

2 Entwicklung der Theorie

In diesem Kapitel wird eine Theorie der Strukturierung eines Terms respektive einer Gleichung entwickelt. Dabei wird eine semiotisch-pragmatische Sichtweise eingenommen. Strukturieren wird daher als Handeln begriffen werden und es wird sich in diesem Handeln die Bedeutung des Terms respektive der Gleichung manifestieren. Die Wahl dieser Sichtweise soll nun gleich zu Beginn begründet werden. Drei Punkte sind ausschlaggebend:

1. Die Leitfrage der vorgelegten Arbeit ist: Wie erkennen Personen in algebraischen Ausdrücken Umformungen? Die Untersuchung dieser Frage beginnt ganz am Anfang, beim algebraischen Ausdruck. Dieser liegt in der Form einer Zeichenreihe vor. Dörfler (2006a, S. 210) spricht beispielsweise von einer „Inskription“, Brunner (2013) erinnert daran, dass es sich hierbei um ein *Token* (und vorerst nicht um einen *Typ*) handelt. Auf dem Papier ist etwas Geschriebenes vermerkt, also etwas Materielles und nicht etwa eine abstrakte Entität. Bei diesen Zeichen wird begonnen. Was macht eine Person mit ihnen? Was fällt ihr auf? Worauf achtet sie? Was kommt einer Person beim Betrachten dieser Zeichen in den Sinn? Wozu veranlassen die Zeichen die Person? Das sind semiotische Fragen. Denn im Zentrum steht das (externe) Zeichen und nicht etwa seine interne Repräsentation. Entsprechend folgt die vorgelegte Arbeit einem semiotischen Ansatz und zwar einem semiotisch-pragmatischen, wie sich aus Punkt 2 ergibt. Allgemein werden semiotische Fragen in der Mathematikdidaktik seit etwa 1980 breit diskutiert (Hasemann, Hefendehl-Hebeker & Weigand, 2006; Hoffmann 2005; Kadunz, 2010; Sáenz-Ludlow, Presmeg, 2006).
2. Die empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) sollen beschreiben, wie die Personen mit den algebraischen Zeichen handeln, während sie sich einen Reim auf die Zeichenreihe machen. Es soll erhoben werden, wie Personen die einzelnen Zeichen des algebraischen Ausdrucks beim Strukturieren gebrauchen. Es geht also um den Zusammenhang zwischen den Zeichen und den Handlungen, die ihr Verstehen ermöglichen. Daher bietet sich eine Sichtweise an, welche solche Handlungen mit Zeichen respektive Handhabungen von Zeichen als basale Elemente und nicht bloß als Begleit- oder Folge-

erscheinung anderer Elemente postuliert. Die semiotisch-pragmatische Sichtweise erfüllt diesen Anspruch.

Die Verwendung einer pragmatischen Sichtweise ist in der Mathematikdidaktik nicht neu. Semiotische Betrachtungen (Godino & Batanero, 1998; Meyer, 2010; Radford 2000) sowie diskursive Studien (Krummheuer, 1995; Sfard, 2008; Voigt, 1984) basieren auf einem pragmatischen Bedeutungsbegriff. Eppe (1994) gibt zudem eine Übersicht über die Verwendung eines pragmatischen Bedeutungskonzepts in philosophisch orientierten Untersuchungen zur Mathematik(didaktik).

3. Diese Arbeit soll eine Grundlage für die Entwicklung von fundierten Ideen und Hilfestellungen für den Algebraunterricht sein, das heißt, vor lauter Zeichen und Handlungen soll der Unterricht nicht vergessen werden. Und Mittelpunkt jeglichen Unterrichts ist die Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden. Aus diesem Grund folgt die vorgelegte Arbeit einer Sichtweise, die sich für die Untersuchung der Forschungsfrage *und* die Erklärung von Kommunikationsprozessen eignet. Die semiotisch-pragmatische Sichtweise leistet das. Denn sie bezieht die *soziale Dimension* (Brandom, 2000) der Kommunikation mit ein, respektive schafft eine Art *geteilte Intentionalität* (shared intentionality, Tomasello et al., 2005): Eine Person kann nur darum mit einer anderen kommunizieren, weil sie dieser dieselbe Art von Intentionalität zuweist, wie sie selbst besitzt.

Ein Kommentar sei hier erlaubt. Jede Wahl der theoretischen Sichtweise ist nebst Gründen der Angemessenheit immer auch bestimmt durch die Personen, welche die Forschung konzipieren, durch ihre Vorlieben, Erfahrungen und biografischen Stationen sowie durch den Kontext, in dem sich diese Personen befinden (Feyerabend, 1976). So bin beispielsweise ich in meinem wissenschaftlichen Werdegang stark konfrontiert worden mit Literatur zur analytischen Philosophie und Sprachpragmatik etwa im Rahmen der Fundierung des Dialogischen Lernens. Zweitens sind semiotisch-pragmatische Studien aktuell in der Mathematikdidaktik maßgeblich an der Fundierung des Umgangs mit Zeichen beteiligt. Meines Erachtens haben auch diese personalen und kontextuellen Bedingungen zur Wahl der theoretischen Sichtweise beigetragen.

2.1 Regeln und ihre Anwendung

Das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen kann als Schlussfolgern in einem Kalkül begriffen und somit mathematisch formalisiert

werden. Ein solcher Kalkül legt zweierlei fest. Erstens definiert er, was als algebraischer Ausdruck gilt und was nicht. Zweitens bestimmt er, welche Umformungen erlaubt sind und welche nicht. In diesem Sinne regelt er die Korrektheit der Darstellung und ihrer Umformungen. Genau das charakterisiert die Mathematik: Was korrekt oder inkorrekt ist, kann mittels einem Kalkül bestimmt werden. Ein Beispiel eines algebraischen Kalküls wird unten im Abschnitt 2.1.1 gegeben.

Der Abschnitt 2.1.2 wird dann aufzeigen, dass dieser Kalkül die Korrektheit festlegt, nicht aber, wann welche Regel angewendet werden soll. Das heißt, die Frage nach der Anwendung der Regeln lässt sich nicht durch Angabe eines Kalküls beantworten. Ganz allgemein fallen in der Mathematik Fragen nach der Heuristik, nach Gütekriterien gelungener Definitionen oder gar danach, was als „trivial“ gilt, außerhalb jeglichen Kalküls. Solche Fragen können nicht wiederum durch Angabe eines endlichen Sets von weiteren Regeln explizit geregelt werden. Vielmehr sind solche Fragen durch implizite Normen bestimmt. Dabei sind mit „impliziten Normen“ die Gepflogenheiten respektive stillschweigenden Regelhaftigkeiten gemeint, die den Praktiken der Mathematikerinnen und Mathematiker innewohnen. Indem die vorgelegte Arbeit das mathematische Arbeiten als solch implizit normative Praxis begreift, folgt sie Arbeiten wie etwa Bauersfeld (1983), Brandom (2000), Ernest (1998), Godino und Batanero (1998), Lerman (2001), Radford (2000), Sfard (2008), Wittgenstein (1974).

2.1.1 Ein algebraischer Kalkül

Ein algebraischer Kalkül besteht aus einem Alphabet, Regeln für den Aufbau von algebraischen Ausdrücken, Regeln für ihre Darstellung sowie Regeln für das Umformen von algebraischen Ausdrücken.

Das *Alphabet* des algebraischen Kalküls ist gleich der Menge von Symbolen, mit denen Terme und Gleichungen formuliert werden dürfen. Es umfasst Variablen, Operationszeichen, das Gleichheitszeichen und auch Klammer-symbole. Die *Regeln für den Aufbau algebraischer Ausdrücke* legen fest, wie Terme und Gleichungen gebildet werden können. Diese Regeln werden typischerweise in der Form von induktiven Definitionen gegeben. Zum Beispiel ist $(A + B)$ ein Term, wenn A und B Terme sind. Die Gleichungen sind schlicht als $A = B$ definiert, wenn A und B Terme sind.

Mit dem Alphabet und den Regeln für den Aufbau ist formal festgelegt, welche Zeichenreihe ein algebraischer Ausdruck ist und welche nicht. Insbesondere ist auch die Darstellung, also die Schreibweise, festgelegt. Beispielsweise wird $(2 + x)$ geschrieben und nicht $+(2, x)$. Oder ein Symbol für

eine zweistellige Operation wird typischerweise zwischen und nicht – wie etwa in der Analysis üblich – vor seinen Argumenten geschrieben. Oftmals kommen aber *Regeln für die Darstellung algebraischer Ausdrücke* hinzu, die eine schlankere Schreibweise ermöglichen. Ein zentrales Beispiel ist die Hierarchie der Operationen, die das Weglassen vieler Klammern erlaubt. Statt $(2+(x+y))$ kann dann $2+x+y$ und statt $(2+(x \cdot y))$ kann $2+x \cdot y$ geschrieben werden. Ein anderes Beispiel ist das Weglassen des Multiplikationszeichens, was schließlich für $2+x \cdot y$ die Schreibweise $2+xy$ erlaubt.

Es gibt unterschiedliche algebraische Kalküle, darauf soll hier hingewiesen werden. Typischerweise unterscheiden sich diese nur in der Darstellung der Ausdrücke. Obig eingeführter Kalkül liefert die Schreibweise der Schulalgebra. Möglich wären aber auch funktionale Schreibweisen oder Baumdiagramme, wie in Abbildung 2.1 gezeigt ist. Gerade der Vergleich dieser drei Darstellun-

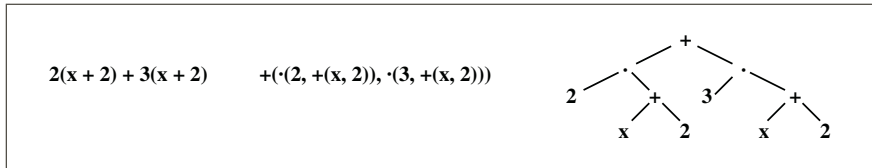


Abbildung 2.1: Drei unterschiedliche Darstellungen desselben Terms: Standardschreibweise, funktionale Schreibweise, Baumdiagramm.

gen desselben Terms belegt, wie Regeln für den Aufbau von Termen immer auch deren Darstellung bestimmen.

Schließlich sind *Regeln für das Umformen algebraischer Ausdrücke* formuliert. Damit sind Regeln für Äquivalenzumformungen von Gleichungen gemeint, aber auch Rechengesetze wie Kommutativ-, Assoziativ- oder Distributivgesetz. Durch solche Regeln ist festgelegt, welche Umformungen korrekt und welche nicht korrekt sind. Zu beachten ist, dass Rechengesetze als Gleichungen dargestellt sind. In diesem Sinne bestimmt der jeweilige algebraische Kalkül auch die Schreibweise seiner algebraischen Gesetze.

2.1.2 Implizite Normen

Obige im Abschnitt 2.1.1 vorgestellte Regeln bestimmen, ob ein algebraischer Ausdruck korrekt aufgebaut ist und ob er korrekt umgeformt wurde. Sie liegen in einem solchen Sinne explizit vor, dass sie im Prinzip eine maschinelle Überprüfung der Korrektheit ihrer Anwendung ermöglichen. Solche Normen werden hier als *Regeln* bezeichnet. Die meisten Normen der Mathematik

können nun aber nicht in diesem Sinne als Regeln vollständig explizit gemacht werden (Brandom, 2000; Breger, 1990, 1992; Rüede, 2009). Brandom (2000) spricht dann von *impliziten Normen* oder von praktischen Richtigkeiten, Sfard (2001, 2008) von *Metaregeln* (metarules). Implizite Normen sind also jene Normen, die nicht vollständig – sondern nur teilweise – explizit gemacht werden können.

Diese impliziten Normen regeln das mathematische Arbeiten. Das umfasst erstens die Frage nach der situativ angemessenen Anwendung von Regeln zur Bearbeitung von Problemstellungen wie etwa das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen. Hier sind auch Fragen der Verfahrensausführung und Heuristik angesprochen. Zweitens umfasst das mathematische Arbeiten auch Fragen wie jene nach der Ästhetik von Beweisen oder jene nach der Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit von Definitionen und mathematischen Strukturen (Breger, 1990, 1992; Heintz, 2000), das heißt, die impliziten Normen sind jene Regelmäßigkeiten, denen ein Mathematiker folgt, wenn er mathematisch angemessen handelt. In diesem Sinn ist das mathematische Arbeiten im Impliziten fundiert. Insbesondere fundiert das Implizite das Explizite und nicht umgekehrt, das heißt: Das „Wissen, dass“ wird in Begriffen des „Wissen, wie“ erklärt. Zur Vermeidung von Missverständnissen sind zwei Punkte zu betonen, die mit diesem Sachverhalt in Zusammenhang stehen. Erstens wird der Begriff der impliziten „Norm“ in semiotisch-pragmatischen Sichtweisen nicht im Sinne einer Vorschrift, also nicht im Sinne einer schriftlich vorliegenden Handlungsanweisung benutzt. Denn dann könnten die impliziten Normen ja vollständig explizit gemacht werden. Gerade das ist nicht der Fall. Zweitens ist eine Regel bloß der verbale Ausdruck einer impliziten Norm. Diese war vor der Regel. Insofern erklärt die Regel nicht etwas, sondern sie drückt etwas aus. Das hat beispielsweise auch Auswirkungen darauf, was es heißt, ob eine Regel wahr ist oder nicht (Brandom, 2000).

Die impliziten Normen bestimmen also die Anwendung einer algebraischen Regel in dem Sinne, dass sie (implizit!) festlegen, *wann* eine Regel *wie* angewendet werden soll. Diese Festlegungen sind ja den obigen Regeln des algebraischen Kalküls nicht mitgegeben. Sie stecken aber implizit im mathematischen Arbeiten. Es ist gerade Gegenstand des Algebraunterrichts, zu lernen, wann diese Regeln wie anzuwenden sind. Dabei ist mit dem *Wie* der Anwendung die Frage der korrekten Anwendung gemeint: Wie wende ich die Regel korrekt an? In welchen Situationen darf ich sie überhaupt anwenden? (Um ganz präzise zu sein: Explizit ist im algebraischen Kalkül geregelt, ob eine Regel korrekt angewendet wurde. Implizit ist geregelt, wie ich die Regel gebrauchen muss, wie ich mit ihr umzugehen habe, damit ich sie korrekt – nämlich so, wie es gemeint ist – anwende.) Das *Wann* der

Anwendung zielt hingegen auf das Strategische, auf die Heuristik: Wann ist die Anwendung der Regel nützlich? Wann bringt sie einen Gewinn und wann nicht? Beispielsweise kann die Regel korrekt angewendet sein, doch die Anwendung verkompliziert die Aufgabe bloß. Zur Illustration seien zwei Beispiele gegeben.

1. Eine Regel für die Darstellung algebraischer Ausdrücke lautet: Bei $a \cdot b$ kann das Malzeichen weggelassen und ab geschrieben werden.

Das Wie der Anwendung: Typischerweise wird bei dieser Regel nicht gesagt, wie sie in Kombinationen wie $a : b \cdot c$ zu verwenden ist: nämlich gar nicht. Denn $a : b \cdot c$ und $a : bc$ meinen Unterschiedliches. $a : b \cdot c$ ist gleich $(a : b) \cdot c$ und $a : bc$ gleich $a : (b \cdot c)$. Ebenso wird nicht auf einen Fall wie $10 \cdot \frac{1}{2}$ hingewiesen und daher verstehen manche Lernende anfänglich unter $10\frac{1}{2}$ und $10 \cdot \frac{1}{2}$ dasselbe.

Das Wann der Anwendung: Ein sichtbares Multiplikationszeichen kann gemeinsame Faktoren betonen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler ein Gefühl entwickeln. Muss beispielsweise ein Term wie $cab + aca$ eingeklammert werden, ist ein explizites Multiplikationszeichen hilfreich, weil es den gemeinsamen Faktor betont: $ca \cdot b + a \cdot ca$.

2. Ein Rechengesetz für das Umformen algebraischer Ausdrücke lautet: $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz).

Das Wie der Anwendung: Selten wird gesagt, dass hier das Pluszeichen wesentlich ist. Daher findet man während des Lernprozesses auch inkorrekte Umformungen wie von $a(b \cdot c)$ zu $ab \cdot ac$. Unklar ist zu Beginn auch die Anwendung in Fällen wie $b(a + b + c)$ oder $(2 + x)(1 - x)$.

Das Wann der Anwendung: Bei einer linearen Gleichung wie $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ ist die Anwendung des Distributivgesetzes unangemessen (aber korrekt), um auf $112 + 21x = 100 - 48 - 9x$ umzuformen. Wesentlich geeigneter ist es, zuerst auf $10(16 + 3x) = 100$ umzuformen und dann das Distributivgesetz anzuwenden.

Selbstverständlich kann in obigen Situationen so reagiert werden, dass die entsprechenden Regeln detaillierter – und damit expliziter – angegeben werden. Doch erstens müssen auch diese Ergänzungen von den Lernenden verstanden werden und zweitens lassen sich mühelos weitere Fälle konstruieren, in denen die Anwendung weiter geklärt werden muss. Die Anwendung einer Regel ist einfach nicht mit endlich vielen Worten – und daher nicht explizit – für die unendlich vielen Anwendungssituationen zu regeln.

2.1.3 Soziale Normen

Implizite Normen haben eine soziale Dimension (Brandom, 2000; Wittgenstein, 1984). Sie legen fest, wie wir das Gegenüber zu behandeln haben, damit wir seine Aussagen angemessen begreifen können. Wir müssen es nämlich so behandeln, wie es uns behandelt. Kommunikation gelingt nur dann, wenn jede Person die andere als intentionales Wesen versteht und so einen Raum von geteilter Intentionalität schafft. Daher sind die impliziten Normen immer auch soziale Normen, da sie die gegenseitige Behandlungsweise bei Kommunikationsprozessen festlegen und damit die Art und Weise der gegenseitigen respektive interaktiven Wahrnehmungs-, Interpretations- und Verstehensprozesse.

Diese soziale Dimension wird unterschiedlich konzipiert. Allen Ansätzen ist aber gemeinsam, dass das Soziale das Individuelle konstituiert und nicht umgekehrt. Seeger (2006, S. 269) spricht hier von einer Entwicklung, „die vom Sozialen zum Individuellen verläuft“, und bei Brandom (2000) ermöglicht erst das Erkennen des Du die Konstitution des Ich. Das führt zur Konzeption des Lernens als *Teilnahme* an einer Kultur (Sfard, 1998), etwa als Teilnahme am „sozial geteilten/teilbaren [diagrammatischen] Handeln“ (Dörfler, 2010, S. 27) oder als Teilnahme an einer diskursiven Praxis (Sfard, 2008) – und nicht als Erwerb von sprachlichen Fähigkeiten. Wo Sfard Akte des Sprechens hervorhebt, berücksichtigt Radford (1998, 2000) auch das Schreiben sowie Gestiken und Bewegungen mit dem Körper oder ganz allgemein jegliche Formen der Handlungen mit Zeichen. Dieser umfassende Begriff von Zeichen und ihrem Umgang macht plausibel, warum Radford die soziale Dimension als eine sozio-kulturelle konzipiert: Die entsprechenden Normen sind im Laufe der Kulturgeschichte gewachsen. Beispielsweise wird das Erlernen der Anwendung der algebraischen Regeln eine Einführung der Lernenden in eine historisch gewachsene Kultur. Die durch diese Kultur benutzten algebraischen Zeichen haben zweierlei Funktionen. Einerseits erlauben sie dem Individuum, sich in die algebraische Praxis einzubringen, andererseits konstituieren die Verwendungsweisen der algebraischen Zeichen eine soziale Realität. So ist wohl Radford (2000, S. 241) zu verstehen, wenn er festhält, dass die Regeln das Individuum „transzendieren“.

Erst die soziale Dimension der Normen macht die Anwendung von Regeln überhaupt erlernbar. Denn diese Anwendung von Regeln kann nicht vollständig explizit gemacht werden und folglich müssen sich die Lernenden an etwas anderem als an Regeln orientieren, die beispielsweise schriftlich notiert sind. Das Kollektiv der Mathematiker liefert diese Orientierung. Die Lernenden werden durch die Lehrperson in Praktiken dieses Kollektivs ein-

geführt. Als Vertreter dieses Kollektivs schätzt die Lehrperson ein, inwiefern eine Regel von den Lernenden angemessen verwendet wird. So lernt man die Anwendung der Regeln, das heißt, das Kollektiv ist das Korrektiv bei der Anwendung der Regeln.

2.2 Strukturieren und Strukturierungen

In diesem Abschnitt wird der Schritt von der Struktur zur Strukturierung vollzogen. Damit ändert sich die Sichtweise: weg von der (objektiven) Eigenschaft eines algebraischen Ausdrucks, hin zur subjektiven Begegnung mit dem Ausdruck. Die Mathematikdidaktik hat solche Individualisierungen mathematischer Begriffe schon mehrfach betont. Es sei auf ein paar Beispiele hingewiesen.

- Im deutschsprachigen Raum stellt Bauersfeld (1983) als einer der Ersten die individuellen Lernwege ins Zentrum. Er führt die *subjektiven Erfahrungsbereiche* ein zur Modellierung der individuellen Verarbeitung menschlicher Erfahrung. Diese umfassen „die Gesamtheit des als subjektiv wichtigen Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw., also nicht nur die kognitive Dimension“ (ebd., S. 2).
- Seit etwa 1980 interessieren sich viele empirische Studien für individuelle Sichtweisen auf mathematische Begriffe. Beispielsweise zeichnet Hussmann (2002) nach, wie Schülerinnen und Schüler den Begriff des Integrals individuell entwickeln. Rottmann (2006) erfasst das individuelle kindliche Verständnis von „die Hälfte“ und „das Doppelte“, um daraus Idealtypen zu bilden. Selter und Spiegel (1997) dokumentieren individuelle Rechenwege von Kindern und Söbbeke (2005) beschreibt unterschiedliche Ebenen der Strukturierungen von Punktfeldern, indem sie Einzelfälle darstellt.
- Besonders hinsichtlich des Unterrichts sind individuelle Denkprozesse wichtig. Entsprechend macht die Mathematikdidaktik Vorschläge, wie diese im Unterricht genutzt werden sollen. Ein allgemeines Unterrichtskonzept stellt zum Beispiel das Dialogische Lernmodell dar (Gallin & Hussmann, 2006; Ruf & Gallin, 1998). Vorschläge zur Aktivierung und Nutzung individueller Vorstellungen sind in Lengnink, Prediger und Weber (2011) gegeben und ein ganz spezifisches Unterrichtsinstrument ist beispielsweise in Weber (2007, 2010) beschrieben: mathematische Vorstellungsstübungen. Spezifisch auf einen thematischen Bereich zugeschnittene

Umsetzungsideen sind etwa für die Arithmetik in Selter (1994) entwickelt und für die frühe geometrische Förderung in Wollring (2006).

- Zur Beschreibung des Individuellen sind andere Begrifflichkeiten nötig als zur Beschreibung von Regularitäten. Einen aktuellen Ansatz legt Schacht (2012) vor. Er führt das Instrument der individuell eingegangenen *Festlegungen* ein. Die individuelle Begriffsentwicklung wird dann zur individuellen Festlegungsentwicklung. Damit kann die Spannung zwischen der individuellen Welt und dem normativen Status begrifflich gefasst werden.

Im Folgenden wird nun die Individualisierung des Begriffs der Struktur zum Begriff der Strukturierung beschrieben. Ausgangspunkt wird sein, dass der Prozess des Strukturierens eine Tätigkeit und Strukturieren somit ein Handeln ist.

2.2.1 Definition einer Strukturierung

Der Mensch muss extern Gegebenes interpretieren. Er ist eben keine Maschine. Dabei ist mit „Interpretieren“ in dieser Arbeit ein „Behandeln als“ gemeint. Dadurch wird die semiotisch-pragmatische Sichtweise hervorgehoben. Es wird wichtig, zu welchen Handlungen die Personen durch die Zeichen befähigt, und nicht, wie die Zeichen von den Personen intern repräsentiert werden (Dörfler, 2006a, 2006b; Radford, 2000). Der Mensch muss also lernen, als was etwa ein zu vereinfachender Term oder eine zu lösende Gleichung zu behandeln ist. Er muss lernen, Terme und Gleichungen zu strukturieren, um gewinnbringende Umformungen zu erkennen und anzuwenden. Diese Weise des „Behandeln als“ wird nun als *Strukturieren* verstanden. Es ist in dieser Arbeit bestimmt als ein Aufeinanderbeziehen von Teilen eines algebraischen Ausdrucks durch eine Person und ist damit ähnlich konzipiert wie in gestaltpsychologischen Sichtweisen (Abschnitt 1.2.2). In der Folge wird auch vom Herstellen von Bezügen zwischen Teilen eines Ausdrucks gesprochen. Eine *Strukturierung* ist dann als das Produkt dieses Prozesses definiert. Sie besagt, welche Teile eines Ausdrucks wie aufeinander bezogen sind.

Wichtig an der Definition des Strukturierens und der Strukturierung ist die Anbindung an eine Person. Es ist eine Person, die strukturiert und dadurch eine Strukturierung herstellt. So kann die Individualität der strukturierenden Tätigkeit einer Person eingefangen werden.

In den folgenden Kapiteln werden mehrere Strukturierungen vorgestellt. Daher sei an dieser Stelle nur ein Beispiel zur Illustration angeführt, und

zwar jenes der Vereinfachung von $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$. Vorstellbar ist beispielsweise eine erste Person, die den Ausdruck aufteilt in je einen Teil links und rechts des Minuszeichens und ihn in der Folge als Differenz behandelt. In diesem Fall bezieht die Person $\frac{2x}{2x-2}$ und $2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ so aufeinander, dass sie den ersten Teil als Minuenden und den zweiten als Subtrahenden einer Subtraktion begreift. Das wäre die von der Person vorgenommene Strukturierung. Vielleicht versucht die Person in der Folge sogar die beiden Teile einander anzugleichen, um einen Ausdruck der Form $A - A$ zu erhalten. Denkbar ist eine zweite Person, die die zweidimensionale Anordnung in Teile unterhalb und oberhalb des Bruchstrichs aufteilt (ausgenommen der Vorfaktor 2), die beiden Nenner aufeinander bezieht und erkennt, dass es dieselben sind. Eine mögliche Strukturierung bestände darin, dass die Person die Teile unterhalb des Bruchstrichs je als Hauptnenner von zwei zu subtrahierenden Brüchen behandelt. Eine Konsequenz wäre, dass die Person dann den Vorfaktor 2 zum x hochnimmt und den Bruchstrich mental durchzieht. Schließlich könnte eine dritte Person nur auf den ersten Bruch fokussieren und diesen in einen Teil oben ($2x$) und zwei Teile unten ($2x$ und 2) aufteilen. Diese drei Teile würden dann nahezu wie drei Ecken eines Dreiecks erscheinen. Indem die Person diese drei Teile aufeinander bezieht, erkennt sie vielleicht den gemeinsamen Faktor 2. Darin bestände der Kern dieser dritten Strukturierung.

Diese drei Beispiele stellen jeweils genau eine Strukturierung vor, hergestellt von einer Person. Es soll aber betont werden, dass im Laufe des Vereinfachens eines Terms oder des Lösen einer Gleichung mehrere Strukturierungen nacheinander hergestellt werden. Schon vor der ersten Umformung stellt eine Person oftmals mehr als eine Strukturierung her, wie die Beispiele in den Kapiteln 4 und 5 zeigen werden.

2.2.2 Beobachtbarkeit des Strukturierens

Eine Person, die strukturiert, handelt. Das ist der wesentliche Grund, warum in dieser Arbeit Strukturieren gleich dem Aufeinanderbeziehen von Teilen des Ausdrucks gesetzt wird. Denn, wer Teile in einem Ausdruck aufeinander bezieht, stellt Bezüge her und handelt in diesem Sinne. Diese Konzeption des Strukturierens als Handeln geht einher mit dem Ansatz von Radford (1998, 2000), der ganz allgemein das Denken als reflexive Tätigkeit (reflexive activity) konzipiert. Die Grundlage für diesen tätigkeitstheoretischen Ansatz von Radford ist die Arbeit von Leontiev (1981).

Sind solche Handlungen des Strukturierens beobachtbar? – Die Antwort fällt mehrheitlich negativ aus. Wenn eine Person still und regungslos einen algebraischen Ausdruck anschaut und ihn dabei strukturiert, ist von außen

Strukturierungen von Termen und Gleichungen
Theorie und Empirie des Gebrauchs algebraischer
Zeichen durch Experten und Novizen

Rüede, C.

2015, X, 224 S. 15 Abb., 8 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-08213-0