Kapitel 2

Algebraisches Denken in der Mittelstufe

Die Grundlagen des Unterrichtsfachs Mathematik haben sich in den letzten 30 Jahren verändert. Es geht im Mathematikunterricht heute nicht mehr (nur) um das Einüben von mathematischen Routinen und dem bloßen Lernen von stofflichen Inhalten. Vielmehr geht es darum, eine mathematische Einstellung (mathematical attitude) zu entwickeln und das mathematische Handeln zum Gegenstand des Mathematikunterrichts zu machen (mathematical activity as subject matter) (Freudenthal, 1981). Im schulischen Mathematikunterricht sollen Schülerinnen und Schüler einerseits erleben, dass Mathematik vielfältige Bezüge zu der sie umgebenden Welt hat. Sie sollen erleben, dass ihnen „die Mathematik [...] Orientierung in einer zunehmend technisierten und ökonomisierten Welt bieten [kann]“ (Dönges et al., 2006, S. 7). Andererseits sollen sie Mathematik nicht als „abgeschlossenen Wissenskanon erfassen, sondern „erfahren, das Mathematik [...] vielmehr für lebendiges und phantasievolles Handeln [steht], das auf menschlicher Kreativität beruht.“ (Dönges et al., 2006, S. 7).

Schulmathematik wurde (und wird) damit assoziiert, dass Mathematik sicheres Wissen beinhaltet, es um das Finden der richtigen Lösung geht. Mathematische

A. Meyer, *Diagnose algebraischen Denkens,* DOI 10.1007/978-3-658-07988-8_2,

Aktivitäten sind solche Aktivitäten, in denen die vom Lehrer vorgegebenen mathematische Routinen befolgt werden (vgl. Lampert, 1990). Insbesondere wird oft betont, dass Mathematik im Unterschied zu anderen Fächern hierarchisch aufgebaut ist (z.B. Stern & Hardy, 2001). Dieser Auffassung von Mathematik liegt eine formalistische Sichtweise zugrunde. Der Formalismus „betrachtet mathematische Aussagen nicht als Aussagen über eine Realität oder eine Idee, sondern als Zeichenketten, die aus einem Satz von Axiomen und Ableitungsregeln durch Deduktion gewonnen wurden“ (Leuders, 2003, S. 22). Diese Auffassung von Mathematik als hierarchisch und formal führt dazu, mathematische Konstrukte, die eigentlich das Produkt „einer mathematischen Entwicklung sind, zum Ausgangspunkt des Lernens zu machen und dabei Entdeckung durch Deduktion zu ersetzen“ (Leuders, 2003, S. 24). Ein mathematischer Lerngegenstand wird so von seiner Entstehungsgeschichte befreit und nur noch als ein Element gesehen, welches durch Deduktion aus anderen Elementen herleitbar ist. Diese Auffassung von Mathematik entspricht nicht mehr den Anforderungen, die durch die Bildungsstandards an das Fach gestellt werden. Statt also mathematische Regeln zu lernen und zu befolgen, sollen Schülerinnen und Schüler stärker in „tatsächliche“ mathematische Aktivitäten eingebunden werden, sie sollen Vermutungen aufstellen und diese überprüfen, Begriffe bilden und Generalisierungen vornehmen. Lampert zeigt, dass eine solche Mathematik im Klassenraum möglich ist und Schüler in einem solchen Unterricht zu sinnstiftenden mathematischen Aktivitäten angeregt werden (Lampert, 1990).[1]

Ich möchte hier annehmen, dass ein Mathematikunterricht erstrebenswert ist, der die Eigenaktivitäten der Schülerinnen und Schüler ernst nimmt und Raum für die individuelle Konstruktion mathematischen Wissens bietet. Ein solcher Unterricht muss Raum bieten für mathematische Aktivitäten des Entdeckens mathematischer Zusammenhänge, Vermutens über Eigenschaften mathematischer Objekte und deren Überprüfung durch Argumentation und Beweis sowie des Generalisierens von mathematischen Zusammenhängen. Problemlösen ist ein zentraler Bestandteil eines solchen Unterrichts. Zudem wird das Interesse der Schülerinnen und Schüler geweckt, denn in einen Mathematikunterricht, in dem die Lehrkraft Teil des *Diskurses* der Schüler ist und die Fragen und Hypothesen der Schüler aufgreift

[1] Ähnliches bei (Boaler, 2003).

und ernst nimmt, entsteht auch Interesse (Bikner-Ahsbahs, 2003). Ein Unterricht mit vielen eigenaktiven Anteilen fördert das Mathematiklernen, setzt aber zugleich unterstützende Lernumgebungen voraus. Damit Lehrerinnen und Lehrer unterstützende Lernumgebungen schaffen können, müssen sie eine genaue Kenntnis vom Lernstand ihrer Schülerinnen und Schüler haben. Gemäß des Angebot-Nutzungs-Modells (Helmke, 2010) müssen Lehrerinnen und Lehrer Angebote bereit stellen, die Schülerinnen und Schüler entsprechend auf Grundlage des bereits Gelernten nutzen können, und so einen Lernfortschritt erzielen. Ein möglicher Weg, passende Angebote bereitzustellen, ist die Diagnose des mathematischen Denkens von Schülerinnen und Schülern. Bereits Freudenthal (1981) stellte fest, dass Lehrerinnen und Lehrer, die ihre Schülerinnen und Schüler beim Mathematiklernen unterstützen möchten, eine genaue Kenntnis von deren mathematischem Denken brauchen.

2.1 Was ist algebraisches Denken?

2.1.1 Algebraisches Denken in der Frühen Algebra

Ein Blick in die Bildungsstandards zeigt, dass Algebra einen wichtigen Stellenwert im Mathematikunterricht des Gymnasiums hat (auch wenn Teilaspekte algebraischen Denkens wie der Umgang mit Symbolen in die prozessbezogenen Kompetenzen nur mosaiksteinartig aufgenommen wurde, was zu einer fehlenden Kohärenz einer Kompetenz „algebraisches Denken“ führt). Doch neben den Problemen, die in der Frühen Algebra („Early Algebra“) und durch den Gebrauch der algebraischen Symbolsprache entstehen, bestehen auch in der Mittelstufe Probleme im Umgang mit Algebra. In der Mittelstufe sollen Schülerinnen und Schüler nicht nur den regelgeleiteten Umgang mit algebraischer Symbolsprache beherrschen, sondern mit algebraischen Symbolen Probleme lösen, modellieren, beweisen und nicht zuletzt kommunizieren und argumentieren. Es ist nicht selbstverständlich, dass Schülerinnen und Schüler, nachdem sie den Umgang mit algebraischer Symbolsprache gelernt haben, tatsächlich auch später Symbolsprache nutzen, um Probleme zu lösen oder zu argumentieren. So stellen verschiedene Studien fest, dass algebraisches Denken auch in der Mittelstufe nicht an algebraischer Symbolsprache, sondern an nicht-formalen Mitteln wie systematischem Zahlprobieren orientiert ist (z.B. Johanning, 2004; Zaskis & Liljedahl, 2002). Dies deutet darauf hin, dass Algebra in der Mittelstufe kein Werkzeug ist, dass Schülerinnen und Schülern uneingeschränkt zur Verfügung steht. Was also kennzeichnet das algebraische Denken in der Mittelstufe und wie muss und kann diese „späte“ Algebra im Gegensatz zur frühen Algebra gefördert werden?

Seit mehr als 15 Jahren ringt die mathematikdidaktische Forschung zum algebraischen Denken um eine Definition des algebraischen Denkens. Eine ausgeprägte algebraische Denkfähigkeit ist das Ziel des Algebraunterrichts. In unterschiedlichen Forschungstraditionen insbesondere zur Early Algebra werden Handlungen beschrieben, die algebraisches Denken anbahnen können oder Merkmal algebraischen Denkens sind (z.B. Bednarz, Radford, Janvier & Lepage, 1992; Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Zaskis & Liljedahl, 2002; Radford, 2010). Insbesondere wird in Forschungen zur Early Algebra die Rolle der algebraischen Symbolsprache für das algebraische Denken diskutiert und durchaus unterschiedlich bewertet (vgl. Kieran, 2011).Während die deutsche Forschung sich fragt, wie Variablen für Schülerinnen und Schüler sinnvolles Werkzeug werden (Berlin, 2007; Bertalan, 2007; Fischer, 2009), fragt die internationale Forschung auch nach der Genese und Entstehung der Bedeutung von Variablen im Schülerdenken (insbesondere Radford). Kieran (2004) und Radford (2011) stellen fest, dass Schülerinnen und Schüler sehr wohl ohne algebraische Symbolsprache algebraisch denken können. Die vielschichtige und beziehungsreiche Natur algebraischen Denkens (genauso wie Wege zum algebraischen Denken) fasst Kieran anhand neuerer, hauptsächlich empirischer Arbeiten folgendermaßen zusammen:

- Über das Allgemeine anhand von Besonderheiten nachdenken („Thinking about the general in the particular“). Schon in der Arithmetik könnte durch das Ausdrücken von allgemeinen Strukturen und Mustern algebraisches Denken entwickelt werden (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985; Mason, 1996; Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005). Durch dieses Generalisieren wird einerseits ein allgemeiner Ausdruck geschaffen, andererseits beinhaltet Generalisieren auch, mit allgemeinen Ausdrücken umzugehen.

- Über Muster regelgeleitet nachdenken („Thinking rule-wise about patterns"). Mit unbestimmten Größen soll analytisch umgegangen werden; mithilfe von (Bildungs-)Regeln können Schülerinnen und Schüler über die Eigenschaften von beliebigen Mustern entlang einer Musterfolge nachdenken und auf diese Weise auch mit dem n-ten Muster umgehen.

- Relational über Größen, Zahlen und Rechnungen nachdenken („Thinking relationally about quantity, number, and numerical operations"). Relationales Denken beinhaltet das Analysieren (und vereinfachen) eines Problems anhand seiner Zielstruktur unter Benutzung der Eigenschaften der Rechenoperationen und von Gleichungen. Dies ist eine Abgrenzung gegenüber algorithmischen Denkweisen, in denen die Zielstruktur nur aus „do next" besteht. Zahlen und Operationen sollen mit Blick auf ihre strukturellen Beziehungen gesehen werden; mit den Bestandteilen von zusammengesetzten Termen objekthaft umzugehen, indem der Blick auf ihre strukturellen Beziehungen gerichtet wird, befördere algebraisches Denken.

- Mithilfe von Repräsentationen über Relationen in Problemaufgaben nachdenken („Thinking representationally about the relations in problem situations"). Ausgehend von den Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern, eine Problemaufgabe in einen Term zu übersetzen, sollen andere Darstellungsmittel für Probleme bereit gestellt werden (z.B. Visualisierungen, vgl. exemplarisch auch schon Fischer (2009)). Dem liegt die Idee zugrunde, dass Algebra historisch anhand von Aufgaben gewachsen ist, in denen es um das Lösen von 'Klassen' mathematischer Probleme auf allgemeiner Ebene ging. Das Lösen von Problem ist also eng verbunden mit algebraischem Denken.

- Konzeptuell über Prozedurales nachdenken („Thinking conceptually about the procedural"). Kieran sieht die dichotomische Unterscheidung zwischen prozedural und konzeptuell als nicht tragfähig; es geht vielmehr z.B. darum, Äquivalenzen in faktorisierten oder ausmultiplizierten Ausdrücken zu sehen; dem Prozeduralen soll konzeptuell begegnet werden, indem beispielsweise der Blick auf das hinter einem Term liegende algebraische Objekt gerichtet wird. Dies liege implizit auch den Ansätzen zugrunde, die Arithmetik strukturell in den Blick nehmen.

- Vorhersagen, Vermuten, Begründen („Anticipating, conjecturing, and justifying"). Vorhersagen ist ein wesentlicher Aspekt von Termumformungen - das Endprodukt einer Termumformung muss in irgendeiner Weise vorhergesehen werden, um zielgerichtet Umformungen vornehmen zu können (dazu auch Boero, 2002). Durch systematische Veränderung von Parametern in einem Problem können Vermutungen über Beziehungen angestellt und begründet werden. Schülerinnen und Schüler sollen ihr Denken genauer erklären und begründen (Kieran, 2011, S. 581ff, Übers. A.M.).

- Gestikulieren, Visualisieren, Versprachlichen („Gesturing, visualizing, and languaging"). „Thinking is considered a sensuous and sign-mediated reflective activity embodied in the corporeality of actions, gestures, and artifacts [z.B. Sprache, A.M.] ... the adjective *sensuous* refers to a conception of thinking that is inextricably related to the role that the human senses play in it. Thinking is a versatile and sophisticated form of sensuous action where the various senses *collaborate* in the course of a multi-sensorial experiences of the world" (Radford, 2010, S. 4, Hervorhebung im Original), auch (Kieran, 2011, S. 591). Gemäß dieser Konzeption kann algebraisches Denken gefördert werden, indem die verinnerlichten körperlichen Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler, die für Algebra relevant sind, so verändert werden, dass sie den kulturellen Normen der Algebra entsprechen (Kieran, 2011, S. 591, Übers. A.M.).

2.1.2 Algebraisches Denken in der Mittelstufe

In der Mittelstufe soll der Umgang mit algebraischer Symbolsprache gelernt werden. Verschiedene Arbeiten haben sich damit befasst, welche Schwierigkeiten Schülerinnen und Schüler mit algebraischer Symbolsprache haben (z.B. Herscovics & Linchevski, 1994a, 1994b; Linchevski & Livneh, 2002) und wie Schülerinnen und Schülern der Zugang zu den Regeln der algebraischen Symbolsprache erleichtert werden kann (u.a. Linchevski & Herscovics, 1996; Livneh & Linchevski, 2007; Hoch & Dreyfus, 2010). Diese Überlegungen zielen vor allem auf die Vermittlung der algebraischen Symbolsprache. Dabei wird bisher aber weitgehend vernachlässigt, auf welche Weisen algebraische Symbolsprache einem Lerner zu algebraischem Denken verhelfen kann. Studien zur frühen Algebra belegen, dass Schülerinnen und Schüler ohne die Hilfe algebraischer Symbolsprache in der Lage sind algebraisch zu denken, indem sie beispielsweise nicht-formale Mittel wie Sprache, Gesten oder Muster einsetzen (Britt & Irwin, 2008; Fischer, 2009; Radford, 2009b, 2011). Es ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die Fähigkeit zum algebraischen Denken nicht notwendig dadurch entsteht, dass Schülerinnen und Schüler den Umgang mit algebraischen Symbolen lernen. Auf Grundlage von und mithilfe algebraischer Symbolsprache algebraisch denken zu können sollte aber wesentliches Ziel des Algebraunterrichts sein, denn erst mithilfe algebraischer Symbolsprache können komplexere Probleme beherrscht werden. Zugleich stellt algebraische Symbolsprache ein wesentliches Kulturgut dar; algebraische Symbolsprache ist die zentrale Sprache, durch die Mathematik ihre Ideen ausdrückt. Ohne Symbolsprache kann Schülerinnen und Schülern das Wesen moderner Mathematik nicht deutlich werden. An algebraischer Symbolsprache orientiertes algebraisches Denken soll vorläufig als *formales algebraisches Denken* definiert werden.

Was ist formales algebraisches Denken? Anhand von Beispielen soll aufgezeigt werden, in welchen Situationen formales algebraisches Denken von Bedeutung ist.

1. In einer Modellierungsaufgabe sollen Schülerinnen und Schüler einen realweltlichen Sachverhalt mithilfe algebraischer Symbolsprache in ein mathematisches Modell übersetzen. Je nach Komplexität der Modellierung sollen Schülerinnen und Schüler anhand des symbolsprachlichen Modells (ein algebraischer Ausdruck) Aussagen über die realweltliche Situation treffen. Dabei zielt die Modellierung auf allgemeine Strukturen im Sachverhalt, die generalisierend betrachtet werden sollen. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler einerseits realweltliche Bezüge im Term sehen; andererseits müssen sie auch von realweltlichen Bezügen abstrahieren und den algebraischen Ausdruck nur für sich betrachten. Bei der letzten Form des algebraischen Denkens sind es Bezüge und Strukturen innerhalb des algebraischen Ausdrucks, die das Denken der Schülerinnen und Schüler leiten.

2. Arcavi gibt ein Beispiel für eine Aufgabe (Arcavi, 1994, S. 28): „Wähle eine ungerade Zahl, quadriere sie und ziehe 1 ab. Was kann man über die Zahlen sagen, die herauskommen?“ (Arcavi, 1994, S. 28, Übers. A.M.). Der Sachverhalt in dieser Aufgabe kann durch $(2n + 1)^2 - 1$ dargestellt werden. Dies entspricht $4n(n + 1)$. Um zu diesem letzten Ausdruck zu gelangen, müssen sich Schülerinnen und Schüler darüber im Klaren sein, dass sie Zahlen faktorisieren können und durch die Faktorisierung einer Zahl Aussagen über deren Teilbarkeit machen können. Nur mit diesem Wissen können die Schülerinnen und Schüler den algebraischen Ausdruck für die ursprüngliche Zahl derart erstellen und umformen, dass sie einen algebraischen Ausdruck gewinnen, der einer faktorisierten Zahl entspricht. Im obigen Beispiel kann dann etwa $4n$ als Faktor gelesen werden, der zu einer Teilbarkeit durch 4 (oder 8) führt; der Ausdruck $n + 1$ muss ähnlich als Faktor gedeutet werden, nur muss er zusätzlich in Bezug zu $4n$ bzw. n gesetzt werden. In dieser Aufgabe müssen die Elemente des algebraischen Ausdrucks zum einen eine relationale Bedeutung gewinnen, d.h. eine Bedeutung, die aus der Relation der Faktoren zueinander entsteht. Darüber hinaus muss der algebraische Ausdruck aber auch eine Bedeutung im ursprünglichen Kontexts des Problems haben. Hier entsteht aus der Formalisierung der Aufgabe ein Ausdruck, der durch relationale Beziehungen zwischen seinen Elementen eine Bedeutung gewinnt.

3. Physikalische Sachverhalte werden oft durch symbolsprachliche Ausdrücke repräsentiert. Im Laufe des Physikunterrichts wird dann ein Phänomen mit seiner entsprechenden symbolischen Repräsentation gleich gesetzt - so kann von direkten inhaltlichen Bedeutungen abstrahiert werden. Auf diese Weise kann beispielsweise die elektromagnetische Kraft durch $F = q(E + v \times B)$ dargestellt werden.[2] Woher wissen Schülerinnen und Schüler nun, wann sie für einen Buchstaben eine andere physikalische Formel einsetzen dürfen (etwa für das elektromagnetische Feld E?)- und ob dies zu einem Fortschritt etwa bei einem realweltlichen Problem führt? Diesem Beispiel liegt eine

[2] Die Schwierigkeiten, die durch den unterschiedlichen Status der Variablen entstehen, sollen hier nicht Gegenstand sein. Dennoch stellt der unterschiedliche Status der Variablen für Schülerinnen und Schüler sicherlich auch eine Herausforderung dar.

Schwierigkeit zugrunde, die Schülerinnen und Schüler im Umgang mit algebraischer Symbolsprache haben: In welchen Fällen lohnt es sich, einen symbolsprachlich dargestellten Sachverhalt mit inhaltlicher Bedeutung zu versehen? Kann eine inhaltliche Vorstellung von der elektromagnetischen Kraft helfen zu entscheiden, ob für E substituiert werden sollte oder nicht? Oder sollte dieses Problem auf der Ebene des symbolsprachlichen Ausdrucks und den Beziehungen seiner Elemente untereinander gelöst werden (falls das möglich ist)?

Diese Beispiele zeigen, dass die Definition formalen algebraischen Denkens als an algebraische Symbolsprache orientiert nicht genügt, die Komplexität von Formalisierung in Mathematik zu fassen. Sie zeigt vielmehr, dass sich formales algebraisches Denken durch eine besondere Weise des Herstellens von Bezügen innerhalb eines algebraischen Ausdrucks kennzeichnet, die u.U. zu inhaltlichen oder innermathematischen Bedeutungen führt. *Inhaltliche* Bedeutungen sind solche Bedeutungen, die sich auf die ursprüngliche Darstellung oder Gegebenheit eines Sachverhalts beziehen. Oftmals können Bezüge innerhalb algebraischer Ausdrücke so mit Bedeutung versehen werden, dass eine Anbindung an die ursprüngliche Darstellung eines Problems bzw. einer anderen Darstellung des Problems möglich werden. Dieses Kapitel wird diese Beobachtungen zum Anlass nehmen, um auf der Grundlage von Strukturen und Bezügen innerhalb von Termen sowie der Rolle von algebraischer Symbolsprache ein Modell von *formalem algebraischen Denken* zu gewinnen. Dieses Modell wird dem aufgabenbasierten Diagnoseinstrument der vorliegenden Studie zugrunde gelegt.

2.2 Mathematisches Denken und Schüleräußerungen

In der europäischen Tradition der Philosophie seit der Antike über Descartes und Kant wird das Subjekt als Individuum wahrgenommen, wobei das Denken im Kopf des Subjekts stattfindet und anderen Subjekten nicht (unmittelbar) zugänglich ist. Diese Auffassung hat sich auch in der Lernpsychologie etabliert: Wenn man auf die bildungswissenschaftliche Forschung blickt, so kann man sagen, dass sich diese Auffassung von Schülerinnen und Schülern, die sich ihr Wissen individuell konstruieren, bewährt hat. In einer Diagnose soll die Lehrerin/der Lehrer das mathematische Denken der Schülerinnen und Schüler einschätzen. Die Lehrerin oder der Lehrer muss also Wege finden, das Denken der Schülerinnen und Schüler - das in deren Köpfen stattfindet - sichtbar werden zu lassen. In einer Diagnose sollen Lehrerinnen und Lehrer „in den Kopf" des Schülers oder der Schülerin blicken, um deren mathematisches Denken zu verstehen. Wie also kann das Denken im Kopf des Schüler/der Schülerin für Lehrerinnen und Lehrer sichtbar werden? Um diese Frage zu beantworten werden im Folgenden drei Lerntheorien vorgestellt, die sich in der mathematikdidaktischen Forschung zum algebraischen Denken bewährt haben und das Potential haben aufzuklären, wie das Denken von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht offen gelegt werden kann. Durch ein Vergleich der Theorien soll herausgearbeitet werden, welche Theorie für die Beschreibung mathematischen Denkens in einer Diagnose geeignet ist.[3]

2.2.1 Konstruktivismus: Äußerungen und Tätigkeiten als Produkt individueller mentaler Konstruktionen

Piaget geht bei seinen *Formalstufen des Denkens* davon aus, dass sich Kinder mentale Objekte anhand ihrer angeboren kognitiven Strukturen konstruieren. Denkinhalte lösen sich mit fortschreitender Entwicklung des Kindes von der konkreten, erfahrbaren physikalischen Wirklichkeit ab. Das Kind kann in der Phase der konkreten Operation Handlungen an greifbaren Objekten auf der Vorstellungsebene vollziehen und auch auf dieser Ebene umkehren. In der Phase der formalen Operation erschließen sich dem Lerner nicht nur das Fassbare, sondern auch abstrakte Beziehungen, indem diese zu Gegenständen des Denkens werden können (Mietzel, 2007, S. 88ff). Piaget vertritt die Auffassung, dass die Entwicklung des Kindes innerhalb angeborener kognitiver Funktionen stattfindet, d.h. durch Äquilibration

[3] An dieser Stelle ist auf das postmoderne Verständnis von Theorie hinzuweisen, dass dieser Arbeit zugrunde liegt und an mehreren Stellen durchscheint. In postmoderner Auffassung ist eine Theorie kein paradigmatischer Zwang, sondern ein Mittel, um die „Realität" in einem gewissen Bereich zu ordnen und zu erklären. Mit einem solchen Theorieverständnis können Theorien dahingehend verglichen werden, welche Theorie ein größeres Potential hat, sich für die Erklärung eines „Realitätsbereichs" zu bewähren.

http://www.springer.com/978-3-658-07987-1

Diagnose algebraischen Denkens
Von der Diagnose- zur Förderaufgabe mithilfe von Denkmustern
Meyer, A.
2015, XII, 344 S. 49 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-07987-1