

Kapitel 1

Einleitung

True diagnosis tells you *why* something went wrong. The only way to know [why something went wrong] is by observing the child's failure and trying to understand it.

Hans Freudenthal, Major
Problems of Mathematics
Education

1.1 Unterrichtliche Zuordnung

Warum spricht ein einflussreicher Mathematikdidaktiker wie Hans Freudenthal in Bezug auf Mathematikunterricht von Diagnose? Diagnostik und Diagnose wird eher mit Medizin in Verbindung gebracht. Ein Mediziner diagnostiziert seine Patientinnen und Patienten, um festzustellen, worin die Ursache für ihre jeweiligen Beschwerden bestehen könnte. In Analogie zur Medizin findet Diagnose auch einen Platz im Schulunterricht. Ähnlich wie eine Person, die krank ist und Be-

schwerden hat, können Schülerinnen und Schüler „Beschwerden“ im Unterricht haben. Vorstellbar sind beispielsweise Schülerinnen und Schüler, die je individuelle Schwierigkeiten im Umgang mit Variablen haben. Lehrerinnen und Lehrer müssen ihre Schülerinnen und Schüler diagnostizieren, um die Ursachen für deren Schwierigkeiten z.B. im Umgang mit Variablen zu ergründen. Ein Mediziner entlässt eine Person idealerweise geheilt nach Hause, wenn die Ursache für ihre Beschwerden behandelt wurde; ein Lehrender ermöglicht seinen Schülerinnen und Schülern ein besseres Lernen, wenn die Ursache für Schwierigkeiten „behandelt“ wurde.

Die Analogie von medizinischer und unterrichtlicher Diagnostik kann weitergeführt werden. Mediziner haben in der Regel gewisse Instrumente zur Verfügung, mit deren Hilfe sie ihre Patienten diagnostizieren. Ein Stethoskop hilft beim Abhören der Lungen; ein EKG hilft, Kreislaufprobleme zu ergründen. Ein Lehrender kann sich ebenfalls gewisse Instrumente zunutze machen, um seine Schülerinnen und Schüler zu diagnostizieren. Er kann ihnen im Mathematikunterricht gewisse Aufgaben geben, deren Bearbeitung die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler besonders gut zum Ausdruck kommen lässt. Die Betrachtung der so entstehenden Aufgabebearbeitungen kann - so Freudenthal - Lehrerinnen und Lehrer dazu führen, die Fehler der Schülerinnen und Schüler zu verstehen.

Eine Diagnose funktioniert jedoch nicht nach dem Muster „Wenn a gefunden wird, so gilt b “. Eine diagnostische Schlussfolgerung basiert auf komplexen Interpretationen, die der Mediziner oder eben Lehrerinnen und Lehrer vornehmen müssen. Der Mediziner muss das Diagramm, das ein EKG liefert, lesen und interpretieren, um Rückschlüsse auf seinen Patienten ziehen zu können. Genauso muss die Lehrerin oder der Lehrer die Aufgabebearbeitung einer Schülerin oder eines Schülers lesen und interpretieren können. Dazu braucht es eine Art Brille, die hilft, den Blick auf diejenigen Phänomene in einer Aufgabebearbeitung zu richten, die etwas über das Verstehen der Schülerin oder des Schülers zu einem Lerngegenstand aussagen können. Die Lehrerin oder der Lehrer braucht geeignete fachliche Anhaltspunkte, um das mathematische Denken ihrer/seiner Schülerinnen und Schüler zu verstehen. Nicht jeder Rechenfehler sagt auch etwas über das Denken einer Schülerin oder eines Schülers aus. Ebenso sagt eine richtige Rechnung nicht, dass die Schülerin/der Schüler ein angemessenes mathematisches Denken entwickelt hat. Um an eine schulische Diagnose eine

Förderung anschließen zu können, stehen die Schülerinnen und Schüler einerseits mit ihren fachlich unpassenden Vorstellungen, andererseits jedoch auch mit ihren Ressourcen im Fokus. Lehrerinnen und Lehrer müssen die Ressourcen ihrer Schülerinnen und Schüler diagnostizieren, die diese für einen Lerngegenstand mitbringen, um diese Ressourcen als Startpunkt für eine Förderung zu nutzen. Die Diagnosebemühungen der Lehrerin oder des Lehrers müssen auf beides, Ressourcen und unpassende Vorstellungen, gerichtet sein. Dies erlaubt eine auf Diagnose basierende individuelle Förderung, die die Ressourcen der Schülerinnen und Schüler zum Startpunkt hat.

Aus fachlicher Perspektive muss eine solche Brille Lehrerinnen und Lehrern helfen können, diejenigen Bestandteile einer Schülerantwort zu identifizieren, die mit dem aktuellen Lerngegenstand in Zusammenhang stehen. Beispielsweise muss eine solche Brille Teilkompetenzen einer zu erreichenden Kompetenz, deren Erwerb durch Diagnose unterstützt werden soll, aufzeigen können. Die Beobachtungen, die Lehrerinnen und Lehrer in einer Diagnosesituation machen, müssen sie in Zusammenhang bringen können mit dem mathematischen Denken der Schülerinnen und Schüler. Was sagt ein beobachtetes Phänomen über das fachliche Verständnis dieser Schülerin/dieses Schülers aus? Und wie steht dieses beobachtete Phänomen in Bezug zu dem Verständnis, welches durch Lehren und Lernen erzielt werden soll? Nur wenn eine Diagnose auf diese beiden Fragen Antworten liefert, kann sie das unterrichtliche Handeln der Lehrerinnen und Lehrer anleiten und ihnen bei der Gestaltung von Lehr-/Lernsituationen helfen.

1.2 Algebra im schulischen Mathematikunterricht

Der Umgang mit Variablen und Variablentermen durchzieht die Mathematik der Mittelstufe. Algebraische Symbole wie Variablen und Variablenterme bilden die Grundlage für viele Bereiche der Mathematik und sind fundamentales Werkzeug zur Beschreibung und zum Umgang mit mathematischen Objekten. Konsequenterweise verankern die Bildungsstandards für Mathematik für den mittleren Schulabschluss Algebra in den fünf Leitideen der Mathematik. Dies geschieht oftmals implizit, indem mit Formeln umgegangen werden soll, indem etwas klassifiziert werden soll oder der Umgang mit Funktionen gefordert wird (z.B. Schülerinnen und Schüler „bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her“ in der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (Deutschland, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik, 2004, S. 12)). Die durchgängige Verankerung von Algebra in den Bildungsstandards passt dazu, dass Algebra ein Werkzeug zur Formalisierung von einer Vielzahl von mathematischen Sachverhalten ist und auf diese Weise an vielen Stellen der (Schul-)Mathematik gegenwärtig ist.

Es wurde vielfach nachgewiesen, dass Algebra vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereitet. Verschiedene Gründe wurden und werden dafür in der Mathematikdidaktik diskutiert - zum Beispiel die vielfältigen Vorstellungen oder Vorstellungswechsel, die für algebraisches Denken erforderlich sind (z.B. bei Malle, 1993). Aufgrund der vielfältigen Schwierigkeiten bietet es sich an, Instrumente für unterrichtliche Diagnostik in elementarer Algebra zu entwickeln. Die vorliegende Studie ermittelt, welche Ressourcen Schülerinnen und Schüler in der Mittelstufe erwerben, um formale Algebra zu beherrschen. Damit möchte die Studie eine Grundlage schaffen für die unterrichtliche Strukturierung von Diagnose und Förderung im Unterricht zu elementarer Algebra. Die vorliegende Studie bedient sich dazu des Modells der didaktischen Rekonstruktion (aktuell z.B.: Duit, Gropengießer, Kattmann, Komorek & Parchmann, 2012), welches den Rahmen für das Forschungsdesign vorgibt. Dieses Modell vertritt eine konstruktivistische Auffassung von Lernen. Diese Auffassung besagt, dass Schülerinnen und Schüler

bereits über Vorwissen zu einem schulischen Gegenstand verfügen, welches sich in ihrem Alltag bewährt hat. Die Schülerinnen und Schüler kommen mit diesem Vorwissen im Alltag zurecht; im Unterricht kann dieses Vorwissen jedoch unpassend oder ungenügend sein. Zusammen mit der fachlichen Klärung bildet deshalb die Klärung von Schülervorstellungen zu einem Gegenstand (vereinfacht gesagt das Vorwissen) die Grundlage für eine fachdidaktische Strukturierung von Unterricht zu diesem Gegenstand. In dieser Studie - die Schülerinnen und Schüler zu Beginn der 10. Klasse in den Blick nimmt - wird entsprechend angenommen, dass Schülerinnen und Schüler in Algebra über Vorstellungen und Ressourcen verfügen, die sich im bisherigen Mathematikunterricht (oder Alltag) bewährt haben.

Thematisch fokussiert die vorliegende Studie einen Teilaspekt von Algebra, nämlich die im Kerncurriculum Niedersachsen formulierte Leitidee „Zahl“. Im Fokus stehen die Ressourcen von Schülerinnen und Schülern, mithilfe von Algebra mit Mustern und Regelmäßigkeiten aus der Arithmetik umzugehen, um innermathematische Probleme zu bearbeiten. Das Umgehen mit Mustern und Regelmäßigkeiten (bzw. Strukturen) mit dem Ziel, eine Generalisierung vorzunehmen, wird als wesentliches Kennzeichen algebraischen Denkens aufgefasst. Die Beschränkung auf den Teilbereich des innermathematischen Problemlösens mit arithmetischen Bezügen ermöglicht es, das algebraische Denken von Schülerinnen und Schülern weitestgehend abgegrenzt von anderen mathematischen Teilbereichen zu studieren. So soll es gelingen, typische algebraische Denkweisen zu identifizieren, mit denen Schülerinnen und Schülern algebraische Problemaufgaben zur Leitidee „Zahl“ bearbeiten. Als *Problemaufgabe* bzw. *Problemlöseaufgabe* wird eine Aufgabe verstanden, in welcher der Lösungsweg nicht unmittelbar gegeben/ersichtlich ist und in der Schülerinnen und Schüler entsprechend eigenständig von einer Ausgangslage zu einem (vorgegebenen) Resultat gelangen sollen. Eine Beschreibung von typischen Denkweisen erlaubt es, die Komplexität des Gegenstandes Algebra in der Schule handhabbar zu machen und so eine Diagnose von algebraischem Denken zu ermöglichen.

1.3 Diagnose und Förderung im schulischen Mathematikunterricht

Die vorliegende Studie leistet einen Beitrag zur Konzeption von Diagnose und Förderung im Bereich des algebraischen Denkens von Schülerinnen und Schülern. Zu Beginn dieses Abschnitts soll ein Zitat helfen, Diagnose im Unterrichtsgeschehen zu verorten. Das Zitat stammt von Hans Freudenthal; er stellt ein „Major Problem“ der Mathematikdidaktik vor:

Diagnosis and prescription are terms borrowed from medicine by educationalists who pretend to emulate medical doctors. What they do emulate is medicine of a forgone period, which is the quackery of today. Medical diagnosis in former times aimed at stating *what* is wrong, as do the so-called diagnostic tests in education. True diagnosis tells you *why* something went wrong. The only way to know this is by observing the child's failure and trying to understand it. An expensive way. (Freudenthal, 1981, S. 135).

Es scheint, als würde Hans Freudenthals Aussage auch noch in die heutige Diskussion um Diagnostik im Unterricht passen. Es findet jedoch heute eine Neupositionierung und Ausdifferenzierung von unterrichtlicher Diagnostik statt. Auf der einen Seite stehen heute Testverfahren, die dem Systemmonitoring dienen, der „Politik- und Systemberatung“ (Sacher & Winter, 2011, S. 72). In dieser Funktion haben diese Tests einen wichtigen Stellenwert für das Bildungssystem. Auf der anderen Seite stehen Verfahren, die sich eher mit den individuellen Leistungen von Schülerinnen und Schülern auseinandersetzen, einmal unter der Funktion der Bewertung (Notengebung, Selektion) und einmal unter der Funktion der (individuellen) Lernberatung und Lernbegleitung (Förderung). Die Diagnosen, die im Freudenthal'schen Sinne versuchen, das Denken von Schülerinnen und Schülern zu erfassen, sind erst in der letzten Zeit in den Blick der fachdidaktischen Diskussion gerückt. Das Einschätzen des Denkens der Schülerinnen und Schülern geschieht jedoch oftmals anhand der Fehler, die zu einem Lerngegenstand gemacht werden – die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern rücken erst langsam in den Fokus der fachlichen diagnostischen Bemühungen.

Die obigen Zitate zeigen, dass zwei Funktionen von Diagnostik unterschieden werden können. Die erste Funktion der Diagnose ist eine institutionell bedingte Funktion, also etwa das Systemmonitoring und das Bewerten von Leistungen mit Blick auf Selektion. Die zweite Funktion ist das Verstehen des Schülerdenkens mit dem Ziel der individuellen Lernbegleitung, als etwa Förderung und Forderung. Mitunter wird die Auffassung vertreten, dass Lehrerinnen und Lehrer, die diagnostische Tests verstehen können, über diagnostische Kompetenz verfügen. Diese Auffassung vermischt die beiden oben genannten Funktionen von Diagnose. Sie verkennt so das Grundanliegen von Diagnose im Unterricht, nämlich das Verstehen des Schülerdenkens, um Lernen so zu strukturieren, dass bei den Schülerinnen und Schülern angemessenes Denken angebahnt wird. Dies erfordert nicht etwa, psychologische Tests verstehen zu können, sondern:

- die genaue Kenntnis des Lerngegenstands,
- die Kenntnis von „paradigmatic cases“ (Freudenthal, 1981, S. 136) von Schülerdenken zu diesem Lerngegenstand,
- sowie die Kenntnis, wie dies beides in einer Fördermaßnahme so zusammen zu bringen ist, dass Schülerinnen und Schülern ein besseres Verständnis des Lerngegenstands ermöglicht wird.

Dass Diagnose den Weg in den Unterricht finden sollte, steht außer Frage. Die Wirksamkeit von Diagnose für unterrichtliches Lernen ist belegt (Hattie, 2009, bei ihm ist Diagnose mit Feedback gleichzusetzen). Diagnose ist nach Hatties Analyse genau dann besonders lernwirksam, wenn sie den Schülerinnen und Schülern Informationen zu Lernzielen, Informationen zur Lernaufgabe und zu korrekten Schülerlösungen (nicht zu falschen Schülerlösungen) liefert (Hattie, 2009, S. 174f). Er behauptet „that the main purpose of feedback is to reduce discrepancies between current understandings and performance and a learning intention or goal“ (Hattie, 2009, S. 175). Ähnlich argumentieren auch Scherer und Moser-Opitz (2010) für eine prominente Rolle für die Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Es gibt heute Konzeptionen von mathematikdidaktischer Diagnose, die die o.g. zweite Funktion von Diagnostik als Ausgangspunkt nehmen. Nicht alle diese Konzeptionen von Diagnose sind gleichermaßen geeignet, die Diskrepanz zwischen

dem derzeitigen Verstehen der Schülerinnen und Schüler und dem Verstehen, das im Unterricht „erzielt“ werden soll, so für Lehrerinnen und Lehrer zugänglich zu machen, dass geeignete Fördermaßnahmen geplant werden können. Um die Diskrepanz zu verringern, braucht es Mittel, das derzeitige Verstehen der Schülerinnen und Schüler zu erfassen, und dieses Verstehen mit dem zu erzielenden mathematischen Verstehen eines Gegenstandes in Relation zu setzen. Einige Konzepte von Diagnose wie zum Beispiel Fehleranalysen (d.h. die systematische Analyse der Fehlermuster in Aufgabenlösungen von Schülerinnen und Schülern, etwa (Scherer & Moser-Opitz, 2010)), betrachten diese Diskrepanz aus der Perspektive des Mathematiklernens. Sie ermitteln, welche Schwierigkeiten ein mathematischer Gegenstand Schülerinnen und Schülern bereitet. So rekonstruieren sie, welches Verständnis vom Gegenstand den typischen Fehlern zugrunde liegt. Fehleranalysen erlauben auf diese Weise, anhand von Schülerfehlern zu rekonstruieren, welches Verständnis eine Schülerin oder ein Schüler wahrscheinlich gehabt hat. Andere Konzepte zur Diagnose betonen die Schülerseite dieser Diskrepanz, indem die Aufgabebearbeitungen von Schülerinnen und Schülern nach gewissen Kriterien analysiert werden, um herauszufinden, was Schülerinnen und Schüler bisher können (Selbst- und Partnerdiagnose, typische Aufgaben finden sich bei Sinus Transfer). Hier wird aber nicht nach Ursachen für Fehler gesucht oder versucht zu ermitteln, welches Verständnis eines Gegenstandes bei den Schülerinnen und Schülern vorliegt. Auch wenn beide Formen der Diagnose ihren Platz in der Unterrichtspraxis haben und je auf ihre Weise zu einem besseren Mathematiklernen beitragen können, bleibt die Frage nach dem „why“, die Freudenthal stellt, bei beiden Formen der Diagnose unbeantwortet. Es stehen Konzeptionen von Diagnostik im Mathematikunterricht aus, die helfen können, die Denkwelt der Schülerinnen und Schüler (das „why“) zu einem mathematischen Gegenstand zu verstehen. Solche Ansätze könnten helfen, das Verständnis der Schülerinnen und Schüler gegenstandsbezogen *und* schülerbezogen zu diagnostizieren und so zu ermitteln, welche Schritte zu gehen sind, um ein fachlich angemessenes Verständnis anzubahnen.

Der Ansatz von Diagnose, der in dieser Studie entwickelt wird, plädiert für eine pragmatische und unterrichtspraktische Diagnostik, die Lehrerinnen und Lehrern Informationen liefert, um Schülerinnen und Schülern Feedback über ihren Lernstand zu geben. Hierzu wird sowohl die fachliche Dimension des Diagnosegegenstandes,

als auch die Dimension der Schülervorstellungen zum Gegenstand einbezogen. Des Weiteren werden Aufgaben als Anker der Diagnose im Mathematikunterricht begriffen. Aufgaben sind ein zentrales Mittel zur Organisation von Lehr-Lernprozessen im Mathematikunterricht (Bromme, Seeger & Steinbring, 1990; Jordan et al., 2006) und bieten sich aus diesem Grund an, auch Unterrichtssituationen zu strukturieren, in denen diagnostiziert wird. Ich vertrete die Auffassung, dass Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht eng miteinander verzahnt werden müssen, da sich die Qualität einer diagnostischen Einschätzung einer Lehrerin oder eines Lehrers letztlich nur am Lernerfolg der Schülerin oder des Schülers, die/der diagnostiziert wurde, messen lässt. Die Qualität von Diagnose lässt sich also am Erfolg einer Förderung messen.

Diagnose und Förderung brauchen geeignete Indikatoren. In der didaktischen Diskussion um Bildungsstandards wird immer wieder betont, dass es Kompetenzentwicklungsmodelle braucht, die beschreiben können, wie sich der Aufbau einer bestimmten Kompetenz vollzieht und welche Lernprozesse dazu bei den Schülerinnen und Schülern initiiert werden müssen. Der Erwerb einer Kompetenz kann so Schritt für Schritt angeleitet und angebahnt werden (Lersch, 2010). Dies heißt nichts anderes, als dass gewisse Lernschritte vollzogen werden müssen, damit ein Können in einem abgegrenzten Gegenstandsbereich wie zum Beispiel „Schülerinnen und Schüler beschreiben Sachverhalte durch Terme und Gleichungen“ (Dönges et al., 2006, S. 26) aufgebaut wird. Analog zum Kompetenzerwerb braucht auch fachlich orientierte Diagnose ein geeignetes Modell. Ein solches Modell dient dazu, anhand von gewissen Tätigkeiten und Äußerungen der Schülerin oder des Schülers auf das zugrunde liegende mathematische Denken zurück zu schließen. Erst wenn auf diese Weise Klarheit über das mathematische Denken gewonnen wurde, kann Förderung so gestaltet werden, dass das mathematische Denken der Schülerinnen und Schüler weiterentwickelt werden kann. Man spricht hier vom sogenannten Indikatorenproblem der Diagnostik (Kleber, 1992, S. 59). Ein Indikator zeigt Könnensbereiche an, die durch Lernen verändert werden müssen, damit ein Lernender ein angemessenes Verständnis des betreffenden Lerngegenstands aufbauen kann.

Fachliche Indikatoren sind die Grundlage einer jeden unterrichtspraktischen *fachlichen* Diagnostik. Sie stellen Lehrerinnen und Lehrern also eine Brille bereit, mit der

relevante Phänomene des Schülerdenkens in den Blick genommen werden können. Solche Indikatoren sind immer an den spezifischen Lerngegenstand gebunden, der diagnostiziert werden soll. Je allgemeiner das Modell ist, mit dem Indikatoren konzipiert werden, desto umfangreicher und komplexer muss es auch sein, um Hinweise auf zugrunde liegendes Denken in verschiedensten Schüleräußerungen geben zu können. Dies führt jedoch zu einer komplexeren und weniger handhabbaren unterrichtlichen Diagnostik. Demnach müssen Indikatoren für einen überschaubaren Lerngegenstand Gültigkeit besitzen. Im Bereich des Lerngegenstandes werden Lehrerinnen und Lehrern Rückschlüsse auf das Denken erlaubt, und zugleich bleibt die Diagnose zu diesem Lerngegenstand für Lehrerinnen und Lehrer überschaubar.

1.4 Konzeption der Studie und ihre Fragestellung

Die vorliegende Studie soll typische Denkweisen des algebraischen Denkens von Schülerinnen und Schülern herausarbeiten. Zusätzlich leistet die Studie einen Beitrag zur Diagnose und Förderung von algebraischem Denken im Mathematikunterricht. Im Folgenden werden die vier Forschungsfragen vorgestellt, die in der vorliegenden Studie in den Blick genommen werden. Die ersten beiden Forschungsfragen werden empirisch beantwortet, die übrigen beiden Fragen sind prospektiver und konstruktiver Natur und zielen auf eine allgemeine Unterrichtsstrukturierung für die Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht.

1. Wie machen sich Schülerinnen und Schüler Problemaufgaben mithilfe von Algebra zugänglich? Wie ist das Bindeglied beschaffen, durch das Schülerinnen und Schüler von mathematischem Denken in Arithmetik zu algebraischem Denken, also zum Arbeiten mit Mustern und Strukturen fort-schreiten?
2. Welche algebraischen Denkmuster gibt es bei Schülerinnen und Schülern in den Problemaufgaben? Welche dieser Denkweisen sind in den arithmetikna-hen Problemaufgaben eher erfolgreich (und warum)?

Diagnose algebraischen Denkens

Von der Diagnose- zur Förderaufgabe mithilfe von
Denkmustern

Meyer, A.

2015, XII, 344 S. 49 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-07987-1