdot u_1^* + \delta_{1m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u_m^* \cdot u_2^* + \delta_{2m} \cdot p^* \\ \rho^* \cdot u_m^* \cdot u_3^* + \delta_{3m} \cdot p^* \\ u_m^* \cdot (\rho^* \cdot E^* + p^*) \end{pmatrix}, \quad (3.199)$$

($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$) und \mathbf{G}_m^* der Vektor der **dissipativen Flüsse** in Koordinatenrichtung m

$$\mathbf{G}_m^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{m1}^* \\ \tau_{m2}^* \\ \tau_{m3}^* \\ \sum_{l=1}^3 u_l^* \cdot \tau_{lm}^* + q_m^* \end{pmatrix}, \quad (3.200)$$

mit der dimensionslosen **inneren Energie**

$$e^* = E^* - \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^3 u_m^{*2} = \frac{e}{u_\infty^2},$$

dem dimensionslosen **Druck**

$$p^* = (\kappa - 1) \cdot \rho^* \cdot e^* = \frac{p}{\rho_\infty \cdot u_\infty^2},$$

der dimensionslosen **Temperatur**

$$T^* = (\kappa - 1) \cdot \kappa \cdot M_\infty^2 \cdot e^* = \frac{T}{T_\infty},$$

den dimensionslosen **Spannung**

$$\tau_{ij}^* = \mu^* \cdot \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \cdot \mu^* \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \cdot \delta_{ij}$$

und dem dimensionslosen **Wärmestrom** in Richtung m

$$q_m^* = \frac{\lambda^*}{(\kappa - 1) \cdot M_\infty^2 \cdot Pr_\infty} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial x_m^*} = \frac{\lambda^* \cdot \kappa}{Pr_\infty} \cdot \frac{\partial e^*}{\partial x_m^*}.$$

Diese Gleichungen enthalten die **Stoffeigenschaften** $Pr_\infty = (c_p \cdot \mu_\infty) / \lambda_\infty$ Prandtl-Zahl, $\kappa = (c_p / c_v)$ Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, μ^* dimensionslose dynamische Zähigkeit, welche für Luft unter atmosphärischen Bedingungen mit $Pr_\infty = 0.71$, $\kappa = 1.4$ und der **Sutherland-Gleichung** in dimensionsloser Form

$$\mu^* = (T^*)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1 + S^*}{T^* + S^*} \quad , \quad S^* = \frac{110.4K}{T_\infty}$$

im Temperaturbereich von 170 K bis 1900 K gegeben sind. Die folgenden **dimensionslosen Kennzahlen** charakterisieren das Strömungsfeld

$$\begin{aligned} M_\infty &= \frac{u_\infty}{a_\infty} && \text{Mach - Zahl} \quad , \\ Re_L &= \frac{\rho_\infty \cdot u_\infty \cdot L}{\mu_\infty} && \text{Reynolds - Zahl} \quad , \\ Pr_\infty &= \frac{c_p \cdot \mu_\infty}{\lambda_\infty} && \text{Prandtl - Zahl} \quad . \end{aligned}$$

Darin ist $a_\infty = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_\infty}$ eine charakteristische Schallgeschwindigkeit.

Es handelt sich bei den Erhaltungsgleichungen um ein System von fünf gekoppelten nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Da die Zeit als unabhängige Variable enthalten ist und räumlich gerichtete Transportmechanismen vorherrschen, sind die Gleichungen parabolisch.

Sind stationäre Strömungen von Interesse, so werden die Zeitableitungen weggelassen. Die Gleichungen sind dann elliptisch in Unterschallgebieten und hyperbolisch in Überschallgebieten. Man bezeichnet sie daher auch als von **gemischtem Typ**.

Die folgenden **Randbedingungen** sind zu berücksichtigen:

An einer **festen Wand** gilt die **Haftbedingung**

$$\vec{v}^* = 0 \quad (3.201)$$

sowie entweder die Temperatur-Randbedingung der **isothermen Wand**

$$T^* = T_w^* \quad , \quad (3.202)$$

mit der vorgeschriebenen dimensionslosen Wandtemperatur T_w^* oder der Temperatur-Randbedingung der **adiabaten Wand**

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = 0 \quad (3.203)$$

mit der dimensionslosen Koordinate n^* in Wandnormalenrichtung.

Ein weiterer Rand ist der **Fernfeldrand**, welcher das Rechengebiet bei Umströmungsproblemen nach außen hin begrenzt. Ist der Fernfeldrand weit genug vom umströmten Körper entfernt, herrscht dort die ungestörte Außenströmung u_∞ , bzw. die Randbedingung der reibungsfreien Strömung.

Falls es nicht möglich ist, den Fernfeldrand so festzulegen, dass Reibung keine Rolle spielt, beispielsweise wenn eine Grenzschicht, eine Ablöseblase oder eine Nachlaufströmung das Integrationsgebiet verlässt, so kann keine mathematisch exakte Randbedingung angegeben werden. In diesem Fall behilft man sich mit der Extrapolation von Strömungsgrößen im Strömungsfeld auf den Rand.

Der Lösungsvektor bei $t = t_0 = 0$ wird durch die **Anfangsbedingung** (3.204) festgelegt.

$$\mathbf{U}^*(x_i^*, 0) = \mathbf{U}_0^*(x_i^*) \quad (3.204)$$

Das Anfangs-Randwertproblem der reibungsbehafteten Erhaltungsgleichungen besteht aus den Differentialgleichungen (3.198)–(3.200), den Randbedingungen (3.201)–(3.203) und der Anfangsbedingung (3.204).

Für die Berechnung von turbulenten Strömungen gelten die zeitlich gemittelten Grundgleichungen für Masse (3.33), Impuls (3.38) - (3.40) mit (3.41) und (3.42) und Energie (3.133) mit (3.134). Wir wollen diese Gleichungen ebenfalls in Erhaltungform darstellen. Um diese Grundgleichungen dimensionslos zu machen, verwenden wir für die mit der Favre-Mittelung zeitlich gemittelten Größen und für die Schwankungsgrößen die gleichen Bezugswerte wie für die Strömungsgrößen. Es gilt damit für eine dimensionslose Größe f^*

$$f^* = \tilde{f}^* + f^{*''} \quad .$$

Der zeitlich gemittelte Lösungsvektor der **abhängigen Variablen** ist

$$\overline{\mathbf{U}^*}(x_m^*, t^*) = \begin{pmatrix} \overline{\rho^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_1^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_2^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_3^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{E}^*} \end{pmatrix} \quad . \quad (3.205)$$

Die dimensionslosen **Erhaltungsgleichungen** für ein kompressibles turbulentes Fluid lauten damit in **Erhaltungsfom** (Masse-, Impuls- und Energieerhaltung)

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{U}^*}}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \overline{\mathbf{F}_m^*}}{\partial x_m^*} - \frac{1}{Re_L} \cdot \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \overline{\mathbf{G}_m^*}}{\partial x_m^*} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \overline{\mathbf{R}_m^*}}{\partial x_m^*} = 0 \quad . \quad (3.206)$$

Diese Gleichung (3.206) besitzt eine zu der Erhaltungsgleichung für laminare Strömungen (3.198) analoge Form. An die Stelle der konservativen Variablen treten zeitlich gemittelte Variablen und alle Terme der Gleichung sind zeitlich gemittelt zu verstehen. Als Folge der Mittelung ist der Term \mathbf{R}^* hinzugekommen

Die in Gleichung (3.206) unter Vernachlässigung der Volumenkräfte \vec{k} und der Energiezufuhr q_s vorkommenden Terme sind $\overline{\mathbf{F}_m^*}$ der Vektor der zeitlich **gemittelten konvektiven Flüsse** in Koordinatenrichtung m

$$\overline{\mathbf{F}_m^*} = \begin{pmatrix} \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_m^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_m^* \cdot \widetilde{u}_1^*} + \delta_{1m} \cdot \overline{p^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_m^* \cdot \widetilde{u}_2^*} + \delta_{2m} \cdot \overline{p^*} \\ \overline{\rho^* \cdot \widetilde{u}_m^* \cdot \widetilde{u}_3^*} + \delta_{3m} \cdot \overline{p^*} \\ \overline{\widetilde{u}_m^* \cdot (\rho^* \cdot \widetilde{E}^* + \overline{p^*})} \end{pmatrix} \quad , \quad (3.207)$$

($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$), $\overline{\mathbf{G}}^*_m$ der Vektor der **gemittelten dissipativen Flüsse** in Koordinatenrichtung m

$$\overline{\mathbf{G}}^*_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\tau^*}_{m1} \\ \overline{\tau^*}_{m2} \\ \overline{\tau^*}_{m3} \\ \sum_{l=1}^3 \widetilde{u^*}_l \cdot \overline{\tau^*}_{lm} + \overline{q^*}_m \end{pmatrix} \quad (3.208)$$

und der hinzugekommene Vektor für das algebraische Turbulenzmodell

$$\overline{\mathbf{R}}^*_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\rho^*} \cdot \widetilde{u^{*''}_1} \cdot \widetilde{u^{*''}_m} \\ \overline{\rho^*} \cdot \widetilde{u^{*''}_1} \cdot \widetilde{u^{*''}_m} \\ \overline{\rho^*} \cdot \widetilde{u^{*''}_1} \cdot \widetilde{u^{*''}_m} \\ \overline{\rho^*} h^{*''} \widetilde{u^{*''}_m} + \sum_{l=1}^3 \widetilde{u^{*''}_m} \overline{\rho^*} \widetilde{u^{*''}_l} \widetilde{u^{*''}_m} + \frac{\overline{\rho^*}}{2} \sum_{l=1}^3 \widetilde{u^{*''}_l} \widetilde{u^{*''}_l} \widetilde{u^{*''}_m} - \sum_{l=1}^3 \widetilde{u^{*''}_l} \overline{\tau^*}_{lm} \end{pmatrix}, \quad (3.209)$$

mit der Enthalpie $h^* = e^* + (p^*/\rho^*)$ und

$$\widetilde{E^*} = \widetilde{e^*} + \sum_{m=1}^3 \frac{\widetilde{u^{*2}_m}}{2} + \widetilde{k^*}^2, \quad (3.210)$$

$$\widetilde{k^*}^2 = \sum_{m=1}^3 \frac{\widetilde{u^{*''}_m} \cdot \widetilde{u^{*''}_m}}{2}. \quad (3.211)$$

Darin wird $\widetilde{k^*}$ die zeitlich gemittelte Turbulenzenergie genannt.

Die in dem zusätzlichen Term \mathbf{R}^* vorkommenden Schwankungsgrößen sind unbekannt, ebenso wie die zeitlich gemittelten abhängigen Variablen des Lösungsvektors, deren Berechnung unser Ziel ist. Das Gleichungssystem hat wie bereits besprochen mehr Unbekannte als Gleichungen. Es ist also **nicht geschlossen**. Es ist die Aufgabe der Turbulenzmodellierung (s. Kapitel 3.2.3), dieses System durch empirische Annahmen über die Größe dieses zusätzlichen Terms \mathbf{R}^* für das jeweilige Strömungsproblem zu schließen.

Durch Vernachlässigung der Reibung, also von \mathbf{G}^* in Gleichung (3.198) erhält man die **Erhaltungsfom** der dimensionslosen **reibungsfreien Grundgleichungen**

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}^*_m}{\partial x^*_m} = 0} \quad (3.212)$$

Gegenüber den reibungsbehafteten Grundgleichungen in Erhaltungsfom (3.198) und (3.206) haben die reibungsfreien Erhaltungsgleichungen den Vorteil, dass sie unter erheblich geringerem Aufwand numerisch gelöst werden können. Die Berechnung von zweiten Ableitungen entfällt, da diese nicht mehr in den Gleichungen enthalten sind.

Strömungsmechanik

für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Oertel jr., H.; Böhle, M.; Reviol, Th.

2015, XI, 475 S. 348 Abb., 25 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-07785-3