Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Schüler der oberen Klassenstufen, insbesondere der Wirtschaftsgymnasien, ferner an alle, die sich auf ein Studium vorbereiten oder ein solches gerade begonnen haben, wobei vor allem wirtschaftswissenschaftliche und benachbarte Studienrichtungen angesprochen sind. Studenten der Wirtschafts- bzw. Finanzmathematik werden ebenfalls von diesem Text profitieren, legt er doch die Grundlagen für ihr Studium. Außerdem wird es Hörern an Weiterbildungseinrichtungen, Berufsakademien und Praktikern wie beispielsweise Finanzberatern, Mitarbeitern von Geldinstituten sowie nicht zuletzt allen an finanzmathematischen Fragestellungen Interessierten von Nutzen sein.

Vom Inhalt und vom Schwierigkeitsgrad her ist der Text so gestaltet, dass jede Leserin und jeder Leser mit durchschnittlichen mathematischen Schulkenntnissen dem Anliegen des Buches folgen kann und dem Leser die grundlegenden Formeln, Methoden und Ideen der klassischen Finanzmathematik nahegebracht werden, ohne dabei allzusehr ins Detail zu gehen. Vielmehr soll der Appetit auf die weitere Beschäftigung mit finanzmathematischen Fragestellungen geweckt werden. Dabei wird aber niemals der Bezug zur Praxis vernachlässigt, im Gegenteil, durch die Betrachtung und Analyse einer Vielzahl konkreter Finanzprodukte werden die Leserinnen und Leser behutsam an die Praxis herangeführt.

Die Finanzmathematik befindet sich in den letzten Jahrzehnten in einer Phase stürmischer Entwicklung. Ausgehend von den klassischen Gebieten der Finanzmathematik, der Zins- und Zinseszinsrechnung sowie der Renten-, Tilgungs- und Kursrechnung, die vorwiegend im Zusammenhang mit festverzinslichen Wertpapieren von Interesse sind, haben sich zahlreiche eigenständige und mathematisch anspruchsvolle Gebiete entwickelt. So gibt es vielfältige Methoden zur Bewertung von Aktien und zur Prognose von Aktienkursen. Weiterhin ergeben sich sehr interessante, oftmals aber komplizierte Fragestellungen in Verbindung mit der Preisbestimmung sogenannter Derivate (Optionen, Futures, Aktienanleihen etc.), die vor allem im Investment Banking eine wichtige Rolle spielen. Nicht zuletzt bildet die klassische Finanzmathematik die Grundlage für das weite Feld der Versicherungsmathematik und für das Bausparen. Selbstverständlich kann das vorliegende Buch nur eine Grundlage für all die aufgezählten Gebiete liefern; die wichtigsten Zugänge, Methoden und Ideen werden jedoch anschaulich dargestellt, wobei durchgängig versucht wird, möglichst nahe an der Praxis zu bleiben.

Einführende Ausführungen werden gern überlesen, denn viele Leser wollen gleich „zur Sache“ kommen. Trotzdem würde ich jeder Leserin und jedem Leser dringend raten, die nächsten drei Seiten aufmerksam durchzulesen, da ich all diejenigen **Leitgedanken**, die mir wesentlich für die Finanzmathematik erscheinen, hier in thesenhafter Form darlegen möchte. Es ist durchaus empfehlenswert, im Verlaufe des Studiums des vorliegenden Buches von Zeit zu Zeit auf diese Thesen zurückzukommen.

These 1: Der Wert einer Zahlung ist abhängig vom Zeitpunkt, zu dem diese zu leisten ist.
Dies wird im täglichen Leben bei weitem nicht immer beachtet bzw. als nicht so wesentlich eingeschätzt, ist aber sofort einsichtig, vergleicht man beispielsweise eine Zahlung in Höhe von, sagen wir, 10 000 €, die man entweder heute erhält oder erst in 15 Jahren erwarten kann. Wohl jeder würde bevorzugen, diese Zahlung heute in Empfang zu nehmen. Als Konsequenz ergibt sich, dass sich alle Berechnungen in der Finanzmathematik auf den **Faktor Zeit** gründen. Unter diesem Aspekt sagen Angaben über Gesamtzahlungen (etwa bei der Tilgung eines Darlehens) nicht viel aus, da hierbei der Faktor Zeit völlig außer Acht gelassen wird. Auch zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen lassen sich nur dann miteinander vergleichen, wenn sie auf einen einheitlichen Zeitpunkt bezogen werden.

These 2: Es gilt stets das Äquivalenzprinzip
Dieses kann beispielsweise lauten „Die Leistungen des Schuldners sind gleich den Leistungen des Gläubigers“ oder „Der Wert aller Einzahlungen ist gleich dem aller Auszahlungen“ oder – etwas abgewandelt – „Verschiedene Zahlungsarten (z. B. Barzahlung und Finanzierung beim Autokauf) sind gleich günstig“. Hierbei wird natürlich ein bestimmter vereinbarter Zinssatz zugrunde gelegt, der entweder bekannt oder zu bestimmen ist.

Unter Berücksichtigung von These 1 lässt sich das Äquivalenzprinzip auf den **Barwertvergleich** aller Zahlungen von Schuldner bzw. Gläubiger zurückführen, indem als Vergleichszeitpunkt $t = 0$ gewählt wird. Freilich kann auch ein beliebiger anderer Zeitpunkt als Bezugspunkt für den Vergleich verwendet werden. Das Äquivalenzprinzip ist eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Ausführung von Berechnungen und stellt den Schlüssel zur Bestimmung von Renditen bzw. Effektivzinssätzen dar. Es führt jeweils auf eine Bestimmungsgleichung, aus der – in Abhängigkeit davon, welche Werte gegeben sind – die restlichen Größen ermittelt werden können.

These 3: Das Gerüst der klassischen Finanzmathematik wird aus ganz wenigen Formeln gebildet.
Diese Aussage mag sich angesichts vieler und mitunter recht unübersichtlicher Formeln, die in Lehrbüchern der Finanzmathematik (auch im vorliegenden Buch) zu finden sind, seltsam ausnehmen. Bei näherer Betrachtung wird man jedoch schnell entdecken, dass sich die gesamte klassische Finanzmathematik in der Tat aus einer Hand voll Formeln bausteinartig zusammensetzen lässt. Zu diesen Grundformeln, die sich aus mathematischer

Sicht hauptsächlich auf arithmetische und geometrische Zahlenfolgen und Zahlenreihen gründen, sind all die zu rechnen, die in Abschn. 1.2 zusammengestellt sind.

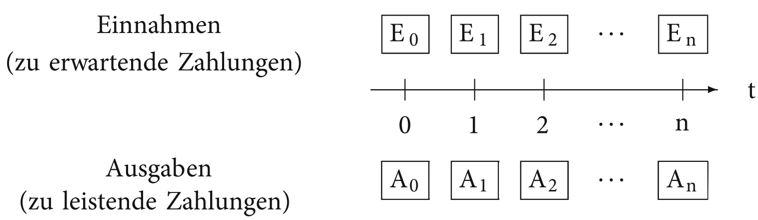
Selbstverständlich setzt These 3 voraus, dass man in der Lage ist, eine Formel oder Gleichung nach einer beliebigen darin vorkommenden Größe aufzulösen.

These 4: In der klassischen Finanzmathematik gibt es einfache, mittelschwere und relativ kompliziert zu lösende Probleme.
Als leicht sollen Aufgaben bezeichnet werden, deren Lösung einfach dadurch erfolgt, dass gegebene Größen in eine Formel eingesetzt werden, was der Berechnung eines Funktionswertes entspricht. Als mittelschwer werden Probleme angesehen, die eine – mehr oder weniger komplizierte – Formelumstellung erfordern oder die durch die Kombination bekannter Formeln gelöst werden können.

Als relativ kompliziert sind schließlich all jene Fragestellungen einzustufen, die nicht explizit, sondern nur näherungsweise mit geeigneten numerischen Verfahren gelöst werden können; dabei handelt es sich in der Regel um die Nullstellenbestimmung von Polynomgleichungen. Gerade letztere Probleme schrecken einen mathematischen Anfänger meist ab, sollten aber im Zeitalter der (programmierbaren) Taschenrechner sowie Computer mit hervorragender mathematischer Software keine prinzipielle Hürde darstellen.

Am schwersten jedoch fällt vielen das **Modellieren**, d. h. das Umsetzen einer verbal formulierten Fragestellung in die „Sprache“ der Mathematik, also das Aufstellen geeigneter Gleichungen oder Funktionen, die den Sachverhalt beschreiben und es gestatten, mathematische Berechnungen vornehmen zu können. Hier kann man nur Schritt für Schritt vorgehen, indem immer wieder neue Situationen – mit einfachen beginnend und dann im Schwierigkeitsgrad steigend – beispielhaft betrachtet werden. Außerordentlich hilfreich beim Modellieren ist das Beachten der nachstehenden These, deren Verinnerlichung ich jedem an der Finanzmathematik Interessierten nur nachdrücklich empfehlen kann.

These 5: Ein grafisches Schema bringt Klarheit.
In Übereinstimmung mit These 1 ist es in jedem Fall wichtig, sich eine Übersicht über alle Ein- und Auszahlungen zu verschaffen, zusammen mit den Zeitpunkten, zu denen diese erfolgen; gegebenenfalls sind auch davon abweichende Zeitpunkte ihrer Verrechnung zu vermerken. Dazu kann das folgende allgemeine Schema von Zahlungen dienen, das in jedem konkreten Einzelfall zu präzisieren ist. In diesem einfachen Schema sind alle Zahlungen gemeinsam mit den Zeitpunkten, zu denen sie erfolgen, aufgeführt:



These 6: Das Salz in der Suppe ist die Rendite.
Die Rendite (Effektiv- oder Realzinssatz) ist die einer Vereinbarung bzw. Geldanlage oder -aufnahme zugrunde liegende tatsächliche, einheitliche, durchschnittliche und – wenn nicht ausdrücklich anders vereinbart – auf den Zeitraum von einem Jahr bezogene Verzinsung. Vor allem diese Größe dient dem Vergleich verschiedener Zahlungspläne, Angebote usw. und ist deshalb überaus wichtig. Nicht umsonst besteht die gesetzliche Pflicht, bei finanziellen Vereinbarungen stets den Effektivzinssatz auszuweisen.

Gründe, warum die Rendite bzw. der Effektivzins vom nominal angegebenen Zinssatz abweicht, können u. a. in Folgendem liegen: Gebühren, Boni, Abschläge bei der Auszahlung eines Darlehens, zeitliche Verschiebungen von Zahlungen oder deren Gutschriften, nichtkorrekte Verzinsung (insbesondere bei unterjähriger Zahlungsweise).

In der Praxis weisen Geldgeschäfte wie Darlehensverträge, Zahlungspläne oder Finanzierungen in der Regel eine Vielzahl der genannten Sonderbedingungen auf, wodurch ein direkter Vergleich meist nicht möglich ist. Der einzige Weg besteht in der Berechnung der Rendite bzw. des Effektivzinssatzes. Freilich gehören Renditeberechnungen bis auf Sonderfälle zu dem Typ von Aufgaben, der in These 4 als relativ kompliziert bezeichnet wurde, denn es sind jeweils aus dem Äquivalenzprinzip resultierende Polynomgleichungen zu lösen, was im Allgemeinen nur näherungsweise, aber stets beliebig genau möglich ist. Die Ermittlung von Renditen zieht sich praktisch quer durch alle Teile der Finanzmathematik.

These 7: Die klassische Finanzmathematik lässt sich klar umreißen.
Von den Teilgebieten her umfasst die Finanzmathematik traditionell die Zins- und Zinseszinsrechnung, die Renten-, Tilgungs- und Kursrechnung; zu Abschreibungen und Investitionsmethoden bestehen enge Beziehungen.

Im **Zinssatz** konzentriert sich alles, was relevant ist. Nicht oder nur indirekt erfasst werden dagegen solche Aspekte wie Risiko (nicht jeder Kredit wird pünktlich oder überhaupt zurückgezahlt), Emotionen („lieber weniger Bares sofort als eine höhere Zahlung in etlichen Jahren"), Inflation (eine bestimmte Geldmenge hat heute einen anderen, höheren Wert als in mehreren Jahren). All diese Aspekte finden letztlich ihren Ausdruck im Zinssatz.

Ferner spielt die Liquidität (Zahlungsfähigkeit) keine Rolle in der klassischen Finanzmathematik: Beim Vergleich verschiedener Anlage- oder Zahlungsvarianten wird stets davon ausgegangen, dass die entsprechenden Zahlungen tatsächlich auch jederzeit möglich sind. Auch auf „banktechnische" Details oder steuerliche Aspekte wird im vorliegenden Buch praktisch nicht eingegangen.

Über den Rahmen der klassischen Finanzmathematik hinaus gehen schließlich stochastische Aspekte, die ihren Niederschlag vor allem in der Versicherungsmathematik, aber auch bei der Prognose von Kursen für Aktien, Wertpapiere, Optionen und anderer Derivate finden.

These 8: Der Taschenrechner sei der ständige Begleiter.
Eigentlich sind Rechnen und Mathematik verschiedene Dinge. Ja, viele Mathematiker sind sogar stolz darauf, schlechte Rechner zu sein und verstecken dies hinter der Behauptung „Mathematik dient der Vermeidung des Rechnens“. In der Finanzmathematik liegen die Dinge jedoch anders. Die behandelten Probleme sind so konkreter Natur, dass ein volles Verständnis ohne aktives Mitrechnen kaum möglich ist. Dazu kann der Computer mit seinen vielfältigen Möglichkeiten genutzt werden, häufig tut es aber auch ein einfacher oder programmierbarer Taschenrechner. Auch spezielle Finanztaschenrechner sind nützliche Hilfsmittel. Bei einfachen Rechnern vermeide man möglichst das Runden von Zwischenergebnissen. Dennoch können bei verschiedenen Rechnern leicht unterschiedliche Ergebnisse entstehen, abhängig von der internen Rechengenauigkeit des jeweiligen Taschenrechners. Das tut der Mathematik jedoch keinen Abbruch. Merke: Ohne Kenntnis von Grundbegriffen und theoretischen Grundlagen ist der Gebrauch von Taschenrechnern wie auch von Formelsammlungen nicht zu empfehlen.

Hinsichtlich der Lösung weiterführender und speziellerer Probleme sei auf den folgenden Titel hingewiesen:

Grundmann, W., Luderer, B.: Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse. Formeln und Begriffe (3. Auflage), Vieweg + Teubner, Wiesbaden (2009).

Die nunmehr vorliegende 4. Auflage dieser Starthilfe unterscheidet sich von der vorhergehenden dadurch, dass die Inhalte stärker auf die einzelnen Kapitel konzentriert wurden. So werden insbesondere zu Beginn eines jeden Kapitels Lernziele formuliert und typische Problemstellungen aufgezeigt (zu denen am Kapitelende auch Lösungen angegeben sind). Außerdem wird am Ende jedes Kapitel die relevante Literatur aufgeführt. Ferner wurden mehr Abbildungen zur besseren Veranschaulichung der mathematischen Zusammenhänge aufgenommen.

Selbstverständlich erfuhr das gesamte Buch wiederum eine gründliche Durchsicht, kleinere Fehler wurden beseitigt und das Layout wurde weiter verbessert. Mein Dank gilt dem Verlag Springer Spektrum für die konstruktive und angenehme Zusammenarbeit.

Hinweise und Bemerkungen zu diesem Buch sind mir jederzeit willkommen.

Chemnitz, Bernd Luderer
im Januar 2015

http://www.springer.com/978-3-658-08424-0

Starthilfe Finanzmathematik
Zinsen – Kurse – Renditen
Luderer, B.
2015, XIV, 200 S. 40 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-08424-0