

Theorieteil

2 Didaktische Diskussion zum Beweisen im Mathematikunterricht

2.1 Begriffliche Klärungen zum Beweisen im Mathematikunterricht

Zunächst lässt sich festhalten, dass Beweisen eine grundlegende Tätigkeit in der Mathematik darstellt und damit auch eine hohe Relevanz in der Schule hat. Es existiert keine einheitliche Definition des abstrakten Begriffs „Mathematischer Beweis“, so dass es eine große Spannweite an Vorstellungen und Sichtweisen auf mathematische Beweise gibt. Hanna und Jahnke (1996) betonen in diesem Zusammenhang, dass es keine allgemein akzeptierten Kriterien für die Gültigkeit von mathematischen Beweisen gibt. Nach Reiss und Heinze (2004b) umfassen Beweise in der Forschung und auch im schulischen Unterricht ein großes Spektrum an formalen und informellen Argumenten. Im Zeichen dieser Vielfältigkeit stellt nach Heinze und Reiss (2004a) das Generieren von Beweisen einen wesentlichen Teil mathematischer Kompetenzen dar und sie heben die Bedeutung von Beweisen für den schulischen Unterricht (im Folgenden auch kurz: die Schule) hervor. Durch die vielfältigen Auffassungen, was unter einem mathematischen Beweis zu verstehen ist und welche Kriterien ein Beweis notwendigerweise erfüllen muss, spielt die Aushandlung hierzu innerhalb einer mathematischen Gemeinschaft eine wesentliche Rolle für die Entwicklung eines Beweisverständnisses. Daher wird nun detailliert auf diesen Ansatz, der auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt wird, eingegangen und begründet, warum diese Sichtweise auf mathematische Beweise einen sinnvollen theoretischen Hintergrund für das hier entwickelte Unterrichtskonzept bildet.

Historisch betrachtet (siehe Part 1 bei (Reid & Knipping, 2010)) wird unter einem Beweis zunächst ein logischer Prozess verstanden, bei dem eine Aussage bzw. ein Theorem in gültiger Weise formal-deduktiv aus bekannten Sätzen und Definitionen schrittweise hergeleitet wird. Hier sei angemerkt, dass sich die verwendeten Sätze auf die Grundlagen der Theorie (die Axiome) zurückführen lassen, jedoch wird dieser kontextuel-

le Zusammenhang in der Praxis meist nicht explizit ausgeführt, um die Argumentation im Lehr-Lernprozess auf das absolut Notwendige zu verkürzen. Zunächst entwickelte sich die Vorstellung von mathematischen Beweisen in der Geometrie mit dem Anliegen, eine logische Verbindung zwischen postulierten Aussagen herzustellen. Die beschriebenen Strukturen aus Definitionen, Axiomen und logisch-deduktiven Regeln findet sich nun auch in Gebieten der modernen Mathematik.

Wittmann und Müller (1988) charakterisieren die Auffassung von mathematischen Beweisen als eine rein logische Ableitung von Begriffen aus Grundbegriffen und von Sätzen aus Axiomen als eine enge Sichtweise und kritisieren diese in Bezug auf das Lehren in der Schule. Dennoch scheint diese Vorstellung in der Schule eine wichtige Rolle zu spielen, wie der folgende Auszug aus den NCTM-Standards deutlich macht. Er kennzeichnet den Beweis (proof) wie folgt:

A careful sequence of steps with each step following logically from an assumed or previously proved statement and from previous steps. (National Council of Teachers of Mathematics, 1989)

Eng verknüpft mit dieser Sichtweise sind die Forderung nach formaler Strenge und die Vorstellung, dass die deduktive Methode allein für die Korrektheit des mathematischen Beweises und damit auch der Aussage verantwortlich ist.

Die Diskussion und damit verbundene Kritik an einer sehr formalen und engen Sichtweise auf mathematische Beweise wurden besonders von Lakatos (1961, 1976) geführt. Seiner Auffassung nach bilden formale kalkülorientierte Beweise die wirklichen Beweisprozesse nicht angemessen ab und entsprechen auch nicht der mathematischen Praxis. Er untermauert seine Kritik durch das Argument, dass Beweise in der Fachwissenschaft nicht aufgrund ihrer formalen Struktur und Darstellung, sondern durch soziale Prozesse akzeptiert werden. Auf diesem Wege werden seiner Auffassung nach notwendige Kriterien für einen Beweis innerhalb einer mathematischen Gemeinschaft ausgehandelt und die Akzeptanz wird nicht ausschließlich durch formale Kriterien bestimmt. Mathematische Beweise stellen damit keine endgültigen Wahrheiten dar, sondern sie haben einen bestimmten Geltungsanspruch, der durch Gegenbeispiele und Gegenbeweise in Frage gestellt werden kann. Dies bedeutet, dass nach Lakatos mathematisches Wissen und damit auch mathe-

mathematische Beweise fehlbar sind. Kontroverse Diskussionen über mathematische Beweise spielen eine wichtige Rolle bei der Entwicklung von mathematischem Wissen, mathematischen Beweisen wird somit eine fortlaufend Wissen entwickelnde Funktion zugeordnet. Bei Lakatos spiegelt sich eine quasi-empirische Sichtweise auf Mathematik wider, bei der soziale Aushandlungsprozesse einen wichtigen Bestandteil darstellen, indem Beweise als soziales Konstrukt gelten.

Auch Hersh (1993) rückt die soziale Dimension in den Vordergrund, indem er Beweise in der mathematischen Praxis folgendermaßen charakterisiert:

„..., a proof is a convincing argument, as judged by qualified judges.“ (Hersh, 1993, S. 389)

Nach Hersh steht die Akzeptanz des Beweises durch qualifizierte / kompetente Personen im Vordergrund und es gibt folglich keine a priori-Kriterien für die Gültigkeit eines Beweises. Bezogen auf die Schule macht Herbst (1998) deutlich, dass mathematische Begründungen im Klassenraum nur dann als Beweise gelten können, wenn die Beweise und das mit den Begründungen verbundene neue inhaltliche Wissen „öffentlich“ von den Schülerinnen und Schülern anerkannt wird.

Schon vor 35 Jahren wurde von Manin (1977) die Bedeutung der sozialen Dimension mathematischer Beweise hervorgehoben.

„A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof.“ (Manin, 1977, S. 48)

Grundannahme einer solchen Formulierung, die nach Reid und Knipping (2010) aus einer als soziokonstruktivistisch bezeichneten Forschungsperspektive hervorgeht, ist, dass mathematisches Wissen allgemein als sozial konstruiert aufgefasst wird. So werden neue Regeln und Methoden (dazu gehört auch die deduktive Methode bei Beweisen) nicht als gegeben, absolut oder unfehlbar angesehen. Stattdessen werden diese innerhalb einer sozialen Gemeinschaft ausgehandelt und können damit auch in verschiedenen mathematischen Gemeinschaften variieren. Die Aushandlung über die Akzeptanz von Regeln und eben auch Beweisen spielt damit eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung und Akzeptanz von neuem mathematischem Wissen. Aus einer ähnlichen Perspektive argumentieren Hanna und Jahnke (1996) oder auch Ernest (1991), wenn sie

die deduktive Methode an sich als sozial konstruiert ansehen. Dadurch variiert von Gemeinschaft zu Gemeinschaft, was als gültiges deduktives Argument akzeptiert wird. Dennoch werden das Kriterium der deduktiven Folgerung und die Korrektheit eines logischen Schlusses für einen Beweis aus einer mathematischen Perspektive heraus nicht in Frage gestellt, auch wenn diese Begriffe in verschiedenen Gemeinschaften unterschiedlich interpretiert werden.

Reid und Knipping (2010) zufolge finden sich in den späteren Artikeln von Balacheff (nach 1990) ebenfalls Hinweise auf eine solche soziokonstruktivistische Perspektive auf Mathematik und auf mathematische Beweise. So betont Balacheff (1991) beispielsweise, dass er Lernen als sozialen Prozess und Mathematik als sozial konstruiertes Wissen auffasst. Für ihn bildet eine Klasse in der Schule eine soziale Gemeinschaft, in der gemeinsames Wissen ausgehandelt wird. Er differenziert in diesem Zusammenhang jedoch zwischen Beweisen („*preuve*“), die einen diskursiven Charakter haben und die Wahrheit einer Vermutung aufzeigen sollen, und mathematischen Beweisen („*démonstration*“), die in seiner Theorie deduktiv und semiformal (korrekt) sein müssen.

Gegensätzliche Sichtweisen auf Mathematik und mathematische Beweise (wie eine formal-deduktive oder eine soziokonstruktivistische) können Auswirkungen auf die Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht haben. Nach Wittmann und Müller (1988) zeigt sich das Bild von Mathematik und Beweisen im Bild von Mathematikunterricht, indem die Sichtweise auf mathematische Beweise Entscheidungen der Lehrpersonen beeinflusst. Analog hierzu geht Hersh (1993) davon aus, dass eine Person, die ein sehr formales Beweisverständnis hat und als Hauptaufgabe von Beweisen die Verifikation ansieht, eher kurze formale Beweise für den Unterricht auswählt. Im Gegensatz dazu werden Lehrpersonen, die speziell mathematisches Verständnis bei den Schülerinnen und Schülern fördern wollen, beispielsweise inhaltlich-anschauliche Beweise im Mathematikunterricht behandeln. Wittmann und Müller (1988) wiederum verweisen in ihrem Beitrag darauf, dass ein formalistisches Beweisverständnis zum Teil hinderlich für die Entwicklung eines für den sozialen Kontext angemessenen Beweisverständnisses sein kann. Sie belegen diese These anhand von vier Beispielen, die sie empirischen Beobachtungen von Lehramtsstudierenden entnommen haben.

Die beschriebene soziale Dimension von mathematischen Beweisen und eine soziokonstruktivistische Sichtweise auf mathematische Beweise werden in dem entwickelten und erprobten Designexperiment in dieser Arbeit berücksichtigt (für Details siehe Kapitel 4). So werden den Schülerinnen und Schülern keine Kriterien für mathematische Beweise durch die Lehrperson vorgegeben, sondern diese werden innerhalb jeder Klasse bzw. jedes Kurses ausgehandelt. Damit orientiert sich der Gedankengang am Prozesscharakter mathematischer Beweise, jedoch ohne dass völlig neue Kriterien für mathematische Beweise entwickelt werden. Auch wird kritisch über eigenständig angefertigte Beweise der Schülerinnen und Schüler diskutiert und die Frage aufgeworfen, ob diese Beweise so akzeptiert werden können oder modifiziert werden müssen. Hierbei gilt die Annahme, dass die Lehrpersonen als Experten diese Kriterien beeinflussen, indem sie diese Phase lenken und eine Brücke schlagen zwischen Kriterien aus der Fachwissenschaft (z.B. Allgemeingültigkeit, Deduktivität und logische Struktur) und den genannten Kriterien der Schülerinnen und Schüler. Gleichzeitig beeinflussen die Lehrpersonen durch die Fokussierung auf bestimmte Aspekte in den prototypischen Schülerbeweisen die entwickelten Kriterien.

Einen weiteren zentralen Aspekt bilden die Funktionen, die Beweise im Unterricht übernehmen können. Nach Hersh liegt in der mathematischen Forschung die Rolle von Beweisen hauptsächlich im Bereich der Überzeugungsfunktion, in der Schule hingegen ist die Erklärungsfunktion wichtiger, da hierdurch das mathematische Verständnis gefördert werden kann.

„Mathematical proof can convince, and it can explain. In mathematical research, its primary role is convincing. At the high-school or undergraduate level, its primary role is explaining.“ (Hersh, 1993, S. 398)

Diese Differenzierung findet sich ebenfalls bei Hanna (1996), die folgende Unterscheidung trifft: „Beweise, die beweisen“ und „Beweise, die erklären“. Besonders auf die letztgenannten sollte ihrer Ansicht nach im Mathematikunterricht vermehrt eingegangen werden. Zugleich betont Hanna (1996), dass neben inhaltlichen Erklärungen auch deduktive Beweise thematisiert werden sollten, auch wenn diese für Anfänger vielleicht „unnatürlich und schwierig“ erscheinen, da sie beiden Aspekten eine Bedeutung für den Unterricht beimisst.

Im folgenden Abschnitt werden die verschiedenen Funktionen von mathematischen Beweisen detailliert beschrieben und deren unterschiedliche Bedeutung für den Mathematikunterricht herausgestellt. Dabei werden die Funktionen besonders vor dem Hintergrund einer soziokonstruktivistischen Sichtweise auf Beweise betrachtet und erläutert. Weiterhin wird im Abschnitt zur Beschreibung des Unterrichtskonzepts (siehe Kapitel 4) genauer darauf eingegangen, wie in dieser Arbeit die Vielzahl an Funktionen bei der Konzeption berücksichtigt wird.

2.2 Funktionen von mathematischen Beweisen und deren Bedeutung für den Unterricht

Wie schon in Kapitel 2.1 angerissen, hebt Hanna (1996) die Bedeutung hervor, Schülerinnen und Schülern die verschiedenen Funktionen von mathematischen Beweisen im Unterricht näher zu bringen. Bei Chazan (1993) etwa geben Lernende als Funktion von Beweisen ausschließlich die Verifikation einer Aussage an. Wie in Kapitel 6 zu den Beweisvorstellungen von Schülerinnen und Schülern beschrieben wird, scheinen Lernenden jedoch Beispiele für die Verifikation besser geeignet zu sein. Healy und Hoyles (1998) halten fest, dass Lehrpersonen in der Schule Beweise meist ausschließlich zur Verifikation einsetzen. Wenn jedoch durch eine breite Grundlage ein vertieftes Verständnis von mathematischen Beweisen gefördert und den Lernenden die vielfältige Bedeutung von Beweisen vermittelt werden soll, scheint es notwendig, Schülerinnen und Schülern weitere Funktionen von Beweisen wie die Erklärung, Systematisierung oder Kommunikation näher zu bringen.

In Bezug auf Funktionen von Beweisen wird in der mathematikdidaktischen Literatur häufig auf die folgende Auflistung von de Villiers (1990, 1991) verwiesen, die auf Bell (1976) zurückgeht und von de Villiers erweitert wurde:

- Verifikation
- Erklärung
- Entdeckung
- Systematisierung
- Kommunikation

- Intellektuelle Herausforderung

De Villiers beansprucht nicht, dass diese Auflistung von Funktionen vollständig ist, jedoch reflektiert diese Liste seiner Auffassung nach bereits die bekanntesten und wichtigsten Funktionen. Ähnlich wie Hanna kritisiert de Villiers, dass im traditionellen Unterricht die Rolle von Beweisen meist völlig ignoriert oder ausschließlich auf die Funktion der Verifikation beschränkt werde. Im Folgenden wird ein Überblick über die unterschiedlichen Funktionen von Beweisen gegeben, wobei besonders die Bedeutung der letztgenannten Funktionen für die Schule hervorgehoben wird.

2.2.1 Verifikation

Im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen wird meist zuerst die Funktion der Verifikation genannt. Dahinter verbirgt sich primär die Vorstellung, dass in einem Beweis von sicheren Annahmen ausgehend in einer logisch korrekten Kette auf eine korrekte Konklusion geschlossen wird und damit der Nachweis der Korrektheit bzw. Allgemeingültigkeit erbracht wird. Ziel dabei ist es, sich selbst von der Korrektheit der Aussage zu überzeugen und diese begründet kommunizieren zu können. In der Verifikationsfunktion zeigt sich eine eher traditionelle Sichtweise auf mathematische Beweise, die Problematik der Verifikation zeigt sich besonders beim Blick in die Fachwissenschaft Mathematik. So benötigen Mathematikerinnen und Mathematiker zum Teil Jahre und Jahrzehnte, um eine Idee für einen mathematischen Beweis zu entwickeln, nachdem sie schon längst von der Korrektheit der mathematischen Aussage überzeugt sind (de Villiers, 1990). Anderen Funktionen von Beweisen – etwa die Systematisierung und Kommunikation von Wissen – kommt in ihrer Praxis oftmals eine größere Bedeutung zu. Für die Fachwissenschaftlerinnen und Fachwissenschaftler liegt die Bedeutung von Beweisen nur bedingt in der Verifikationsfunktion. Eine ähnliche Problematik zeigt sich in der Schule: auch hier werden häufig Aussagen bewiesen, die zuvor im Unterricht bereits thematisiert wurden und deren Gültigkeit gegenüber den Schülerinnen und Schülern schon kommuniziert wurde (z.B. durch eine empirische Überprüfung). Der Verifikationsfunktion kann auch im Lehr-Lernprozess nur eine eingeschränkte Motivation zukommen. Weitere Funktionen müssen einen zentralen Stellenwert erhalten, damit Lernende die Bedeutung von Beweisen erfahren können und – ideal gedacht – eine

eigene Motivation entwickeln, sich mit mathematischen Beweisen zu befassen.

Wenn den Lernenden keine weitere Funktion von Beweisen an dieser Stelle von der Lehrperson transparent gemacht wird, fällt es ihnen wahrscheinlich schwer, in dieser Situation und auch im Weiteren einen Sinn im mathematischen Beweisen zu sehen. Während Hersh (1993) herausstellt, dass für die Überzeugung der Korrektheit einer mathematischen Aussage, besonders für Schülerinnen und Schüler, häufig die Betrachtung von Beispielen oder Spezialfällen genüge, reicht dies aus heutiger Perspektive nicht mehr aus. Vielmehr besteht die Notwendigkeit, die Vielzahl der Funktionen mathematischer Beweise zu vermitteln und hier die Anschlussfähigkeit an das Wissen der Schülerinnen und Schüler zu suchen.

An dieser Stelle lässt sich wiederum auf Hanna (2000) verweisen, die den Wert von „Beweisen, die erklären“ im Bereich Schule besonders hervorhebt. Im Zusammenhang mit der oben bereits thematisierten Theoriekonzeption betont Hanna (1996), dass Beweise zwei wichtige Funktionen für die Mathematik erfüllen sollen: einerseits als wichtige Methode zur Verifikation einer Aussage, andererseits zur Herausbildung von mathematischem Verständnis. Die wichtige Funktion der Erklärung von Beweisen wird im Folgenden genauer erläutert.

2.2.2 Erklärungsfunktion

Die Erklärungsfunktion von Beweisen erscheint besonders aus didaktischer Sicht als sehr wichtig, da sie die Möglichkeit bietet, ein tieferes Verständnis gegenüber einem mathematischen Sachverhalt zu entwickeln. So sind nach Hanna (1996) und auch de Villiers (1990) Beweise, die erklären, warum eine Aussage zutrifft, besonders in Situationen wichtig, in denen eine Aussage schon als „intuitiv richtig“ erscheint. Wie schon zuvor beschrieben ist dies ihrer Ansicht nach im mathematischen Unterricht wohl oft der Fall. Eine notwendige Voraussetzung für diese verstärkte Fokussierung auf erklärende Beweise ist die Fähigkeit auf Seiten der Lehrperson, das Erklärungspotential von Beweisen zu erkennen und solche Beweise entsprechend für den Unterricht auszuwählen. Daher sollte die Lehrperson die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler

bewusst auf den Erklärungsaspekt des Beweises legen. Wichtig in diesem Zusammenhang ist nach Hanna, dass nicht alle Beweise das Kriterium der Erklärung erfüllen, weshalb hier eine bewusste Auswahl für den Unterricht durch die Lehrperson getroffen werden sollte.

Ein Aspekt, der eng mit der Erklärungsfunktion verknüpft ist und eine wichtige Rolle spielt, ist das persönliche Verständnis des Beweises für den Adressaten. Auf diesen Gesichtspunkt wird später in dieser Arbeit in dem Ergebniskapitel zu den Kriterien für mathematische Beweise (siehe Kapitel 8) noch einmal eingegangen, da dies für eine Vielzahl von Schülerinnen und Schülern elementar wichtig ist.

2.2.3 Entdeckung

Unter der Entdeckungsfunktion des Beweises versteht man die Tatsache, dass durch das Suchen eines deduktiven Beweises in der Mathematik neue Sachverhalte und Ergebnisse ermittelt werden können. Hierbei kommt mathematischen Beweisen also die Funktion der Entdeckung neuer Sachverhalte zu. Kennzeichnend hierfür ist, dass der Beweis der Entdeckung vorausgeht und nicht, wie häufig in der Mathematik, die Sätze vor den Beweisen als Vermutungen aufgestellt werden. Somit beinhaltet der Beweisprozess die Funktion der Entdeckung, während sich die zuvor beschriebene Verifikations- und Erklärungsfunktion auf das Produkt, also den fertigen Beweis, bezieht.

Historisch belegt wird diese Funktion mathematischer Beweise bei Rav (1999) durch die Betrachtung von zwei historischen Analysen. So wurde in einem fehlerhaften Beweisansatz zur Goldbach-Vermutung von Jean Merlin eine neue Sieb-Methode entwickelt, die im Anschluss zu mehreren neuen Erkenntnissen/Ergebnissen in der Zahlentheorie führte. Damit findet sich die Bedeutung dieser Funktion ebenfalls in der Geschichte der Mathematik wieder. Im schulischen Unterricht scheint die Entdeckungsfunktion bisher eher eine untergeordnete Rolle zu spielen, da meist Beweise im Anschluss an empirische Überprüfungen einer Aussage durchgeführt bzw. als Möglichkeit der Verifikation behandelt werden.

2.2.4 Systematisierung

Unter der Systematisierungsfunktion von mathematischen Beweisen versteht de Villiers (1990) das Einordnen und Organisieren von mathematischen Ergebnissen in ein deduktives System von Axiomen, Konzepten und Theoremen. Durch das Behandeln von mathematischen Beweisen werden verschiedene Axiome und Sätze miteinander in Beziehung gesetzt. Ähnlich beschreibt Lakatos (1976), dass mathematische Beweise zum Teil Klarheit über Widersprüche liefern und zur Weiterentwicklung von Axiomen und Definitionen führen können.

Im Bereich der Schule ist diese Funktion nur eingeschränkt von Bedeutung, da die Mathematik dort nicht als deduktives System von Axiomen behandelt wird. Dennoch können durch Beweise Zusammenhänge nach dem Prinzip des lokalen Ordners (Holland, 1996) erkannt werden. Rav beschreibt die Funktion wie folgt:

„Think of proofs as a network of roads in a public transportation system and regard statements of theorems as bus stops; the site of the stops is just a matter of convenience.“ (Rav, 1999, S. 20)

Die Systematisierungsfunktion kann eine wichtige Rolle beim Aufbau mathematischen Wissens spielen, da das Einordnen und Strukturieren von neuen Erkenntnissen in schon vorhandene Wissensstrukturen bzw. die Veränderung / Anpassung dieser Wissensstrukturen für Lernprozesse von zentraler Bedeutung ist. Dies entspricht einem konstruktivistischen Verständnis vom Lernen als individueller Transformationsprozess.

2.2.5 Kommunikationsfunktion

Der Kommunikationsfunktion kommt in der mathematikdidaktischen Diskussion eine hohe Bedeutung zu. So verweist beispielsweise de Villiers (1990) auf Davis (1976), der schon vor einigen Jahrzehnten betonte, dass mathematische Beweise eine gute Möglichkeit bieten, die kritische Auseinandersetzung über mathematische Inhalte zwischen Lehrpersonen und Schülerinnen und Schülern zu führen.

Interessant sind hier die Ausführungen von Hanna (1989) und auch Balacheff (1991). Sie heben hervor, dass der soziale Prozess bei der Akzeptanz von Beweisen eine wichtige Rolle spielt, da Kriterien für die

Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen
Entwicklung und vergleichend empirische
Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der
Sekundarstufe
Grundey, S.
2015, XXVIII, 346 S. 19 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-08936-8