Kapitel 2

Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Grundlagen

2.1.1 Vorbemerkungen

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit den *Gesetzmäßigkeiten des Zufalls*. Das klingt zunächst wie ein Widerspruch, denn das Wesen des Zufalls - etwa beim Münzwurf oder beim Würfeln - ist, dass man die Ergebnisse nicht vorhersagen kann. Wiederholt man jedoch die Würfe, so wird man beobachten, dass die Ergebnisse Kopf und Zahl oder die Augenzahlen annähernd gleich häufig auftreten. Dafür ist die Redeweise „diese Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich" üblich und angebracht. Es hat jedoch lange gedauert, bis der Begriff Wahrscheinlichkeit mit der für die Mathematik erforderlichen Strenge gefasst werden konnte.

Einen naheliegenden Ansatz kann man am Beispiel des k-fachen Münzwurfs einfach erklären. Man wirft eine Münze sehr oft hintereinander und notiert für jedes $k \geqslant 1$ die relativen Häufigkeiten

$$r_k(i) := \frac{1}{k} \cdot (\text{Anzahl der Ergebnisse } \; i \; \text{ in den ersten } \; k \; \text{ Würfen}),$$

wobei $i = 0$ (Kopf) und $i = 1$ (Zahl) bedeutet. Dann ist $r_k(0) + r_k(1) = 1$ für alle k.

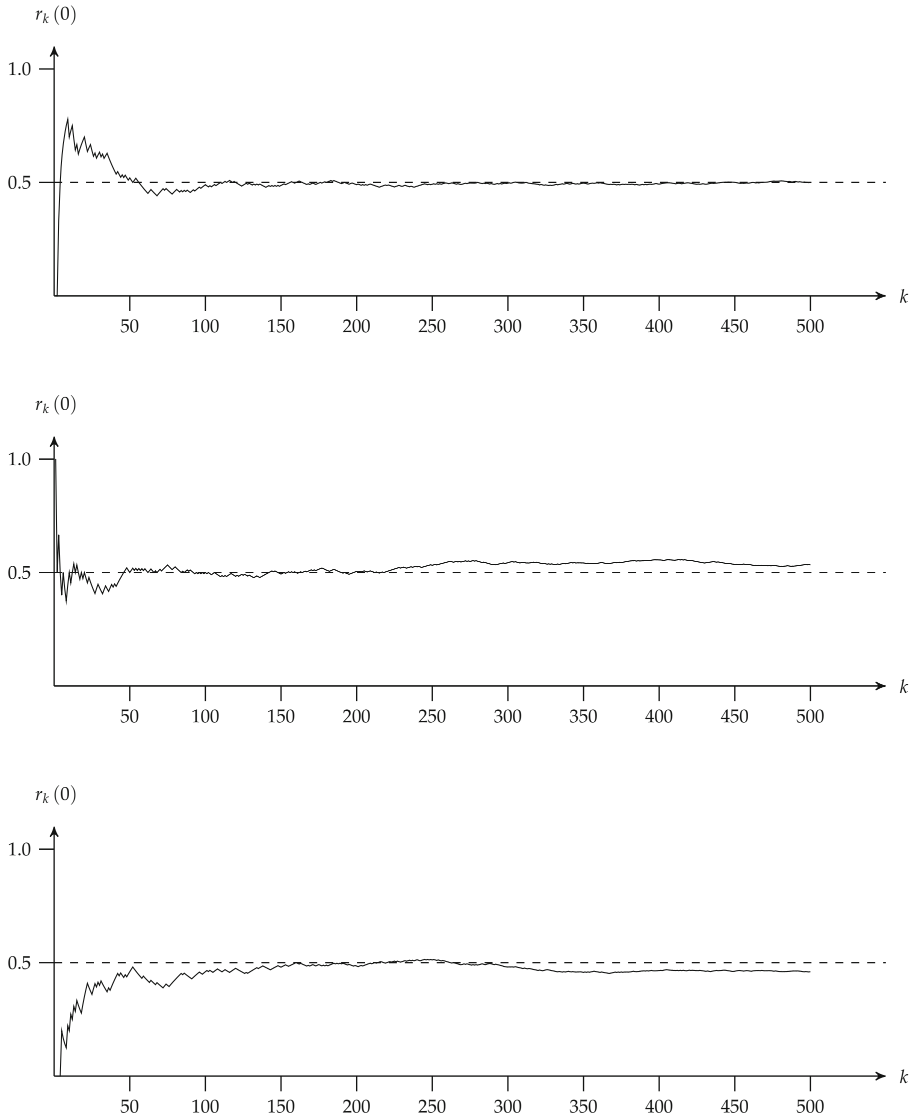
Nun besteht die nicht ganz unbegründete Hoffnung, dass die Folgen $r_k(0)$ und $r_k(1)$ mit wachsendem k konvergieren. Dann könnte man die Grenzwerte

$$p := \lim_{k \to \infty} r_k(0) \quad \text{und} \quad q := \lim_{k \to \infty} r_k(1)$$

mit $p + q = 1$ als die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse Kopf und Zahl erklären. Aber diese Hoffnung wird mehr als getrübt durch ernsthafte Probleme.

Mit einem Zufallsgenerator werden drei Serien von insgesamt 500 Münzwürfen simuliert. Die Ergebnisse von $r_k(0)$ sehen so aus [Ri, 2.1]:

G. Fischer, M. Lehner, A. Puchert, *Einführung in die Stochastik*, Mathematik für das Lehramt,
DOI 10.1007/978-3-658-07903-1_2



Als Ergebnis kann man bestenfalls eine recht wacklige Tendenz zur Konvergenz gegen 0.5 erkennen. Von einer straffen Konvergenz, wie man sie aus vielen Beispielen der Analysis kennt, kann keine Rede sein. Auch für weit größere k kann $r_k(0)$ noch immer deutlich verschieden von 0.5 ausfallen.

Neben diesem mehr praktischen Problem gibt es ein gravierendes Problem für die Theorie. Wenn man von Grenzwerten redet, muss man unendliche Folgen betrachten. Die gibt es nicht in der Realität, sondern nur in Gedanken; damit ist man bei den theoretischen Problemen angekommen. Wollte man Wahrscheinlichkeiten definieren als Grenzwerte relativer Häufigkeiten, so müsste man zur Rechtfertigung für solche gedachte

Folgen von Experimenten und die daraus erhaltenen Folgen von relativen Häufigkeiten folgendes beweisen:

- Jede solche Folge von relativen Häufigkeiten konvergiert.
- Bei je zwei solchen unter gleichen Bedingungen erhaltenen Folgen sind die Grenzwerte gleich.

Die Münze hat kein Gedächtnis, also ist das Ergebnis jedes neuen Wurfes unabhängig von den vorhergehenden Würfen. Daher kann niemand mit absoluter Sicherheit ausschließen, dass extreme Folgen auftreten könnten:

- Es könnte eine nicht konvergente Folge $r_k(0)$ geben.
- Es könnte zum Beispiel mit der gleichen Münze Folgen geben, bei denen nie Kopf oder nie Zahl auftritt, dann wäre

$$\lim_{k\to\infty} r_k(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} r_k(0) = 1.$$

Bei beiden Folgen existieren die Grenzwerte, sie sind aber verschieden. Ein solches denkbares Beispiel kann in der Realität nur approximiert werden. Dazu ein Artikel aus der FAZ [SI]:

Denkfehler, die uns Geld kosten
Die Tragik von Monte Carlo
30.06.2012 Wenn beim Roulette mehrmals hintereinander „Schwarz" gewonnen hat, muss doch auch mal wieder „Rot" dran sein: So denken viele Spieler - und verlieren.
Am 18. August 1913 gab es in Monte Carlo ein bemerkenswertes Ereignis. In dem legendären Spielcasino, in dem sich die Oberschicht halb Europas in Frack und Abendgarderobe ein Stelldichein gab, landete die Kugel des Roulette stolze sechsundzwanzig Mal hintereinander auf Schwarz. Ungefähr nach dem 15. oder 16. Mal soll es in der erlesenen Spielerschar zu geradezu „chaotischen Zuständen" und „ungezügeltem Setzen"gekommen sein, wie glaubhaft überliefert ist: Immer mehr Hinzukommende wollten auf Rot setzen, weil sie glaubten, irgendwann müsste diese Serie doch ein Ende haben. Einige waren davon sogar so überzeugt, dass sie alles setzten und kein Geld mehr hatten, als in der 27. Runde endlich Rot kam. Das Casino verdiente an diesem Tag Millionen.

Schon das einfache Beispiel des Münzwurfes zeigt, dass die im Prinzip gute Idee, Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten zu erklären, an technischen Problemen scheitert. In 2.7 werden wir mit „Gesetzen großer Zahlen" zeigen, was sich von der Idee retten lässt: Man kann beweisen, dass wenigstens „fast alle" Folgen relativer Häufigkeiten gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Dazu benötigt man allerdings ein solides Rüstzeug von Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ein Ausweg aus dem Dilemma wurde um 1930 gefunden, dabei folgte man dem langen Weg der Geometrie: Während EUKLID versuchte, inhaltlich zu definieren, was ein Punkt oder eine Gerade sein soll, stellte D. HILBERT in seiner 1899 veröffentlichten Axiomatik der Geometrie nur noch die formalen Regeln zusammen, die zwischen Punkten und Geraden gelten sollen. In diesem Sinne legte KOLMOGOROFF [KO] eine axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeiten vor, die nur die formalen Eigenschaften festlegt und auf eine inhaltliche Erklärung verzichtet.

In unserem Beispiel des Münzwurfs geht man demnach so vor: Man nimmt an, es handle sich um eine „faire Münze“. Demnach erklärt man die Wahrscheinlichkeiten für Kopf oder Zahl durch

$$p(0) := \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad p(1) := \tfrac{1}{2}.$$

Eine typische Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es nun, ausgehend von dieser Definition, die Wahrscheinlichkeiten für die Gesamtzahlen der Ergebnisse Kopf oder Zahl bei k aufeinanderfolgenden Würfen zu berechnen. Daraus kann man dann schließlich auch Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz der Folgen $(r_k(0))$ und $(r_k(1))$ beweisen. Man hat also durch die axiomatische Methode, ganz kurz gesagt, „den Spieß umgedreht“.

2.1.2 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume

Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind sogenannte ***Zufallsexperimente***. Das sind im Idealfall Experimente, deren Ergebnisse nur vom Zufall gesteuert sind, und die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind. Das ist keine ganz präzise Definition und die geforderten Eigenschaften sind in der Realität höchstens annähernd zu erreichen. Das Gegenteil dazu sind sogenannte „deterministische“ Experimente, bei denen die Ergebnisse durch Gesetzmäßigkeiten, etwa der Physik oder der Logik, bestimmt sind. Was zu einem Zufallsexperiment immer gehört ist eine Menge Ω von möglichen ***Ergebnissen*** . Man nennt Ω die ***Ergebnismenge***.

Im einfachsten und für die Realität wichtigsten Fall ist Ω endlich, also

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

Beispiel 1 (*Zufallsexperimente*)

a) Das einfachste und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer wieder verwendete Beispiel ist der Wurf einer Münze. Dann ist

$$\Omega = \{0,1\} \quad \text{mit} \quad 0 = \text{„Kopf“} \quad \text{und} \quad 1 = \text{„Zahl“}.$$

b) Das zweite stets benutzte Beispiel ist der Wurf eines Würfels, dann ist

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\},$$

wobei das Ergebnis der Augenzahl entspricht.

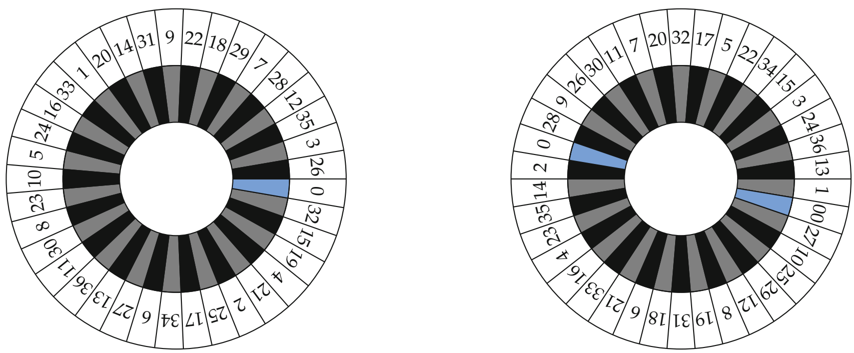
c) Beim klassischen Roulette ist

$$\Omega = \{0,1,2,...,36\},$$

in der amerikanischen Version ist

$$\Omega' = \{0,1,2,...,36,00\},$$

Bei 0 und 00 gewinnt die Bank.



d) Beim Zahlenlotto 6 aus 49 ist das Ergebnis einer Ziehung enthalten in

$$\Omega = \{\{a_1,...,a_6\} \in \{1,...,49\}\}.$$

Wie in 2.3.1 begründet wird, ist $\#\,\Omega = 13\,983\,816$.

Die Beispiele a) bis d) sind die Grundlage von Glücksspielen. Die Analyse solcher Spiele ist historisch ein entscheidender Antrieb für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewesen.

e) Das Geschlecht eines Kindes ist weitgehend vom Zufall abhängig. Die Ergebnismenge eines solchen „Zufallsexperiments“ ist wie beim Münzwurf

$$\Omega := \{0,1\}, \quad \text{wobei} \quad 0 = \text{„männlich“} \quad \text{und} \quad 1 = \text{„weiblich“}.$$

f) Die Ergebnisse von Fußballspielen sind zumindest teilweise von Zufällen verschiedener Art gesteuert, dazu gibt es mehrere empirische Untersuchungen (vgl. etwa [Q-V]).

Nun soll jedem $\omega \in \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses ***Ergebnisses*** ω zugeordnet werden. Wie in 2.1.1 angekündigt, wird das rein formal erklärt.

Definition *Eine* ***Wahrscheinlichkeitsfunktion*** *auf einer endlichen Menge* $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ *ist eine Funktion*

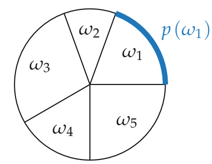
$$p\colon \Omega \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

W0 $p(\omega_1) + ... + p(\omega_n) = 1.$

Für ein $\omega \in \Omega$ *heißt dann* $p(\omega)$ *die* ***Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses*** ω.

Diese Erklärung ist von nicht zu übertreffender Einfachheit, und kann geometrisch interpretiert werden durch ein ***Glücksrad***. Es hat den Gesamtumfang 1 und der gesamte Kreisbogen ist aufgeteilt in n Bogenstücke der Längen $p(\omega_1),...,p(\omega_n)$. Man kann sich nun vorstellen, dass ein Zeiger den Bogen entlang läuft und vom Zufall gesteuert auf einem der Bogenstücke, etwa dem zu ω_i gehörenden, stehen bleibt.



Dem entspricht die Zahl $p(\omega_i)$, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ergebnisses ω_i. Um ganz genau zu sein, muss man noch festlegen, was als Ergebnis zählt, wenn der Zeiger exakt auf der Grenze zwischen zwei Bogenstücken stehen bleibt. In der Praxis ist das wegen der begrenzten Messgenauigkeit nicht überprüfbar, aber in der Theorie ist das denkbar. Dann kann man zu Ω als weiteres Ergebnis ein ω_0 hinzunehmen, was bedeutet, dass der Zeiger genau auf einem der Grenzpunkte stehen bleibt. Dafür ist $p(\omega_0) = 0$ angemessen. Nun aber der entscheidende Punkt:

Vorsicht! *Eine Wahrscheinlichkeit Null bedeutet nicht, dieses Ergebnis wäre völlig unmöglich. Es ist zwar „extrem unwahrscheinlich", aber denkbar.*

Beispiel 2 (*Münzwurf*)
Beim Münzwurf mit den Ergebnissen $0 =$ Kopf und $1 =$ Zahl könnte man noch das denkbare Ergebnis

$$2 = \text{„die Münze bleibt auf dem Rand stehen"}$$

hinzufügen. Auf $\Omega = \{0,1,2\}$ ist dann

$$p(0) = p(1) = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad p(2) = 0$$

angemessen.

Oft ist es angebracht, mehrere von irgend einem Standpunkt aus als „günstig" angesehene Ergebnisse zusammenzufassen. In diesem Sinne nennt man jede beliebige Teilmenge $A \subset \Omega$ ein ***Ereignis***. Die Begriffe „Ergebnis" und „Ereignis" sind allgemein üblich, aber leider leicht zu verwechseln. Im Englischen ist das besser: Dort ist

$$\text{Ergebnis} = \textit{outcome} \quad \text{und} \quad \text{Ereignis} = \textit{event}.$$

Die Ereignisse sind Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. Ist $\#\,\Omega = n$, so gilt $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$. Für jedes $\omega \in \Omega$ nennt man die einelementige Menge $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ein ***Elementarereignis***.

Nun zum grundlegenden Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Definition *Ist Ω eine endliche Ergebnismenge, so heißt eine Abbildung*

$$P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \quad A \mapsto P(A),$$

ein ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** *auf Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

W1 $P(\Omega) = 1$

W2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \textit{für} \quad A, B \subset \Omega \quad \textit{mit} \quad A \cap B = \varnothing$

Das Paar (Ω, P) heißt dann ***endlicher Wahrscheinlichkeitsraum****,*
$P(A)$ heißt ***Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A****.*

Die Bedingungen **W1** und **W2** sind ein einfacher Spezialfall der ***Kolmogoroff-Axiome***.

Zwischen Wahrscheinlichkeitsfunktionen und Wahrscheinlichkeitsmaßen besteht ein enger Zusammenhang:

Lemma *Sei Ω eine endliche Ergebnismenge.*

a) Ist $p\colon \Omega \to [0,1]$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, so ist durch

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad \textit{für} \;\; A \subset \Omega$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω erklärt.

b) Ist $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist durch

$$p(\omega) := P(\{\omega\}) \quad \textit{für} \;\; \omega \in \Omega$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω erklärt.

Beweis des Lemmas

a) Axiom **W1** folgt sofort aus **W0**. Zum Nachweis von **W2** wählen wir die Nummerierung so, dass

$$A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \quad \text{und} \quad B = \{\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+l}\}$$

mit $k,l \in \mathbb{N}$ und $k+l \leqslant n$. Dann folgt nach Definition von P

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= p(\omega_1) + ... + p(\omega_{k+l}) \\ &= p(\omega_1) + ... + p(\omega_k) + p(\omega_{k+1}) + ... + p(\omega_{k+l}) = P(A) + P(B). \end{aligned}$$

b) Ist umgekehrt p mit Hilfe von P erklärt, so genügt es wegen **W1** zu zeigen, dass

$$p(\omega_1) + ... + p(\omega_n) = P(\Omega).$$

Dazu zeigen wir durch Induktion über k, dass

$$p(\omega_1) + ... + p(\omega_k) = P(\{\omega_1, ..., \omega_k\}) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Der Fall $k = 1$ folgt aus der Definition von p und der Induktionsschluss folgt mit **W2** aus

$$p(\omega_1) + ... + p(\omega_{k-1}) + p(\omega_k) = P(\{\omega_1, ..., \omega_{k-1}\}) + P(\{\omega_k\}) = P(\{\omega_1, ..., \omega_k\}).$$

■

Als Ergebnis kann man festhalten, dass es zwei gleichwertige Möglichkeiten gibt, Wahrscheinlichkeiten für endliche Ergebnismengen Ω axiomatisch einzuführen:

- *Durch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p\colon \Omega \to [0,1]$ mit Axiom* **W0**
- *Durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ mit den Axiomen* **W1** *und* **W2**.

Es erscheint klar, dass die erste Methode einfacher und für den Schulunterricht besser geeignet ist.

Das einfachste Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer endlichen Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\} \quad \text{mit} \quad n \geqslant 1$$

ist die sogenannte ***Gleichverteilung*** (oder **Laplace**-***Verteilung***). Sie ist erklärt durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p\colon \Omega \to [0,1] \quad \text{mit} \quad p(\omega) := \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega.$$

Für ein Ereignis $A \subset \Omega$, dessen Elemente man von irgend einem Standpunkt aus als „günstige“ Ergebnisse betrachten kann, ist dann

$$P(A) := \frac{\#A}{\#\,\Omega} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}.$$

Ob auf einer Ergebnismenge Ω die Gleichverteilung angemessen ist, hängt davon ab, wie die Ergebnisse zustande kommen.

Beispiel 3 (*Fairer Würfel*)
Beim Würfeln ist das Ergebnis die Augenzahl, also $\Omega = \{1,\ldots,6\}$. Ist der Würfel „fair“, so ist auf Ω die Gleichverteilung P angemessen. Mögliche Ereignisse sind für die Augenzahl: sechs, gerade, Primzahl, Quadrat. Dann ist

$$\begin{array}{llll} A_1 = \{6\}, & A_2 = \{2,4,6\}, & A_3 = \{2,3,5\}, & A_4 = \{1,4\} \quad \text{und} \\ P(A_1) = \frac{1}{6}, & P(A_2) = \frac{1}{2}, & P(A_3) = \frac{1}{2}, & P(A_4) = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Beispiel 4 (*„Stammhalter“ bei zwei Kindern*)
Beim „Zufallsexperiment“ zwei Kinder ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Buben gesucht. Setzt man 0 für Bub und 1 für Mädchen, so kann man die möglichen Ergebnisse verschieden beschreiben. Berücksichtigt man die Reihenfolge der Geburt, so ist

$$\Omega := \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

Betrachtet man nur das Endergebnis, so ist

$$\Omega' := \{\{0,0\},\{0,1\},\{1,1\}\}, \quad \text{wobei} \quad \{1,0\} = \{0,1\},$$

und zählt man die Anzahl der Buben, so ist

$$\Omega'' = \{0,1,2\}.$$

Unter den ziemlich zutreffenden Annahmen, dass Buben und Mädchen gleich wahrscheinlich sind, und dass das Geschlecht des zweiten Kindes vom ersten unabhängig ist - was im Folgenden noch präziser ausgeführt wird - ist auf Ω die Gleichverteilung P angemessen. Dann ist das Ereignis „Stammhalter“ beschrieben durch

$$A := \{(0,0),(0,1),(1,0)\} \subset \Omega \quad \text{mit} \quad P(A) = \frac{3}{4}.$$

Entsprechend ist

$$A' := \{\{0,0\},\{0,1\}\} \subset \Omega' \quad \text{und} \quad A'' := \{1,2\} \subset \Omega''.$$

Auf Ω' und Ω'' ist aber keine Gleichverteilung mehr angemessen, da den Ergebnissen $\{0,1\} \in \Omega'$ und $1 \in \Omega''$ jeweils die beiden Ergebnisse $(0,1)$ und $(1,0) \in \Omega$ entsprechen. Angemessen ist auf Ω'

$$P'(\{0,0\}) = P'(\{1,1\}) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P'(\{0,1\}) = \frac{1}{2},$$

und entsprechend auf Ω''

$$P''(0) = P''(2) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P''(1) = \frac{1}{2}.$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten ist dann schließlich

$$P(A) = P'(A') = P''(A'') = \frac{3}{4}.$$

Dieses ganz einfache Beispiel zeigt, wie man die Ergebnisse eines Experiments verschieden beschreiben kann, und dass die Annahme einer Gleichverteilung Vorsicht erfordert.

Zum Schluss dieses Abschnitts noch ein Hinweis zu den Bezeichnungen. Streng genommen unterscheidet man zwischen einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ und einem Elementarereignis $\{\omega\} \subset \Omega$, also $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, es gilt

$$p(\omega) = P(\{\omega\}).$$

Zur Vereinfachung kann man $P(\omega)$ statt $P(\{\omega\})$ schreiben, dann ist auch $p(\omega) = P(\omega)$, und man kann den Buchstaben P sowohl für das Wahrscheinlichkeitsmaß als auch für die Wahrscheinlichkeitsfunktion verwenden. Bei einer endlichen Ergebnismenge Ω ist das ganz unproblematisch.

2.1.3 Unendliche Wahrscheinlichkeitsräume *

Beispiel 1 (*Die erste Sechs*)
Man würfelt so lange, bis zum ersten Mal eine Sechs auftritt. Dann kann man als Ergebnismenge

$$\Omega = \{1,2,3,....\}$$

ansehen, wobei das Ergebnis gleich $k \in \Omega$ ist, wenn die Sechs zum ersten Mal beim k-ten Wurf aufgetreten ist. Da man keine obere Schranke für k angeben kann - der Zufall könnte wieder verrückt spielen - kommt man nicht mehr mit einem endlichen Ω aus. Wie wir in 2.3.6 begründen werden, ist als Wahrscheinlichkeitsfunktion p: $\Omega \to [0,1]$ bei diesem Experiment

$$p(k) := \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \in \ ]0,1[$$

angemessen. Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1.$$

Beispiel 2 (*Glücksrad*)
Beim schon in 2.1.2 beschriebenen Glücksrad vom Umfang 1 kann man als Ergebnis ω des Experiments auch die genaue Position des Zeigers ansehen; dann ist $\Omega = [0,1[$.

In den Beispielen 1 und 2 sind die Ergebnismengen Ω nicht mehr endlich, sondern unendlich. Es besteht aber ein grundlegender Unterschied: In Beispiel 1 ist $\Omega = \mathbb{N}$ abzählbar unendlich, in Beispiel 2 ist $\Omega = [0,1[$ überabzählbar. In diesem Abschnitt soll erläutert werden, dass der abzählbar unendliche Fall eine einfache Variante des endlichen Falls ist, der überabzählbare Fall dagegen erfordert weit kompliziertere Techniken.

http://www.springer.com/978-3-658-07902-4

Einführung in die Stochastik
Die grundlegenden Fakten mit zahlreichen
Erläuterungen, Beispielen und Übungsaufgaben
Fischer, G.; Lehner, M.; Puchert, A.
2015, XII, 387 S. 393 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-07902-4