

Der Finanzmathematik liegen – wie fast allen Teilgebieten der Mathematik – eine Reihe von Formeln zugrunde. Wer aber glaubt, jeweils nur die richtige Formel zur Lösung eines Problems herausfinden zu müssen und dann die gegebenen Größen dort einzusetzen, der befindet sich im Irrtum. Aufgrund der Vielfalt und zahlreichen Besonderheiten praktischer Problemstellungen müssen die für „Standardsituationen“ geltenden Grundformeln angepasst, kombiniert und in aller Regel umgeformt, d. h., nach einer der vorkommenden Größen aufgelöst werden, sofern dies überhaupt möglich ist. Anderenfalls müssen numerische Verfahren zur Ermittlung von Lösungen eingesetzt werden.

Diese oder ähnliche Probleme werden eine Rolle spielen:

- Wie lässt sich die Potenzgleichung $a^x = b$ nach a bzw. x auflösen?
- Wie kann man die Beziehung $\frac{1,05^n - 1}{1,05^n - 1 \cdot 0,05} = 10$ nach n umformen?
- Wie kann eine bzw. können alle positive(n) Nullstelle(n) der Polynomfunktion $f(x) = x^{11} - x^{10} - 105x + 105$ gefunden werden? Wie viele positive Nullstellen besitzt diese Funktion überhaupt?
- Wodurch sind arithmetische und geometrische Zahlenfolgen gekennzeichnet und wie können deren Glieder bzw. die Summe der ersten n Glieder berechnet werden?

Nachdem Sie dieses Kapitel durchgearbeitet haben, werden Sie in der Lage sein

- in der Finanzmathematik auftretende Gleichungen umzuformen,
- mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen umzugehen,
- Lösungen von Polynomgleichungen höheren Grades mithilfe numerischer Lösungsverfahren zu bestimmen und somit Renditen bzw. Effektivzinssätze von Geldanlagen und Finanzprodukten zu ermitteln,
- die Grundlagen der Zins-, Zinseszins-, Renten- und Tilgungsrechnung zu verstehen, da Sie die Bildungsgesetze arithmetischer und geometrischer Zahlenfolgen und -reihen gut verstehen.

Wer sich bereits jetzt mit den genannten Dingen gut auskennt, kann dieses Kapitel weglassen oder lediglich überfliegen.

2.1 Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung

2.1.1 Potenzrechnung

Wird ein und dieselbe Zahl oder Variable mehrfach mit sich selbst multipliziert, nutzt man meist die Potenzschreibweise und schreibt für $a \in \mathbb{R}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad (\text{gesprochen: } a \text{ hoch } n),$$

wobei a als *Basis*, n als *Exponent* und a^n als *Potenzwert* bezeichnet werden. Die Zahl n , die die Anzahl der Faktoren angibt, wird zunächst als natürliche Zahl vorausgesetzt, kann später aber auch reell sein. Zur Berechnung von Potenzwerten mit einem Taschenrechner benötigt man die Funktionstaste y^x .

Für beliebiges $a \neq 0$ definiert man $a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Dass dies zweckmäßig ist, zeigen die nachstehenden Potenzgesetze. Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert und wird daher *unbestimmter Ausdruck* genannt.

Es gelten die folgenden Rechenregeln (wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt sei):

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & a^m : a^n &= a^{m-n}, & a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n, & (a^m)^n &= a^{m \cdot n} = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

2.1.2 Wurzelrechnung

Oben wurden Potenzen mit ausschließlich ganzzahligen Exponenten betrachtet. Dass auch das Rechnen mit rationalen (oder gar reellen) Exponenten sinnvoll und interpretierbar ist, zeigt der Begriff der *Wurzel*. Das *Wurzelziehen* (oder *Radizieren*) stellt eine erste Umkehroperation zum Potenzieren dar. Hierbei sind der *Potenzwert* b und der *Exponent* n gegeben, während die *Basis* a gesucht ist. Zunächst gelte $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die n -te *Wurzel*, bezeichnet mit $\sqrt[n]{b}$, folgendermaßen definiert:

$$a = \sqrt[n]{b} \iff a^n = b$$

Es wird also diejenige Zahl a gesucht, die – in die n -te Potenz erhoben – die Zahl b ergibt. Hierbei werden b als *Radikand* und n als *Wurzelexponent* bezeichnet.

Wir werden nur positive (exakter: nichtnegative) Radikanden zulassen und unter der Wurzel bzw. Hauptwurzel jeweils den nichtnegativen Wert a verstehen, für den $a^n = b$ gilt (obwohl für gerades n auch $a = -\sqrt[n]{b}$ Lösung der Gleichung $a^n = b$ ist). Ist $b < 0$ und n ungerade, bestimmt sich die eindeutige Lösung der Gleichung $a^n = b$ aus der Beziehung $a = -\sqrt[n]{-b}$. Wegen $0^n = 0$ für beliebiges $n \in \mathbb{N} (n \neq 0)$, gilt stets $\sqrt[n]{0} = 0$.

Unmittelbar aus der oben angegebenen Definition folgt

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b, \quad \sqrt[n]{b^n} = b$$

Unter Beachtung dieser Gesetze ist es sinnvoll,

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n} \text{ bzw. } \sqrt[n]{b^m} = b^{m/n}$$

zu setzen und damit Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten zu schreiben. Für diese gelten die gleichen Rechenregeln wie für Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten. Es gilt:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

2.1.3 Logarithmenrechnung

Eine zweite Umkehroperation zum Potenzieren ist das *Logarithmieren*. In diesem Fall sind der Potenzwert b sowie die Basis a gegeben und der (reelle, nicht notwendig natürliche) Exponent x gesucht. Man definiert

$$x = \log_a b \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b$$

(gesprochen: x ist Logarithmus von b zur Basis a), wobei a und b als positiv und $a \neq 1$ vorausgesetzt werden. Somit ist der Logarithmus von b zur Basis a derjenige Exponent x , mit dem a potenziert werden muss, um b zu erhalten.

Direkt aus der Definition folgen die Beziehungen

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a (a^n) = n$$

Weitere Rechenregeln sind:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d, \quad \log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

Die für die Finanzmathematik wichtigste Regel der Logarithmenrechnung (insbesondere bei der exakten Berechnung von Laufzeiten) ist

$$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$$

Logarithmen mit gleicher Basis bilden jeweils ein Logarithmensystem, von denen die beiden gebräuchlichsten die dekadischen (Basis $a = 10$, bezeichnet mit $\lg b \stackrel{\text{def}}{=} \log_{10} b$, seltener mit $\log b$) und die natürlichen Logarithmen (mit der *Euler'schen Zahl* $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828182846 \dots$ als Basis; Bezeichnung $\ln b \stackrel{\text{def}}{=} \log_e b$) sind. Wir werden vor allem von letzteren Gebrauch machen.

2.2 Umformung von Formeln

Eine Formel stellt im Allgemeinen eine Gleichung dar, die mehrere variable und konstante Größen enthält und nach einer Variablen aufgelöst ist. In Abhängigkeit davon, welche Größen als gegeben und welche als gesucht anzusehen sind, besteht häufig die Notwendigkeit, die Gleichung umzuformen, d. h. nach einer anderen Variablen aufzulösen, wobei die nachstehenden Regeln beachtet werden müssen:

Regel: Ein beliebiger Ausdruck kann gleichzeitig auf beiden Seiten einer Gleichung addiert oder subtrahiert werden:

$$a = b \implies a \pm c = b \pm c.$$

Hierdurch können Glieder „von einer Seite auf die andere gebracht werden“, was natürlich auch schrittweise möglich ist.

Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl} 9a^2 - 2a - 4b^2 & = & 3a^2 - 7a + 5b - 3 & | - 3a^2 + 7a + 4b^2 \\ 6a^2 + 5a & = & 4b^2 + 5b - 3 & \end{array}$$

Jetzt stehen alle Glieder mit a links, die mit b rechts.

Regel: Beide Seiten einer Gleichung können gleichzeitig mit einer beliebigen Konstanten multipliziert oder durch sie dividiert werden:

$$a = b \implies a \cdot c = b \cdot c, \quad a : c = b : c.$$

Mittels dieser Regel können „störende“ Faktoren oder Brüche beseitigt werden. Allerdings darf weder mit Null multipliziert werden (was zu der zwar richtigen, aber inhaltsleeren Identität $0 = 0$ führen würde), noch darf durch Null dividiert werden (da dies eine unerlaubte Operation ist).

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{a}{3} + \frac{b}{6} = 7 & \xrightarrow{\cdot 6} 2a + b = 42 \\ \text{b) } q^n = \frac{a}{b} & \xrightarrow{\cdot b} b \cdot q^n = a \xrightarrow{:q^n} b = \frac{a}{q^n} \end{array}$$

Regel: Beide Seiten einer Gleichung können gleichzeitig als Exponent einer gemeinsamen positiven Basis (ungleich 1) benutzt werden:

$$a = b \implies c^a = c^b.$$

Beispiel:

$$\ln x = a \xrightarrow{\text{Basis e}} e^{\ln x} = x = e^a$$

Regel: Beide Seiten einer Gleichung können logarithmiert werden (mit einer beliebigen, auf beiden Seiten der Gleichung gleichen Basis des Logarithmus), falls dadurch keine Logarithmen nichtpositiver Zahlen auftreten: $a = b \implies \log_c a = \log_c b$.

Beispiel:

$$q^n = \frac{a}{b} \xrightarrow{\text{Logarithmieren}} n \cdot \ln q = \ln \frac{a}{b} \xrightarrow{:\ln q} n = \frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln q} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln q}$$

Einige Besonderheiten sind zu beachten, wenn man mit unbekannten Größen, z. B. mit einem Faktor, der selbst wieder eine Variable x enthält, multipliziert (hierbei können Scheinlösungen auftreten) oder durch solche Ausdrücke dividiert (dabei können echte Lösungen wegfallen).

Regel: Beide Seiten einer Gleichung können mit einem von x abhängigen Ausdruck als Faktor multipliziert oder durch ihn dividiert werden.

Beispiele:

$$\text{a) } 5x = 15 \xrightarrow{\cdot(x-2)} 5x^2 - 10x = 15x - 30 \implies 5x^2 - 25x + 30 = 0$$

Lösungen der letzten Gleichung sind $x = 2$ und $x = 3$, obwohl $x = 2$ vorher keine Lösung war ($x = 2$ ist eine Scheinlösung).

$$\text{b) } (x-a)(x-b) = 0 \xrightarrow{:(x-a)} x-b = 0 \implies x = b$$

Hier sollen a und b gegebene Größen sein, während x gesucht ist. Einzige Lösung der nach der Umformung entstandenen Gleichung ist $x = b$, obwohl $x = a$ ebenfalls eine Lösung der ursprünglichen Gleichung darstellt, d. h., durch die (für $x = a$ nicht erlaubte) Division ist eine Lösung „verschwunden“.

Regel: Aus beiden Seiten einer Gleichung kann man eine beliebige Wurzel ziehen, wenn dadurch keine Wurzeln aus negativen Zahlen entstehen.

Mittels Fallunterscheidungen ist zu sichern, dass keine Lösung verlorengeht.

Beispiel:

$$(x-1)^2 = 9 \xrightarrow{\text{Wurzelziehen}} x-1 = \pm 3 \implies x = 1 \pm 3$$

Unter Berücksichtigung der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel entstehen also die beiden Lösungen $x = 4$ und $x = -2$.

Generell ist zum Umformen von Gleichungen zu sagen, dass all das, was „stört“, mithilfe der jeweiligen Umkehroperation beseitigt werden kann. Außerdem sind die Regeln zum Ausmultiplizieren, Ausklammern sowie der Bruch-, Potenz- und Logarithmenrechnung usw. zu beachten.

Beispiel:

Die folgende Beziehung ist nach n aufzulösen:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{b^n - 1}{b^n \cdot c} \xrightarrow{\cdot c} a \cdot c = \frac{b^n - 1}{b^n} = 1 - \frac{1}{b^n} \implies \frac{1}{b^n} = 1 - a \cdot c \\
 \xRightarrow{\text{Kehrwert}} b^n &= \frac{1}{1 - a \cdot c} \xRightarrow{\text{Logarithmieren}} n \cdot \ln b = \ln \frac{1}{1 - a \cdot c} = \ln 1 - \ln(1 - a \cdot c) \\
 \xRightarrow{:\ln b} n &= -\frac{\ln(1 - a \cdot c)}{\ln b}
 \end{aligned}$$

Nicht jede Beziehung lässt sich nach jeder vorhandenen Größe auflösen. So kann beispielsweise eine Polynomgleichung höheren Grades im Allgemeinen nicht explizit nach der vorkommenden Variablen aufgelöst, sondern nur näherungsweise numerisch gelöst werden (siehe hierzu den nachfolgenden Abschnitt).

2.3 Ermittlung der Nullstellen von Polynomen

Die Nullstellenberechnung spielt in der Finanzmathematik vor allem bei der Ermittlung von Effektivzinssätzen eine wichtige Rolle.

Eine *Polynomfunktion n-ten Grades* ist eine Funktion der Gestalt

$$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad (2.1)$$

in dem die höchste vorkommende Potenz von x gleich n ist. Dabei sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$, die *Koeffizienten* genannt werden und gegebene konstante Größen sind. Polynomfunktionen sind für jeden Wert von x definiert und stetig, d.h., sie weisen keine Sprünge oder Lücken auf. Die Anzahl reeller Nullstellen einer Polynomfunktion, d.h. solcher Werte x , für die der Funktionswert von (2.1) null wird, beträgt maximal n . Bezeichnet man diese Nullstellen mit x_1, x_2, \dots, x_n , so kann die Polynomfunktion $P_n(x)$ aus (2.1) wie folgt dargestellt werden:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (2.2)$$

Die Ermittlung der Nullstellen einer Polynomfunktion ist in der Regel eine komplizierte Aufgabe und nur in Spezialfällen in geschlossener Form realisierbar. Gut bekannt ist z. B. die Lösungsformel für den quadratischen Fall ($n = 2$): Lösungen der Polynomgleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.3)$$

sind

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (2.4)$$

Je nachdem, ob der unter der Wurzel stehende Ausdruck größer, gleich oder kleiner null ist, gibt es zwei, eine oder keine reelle Nullstelle der Gleichung (2.3). Im allgemeinen Fall muss zur Nullstellenbestimmung von Ausdrücken der Form (2.2) auf numerische Näherungsverfahren zurückgegriffen werden (siehe unten).

Übrigens kann die Darstellung (2.2) genutzt werden, um bei Kenntnis einer Nullstelle den Grad des Polynoms mithilfe der Polynomdivision um eins zu reduzieren (etwa zum Zwecke der Bestimmung weiterer Nullstellen).

Beispiel:

Gesucht sind die Nullstellen der Polynomfunktion $P_3(x) = 12x^3 - 37x^2 + 2x + 3$. Durch gezieltes Probieren ermittelt man die Nullstelle $x_1 = 3$. Nach Partialdivision von $P_3(x)$ durch den Ausdruck $x - x_1 = x - 3$ erhält man

$$P_2(x) = (12x^3 - 37x^2 + 2x + 3) : (x - 3) = 12x^2 - x - 1.$$

Dieser Ausdruck stellt eine quadratische Funktion dar, deren Nullstellen (nach Division durch 12) leicht mit der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmt werden können und $x_2 = \frac{1}{3}$ bzw. $x_3 = -\frac{1}{4}$ lauten.

Die folgende Regel liefert eine Aussage über die Anzahl *positiver* Nullstellen eines Polynoms. Dazu hat man die Vorzeichen der Koeffizienten a_i des Polynoms $P_n(x)$ aus (2.1) der Reihe nach (unter Weglassung von Nullen) aufzuschreiben und die Vorzeichenwechsel zu zählen; deren Anzahl betrage w .

Descartes'sche Vorzeichenregel: Die Anzahl positiver Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$ ist gleich w oder $w - 2$ oder $w - 4$, ...

Beispiel:

Zum Polynom $P_{10}(x) = x^{10} - 8x^9 - 17x - 103$ gehört die Vorzeichenkette $+- - -$, die einen Wechsel aufweist, sodass es gemäß der Zeichenregel von Descartes eine positive Nullstelle gibt. Im vorliegenden Fall ist deren Bestimmung allerdings nur näherungsweise möglich.

Oftmals lässt sich eine Nullstelle einer Polynomgleichung (2.1) höherer Ordnung nur näherungsweise mit numerischen Methoden ermitteln (beispielsweise dann, wenn der Grad des Polynoms größer als fünf ist und kein irgendwie gearteter Spezialfall vorliegt; aber auch die Nullstellen von Polynomen 3. bzw. 4. Grades werden in der Regel numerisch berechnet). In diesen Fällen, aber auch allgemein bei der Bestimmung von Nullstellen beliebiger Funktionen, sind die nachstehenden Methoden sehr hilfreich.

Grobübersicht mittels Wertetabelle: Zunächst stellt man für geeignete x -Werte eine Wertetabelle auf, um den ungefähren Kurvenverlauf von $f(x)$ und damit auch die ungefähre Lage der gesuchten Nullstellen zu bestimmen. Danach sucht man den betragsmäßig kleinsten in der Tabelle enthaltenen Funktionswert und bestimmt weitere Funktionswerte in der Nähe des zugehörigen Arguments x . Die so gefundenen Näherungswerte für Nullstellen können als Ausgangspunkt für die nachstehend beschriebenen Verfahren dienen. Nützlich für dieses Vorgehen sind programmierbare oder grafikfähige Taschenrechner.

Intervallhalbierung (Bisektion): Gegeben seien eine stetige Funktion $f(x)$ (z. B. die Polynomfunktion $P_n(x)$ aus (2.1)) sowie zwei Argumentwerte x_1 und x_2 mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$ (oder umgekehrt). Dann gibt es im Intervall (x_1, x_2) mindestens eine Nullstelle. Da der exakte Verlauf der Funktion $f(x)$ zwischen x_1 und x_2 nicht bekannt ist, kann die gesuchte Nullstelle x^* an jeder beliebigen Stelle innerhalb des Intervalls (x_1, x_2) liegen. Als neue Näherung für x^* wählt man nun

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (2.5)$$

d. h. den Mittelpunkt des Intervalls, und berechnet den zugehörigen Funktionswert $f(x_m)$ (siehe linke Abbildung). Erhält man dabei $f(x_m) = 0$, so gilt $x_0 = x_m$. Gilt jedoch $f(x_m) < 0$, so liegt x_0 offensichtlich im Intervall (x_m, x_2) . Bei $f(x_m) > 0$ (wie in Abb. 2.1) muss x_0 in (x_1, x_m) gesucht werden.

Das neue Intervall ist nur noch halb so lang wie das ursprüngliche, was bedeutet, dass sich die erreichte Genauigkeit hinsichtlich der Lage der Nullstelle verdoppelt hat. Dieser Suchprozess kann nun mit der Halbierung des Intervalls (x_1, x_m) bzw. (x_m, x_2) so lange fortgesetzt werden, bis die gewünschte Genauigkeit in Bezug auf Intervalllänge oder Betrag des aktuellen Funktionswertes erreicht ist (siehe Abb. 2.1a).

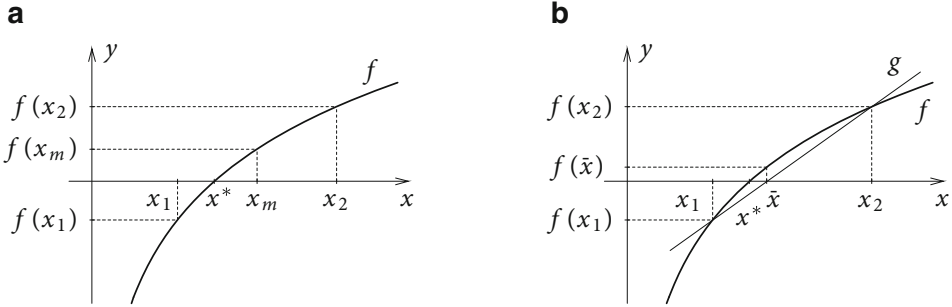


Abb. 2.1 Intervallhalbierung (a) und lineare Interpolation (b)

Lineare Interpolation und Sekantenverfahren: Anstelle den Intervallmittelpunkt zu wählen, ist es möglich, etwas „intelligenter“ vorzugehen und die meist unterschiedliche Größe der Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ in die Rechnung einzubeziehen. Dabei nimmt man an, dass die Nullstelle x^* im Intervall (x_1, x_2) näher an x_1 als an x_2 liegt, wenn der Funktionswert $f(x_1)$ betragsmäßig näher an null liegt als der Funktionswert $f(x_2)$. Eine Schätzung für x^* erhält man nun, indem man den Graph der Funktion f zwischen den Punkten $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ durch eine lineare Funktion (Gerade g) ersetzt und den Schnittpunkt \bar{x} dieser Geraden mit der x -Achse als neuen Näherungswert wählt (siehe Abb. 2.1b). Der Punkt \bar{x} ist als Nullstelle von g leicht berechenbar:

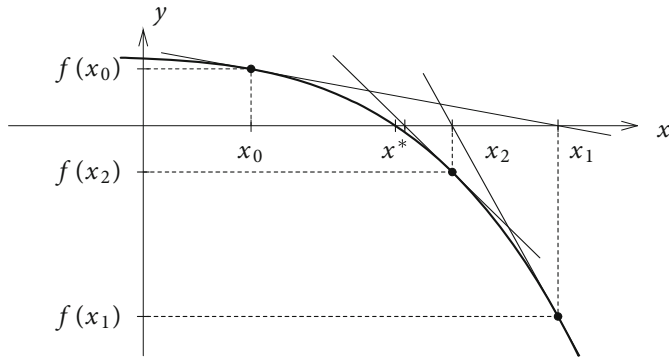
$$\bar{x} = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1). \quad (2.6)$$

Ist der erhaltene Näherungswert noch nicht genau genug, so wird wie bei der Intervallhalbierung das Verfahren wiederholt, wobei je nach Vorzeichen von $f(\bar{x})$ entweder (x_1, \bar{x}) oder (\bar{x}, x_2) als neues Intervall benutzt wird.

Tangentenverfahren: Diese auch als *Newtonverfahren* bekannte Methode nutzt Mittel der Differenzialrechnung. Sie unterscheidet sich von den eben beschriebenen Methoden dadurch, dass nur **ein** Startpunkt x_0 benötigt wird (der allerdings bereits in der „Nähe“ der gesuchten Nullstelle liegen muss) und anstelle der Sekante nunmehr die Tangente an die Funktionskurve $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gelegt wird. Diese hat den Anstieg $f'(x_0)$ und die Geradengleichung $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Hieraus lässt sich die Nullstelle x_1 der Tangente leicht ermitteln: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Jetzt wird im Punkt $(x_1, f(x_1))$ die Tangente an $f(x)$ angelegt (vgl. Abb. 2.2). Man erhält als Nullstelle dieser Tangente den Punkt x_2 , legt in $(x_2, f(x_2))$ wieder die Tangente an usw. Damit kommt man zu der folgenden Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

**Abb. 2.2** Tangentenverfahren

Ohne auf die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Tangentenverfahrens einzugehen, sei lediglich bemerkt, dass in jedem Schritt geprüft werden muss, ob die erreichte Genauigkeit bereits zufriedenstellend ist. Dazu muss entweder der aktuelle Funktionswert $f(x_n)$ hinreichend nahe bei null liegen, d. h., für eine vorgegebene Genauigkeitsschranke $\varepsilon > 0$ muss $|f(x_n)| < \varepsilon$ gelten, oder der Absolutbetrag der Differenz zweier aufeinanderfolgender Iterationspunkte x_n und x_{n+1} muss entsprechend klein werden, was $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ bedeutet. Dabei kann die Genauigkeitsschranke ε beispielsweise als 0,01 oder 0,001 oder ähnlich gewählt werden.

Verwendet man zum Abbruch der Näherungsverfahren die Bedingung $|f(x_n)| < \varepsilon$ (d. h., der Funktionswert soll nahe null liegen), so kann das erzeugte Intervall zu groß ausfallen. Bei Verwendung der Abbruchbedingung $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ kann das vermieden werden. Insofern ist letztere besser.

Alle soeben beschriebenen numerischen Näherungsverfahren sind nützlich und geeignet für eine Rechnung „von Hand“. Sie können aber auch als Grundlage für ein Computerprogramm dienen, das man sich selbst schreibt. Schließlich bilden sie auch den Ausgangspunkt für die internen Abläufe programmierbarer, grafikfähiger Taschenrechner, deren Nutzen nicht hoch genug eingeschätzt werden kann.

Beispiel:

Man bestimme die im Intervall $(1, 2)$ gelegene Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = x^3 + 0,7x^2 - 4,7x + 3$$

mithilfe der vorgestellten Methoden.

Eine erste Grobuntersuchung mithilfe einer **Wertetabelle** ergibt Folgendes:

x	1	2	1,5	1,2	1,1	1,05
$f(x)$	0	4,4	0,9	0,096	0,008	-0,0056

Für die anderen Verfahren geben wir uns eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$ vor, wobei die Ungleichung $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ erfüllt sein soll und x_n die erzeugten Iterationspunkte bezeichnen sollen.

Wir beginnen mit der **Intervallhalbierung**. Als Startwerte wählen wir $x_1 = 1,05$ mit $f(x_1) = -0,00564$ und $x_2 = 1,1$ mit $f(x_2) = 0,008$.

Dann ergeben sich folgende Werte:

Im Intervall

$$(x_1, x_2) : \quad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1,075 \quad \text{mit} \quad f(x_3) = -0,001266,$$

$$(x_3, x_2) : \quad x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = 1,0875 \quad \text{mit} \quad f(x_4) = 0,002748,$$

$$(x_3, x_4) : \quad x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 1,08125 \quad \text{mit} \quad f(x_5) = 0,000587,$$

wobei wir wegen $|f(x_5)| \leq 6 \cdot 10^{-4}$ die vorgegebene Genauigkeitsschranke in drei Schritten erreichen.

Für das **Sekantenverfahren** wählen wir dieselben Startwerte x_1, x_2 wie oben und erhalten entsprechend (2.6) für das Intervall

$$(x_1, x_2) : \quad x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_1) = 1,070642$$

mit $f(x_3) = -0,002376$,

$$(x_3, x_2) : \quad x_4 = x_3 - \frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} \cdot f(x_3) = 1,077365$$

mit $f(x_4) = -0,000608$, d. h., die geforderte Genauigkeit wird hier bereits in zwei Schritten mit $|f(x_4)| \leq 7 \cdot 10^{-4}$ erfüllt.

Für das **Tangentenverfahren** sei als Startwert $x_0 = 1,1$ mit $f(x_0) = 0,008$ gewählt und mithilfe der ersten Ableitung von f , die $f'(x) = 3x^2 + 1,4x - 4,7$ lautet, zunächst $f'(x_0) = 0,4700$ bestimmt. Gemäß der Vorschrift (2.7) berechnen wir iterativ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,082979; \quad f(x_1) = 0,001154; \quad f'(x_1) = 0,3347,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,079531; \quad f(x_2) = 0,000047$$

und können wegen $|f(x_2)| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ das Verfahren nach zwei Schritten abbrechen.

Vergleichen wir die Ergebnisse aller angewendeten Verfahren, so können wir $[x_4^{\text{Sek.}}, x_2^{\text{Tan.}}] = [1,077352; 1,079531]$ als Intervall angeben, in dem bei der vorgegebenen Genauigkeit die gesuchte Nullstelle liegt. Zum Vergleich: Die exakte Nullstelle lautet $x_0 = 1,0793781$.



<http://www.springer.com/978-3-658-08424-0>

Starthilfe Finanzmathematik

Zinsen - Kurse - Renditen

Luderer, B.

2015, XIV, 200 S. 40 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-08424-0