

2 Über die Nichtexistenz von Konfidenzbereichen und (lokal) gleichmäßig konsistenten Schätzern nach [Pfa98]

In diesem Abschnitt fassen wir den Artikel [Pfa98] zusammen. Dabei werden einige Beweise detaillierter dargestellt. Im Gegensatz zum Original stellt diese Zusammenfassung jedoch keine Verbindung zu den ursprünglichen Ergebnissen her. Außerdem werden einige Bemerkungen sowie der gesamte Abschnitt 5 nicht behandelt.

Im Folgenden sei stets $\mathcal{P}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Identifizieren wir $\mathcal{P}$ mit der Selbstparametrisierung $(P : P \in \mathcal{P})$, so sind alle statistischen Begriffe, gemäß Abschnitt 1 mit $n = 1$, erklärt. Ein Spezialfall ist das Modell unabhängig identisch verteilter Beobachtungen $(P^{\otimes n} : P^{\otimes n} \in \mathcal{P}^n)$ auf dem Messraum $(\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^{\otimes n})$.

2.1 Übersicht

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, können sowohl lokale als auch globale Eigenschaften von κ für die Nichtexistenz „möglichst kleiner“ Konfidenzbereiche verantwortlich sein.

In Abschnitt 2.3 betrachten wir die lokalen Eigenschaften. Falls κ gewisse lokale Eigenschaften bei einem Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 aufweist, wird die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* $P(\kappa(P) \in C)$ für Wahrscheinlichkeitsmaße P beliebig nahe bei P_0 notwendigerweise klein. Ein erwünschtes effektives Konfidenzniveau kann also wegen diesen lokalen Eigenschaften nicht realisiert werden. Solche Eigenschaften sind, etwas unpräzise ausgedrückt, die Unstetigkeit von κ bei P_0 oder die Existenz einer Extremstelle bei P_0 . Eine weitere Folgerung ist die Nichtexistenz einer lokal gleichmäßig konsistenten Folge von Schätzern.

In Abschnitt 2.4 wenden wir die Resultate aus Abschnitt 2.3 auf verschiedene Beispiele an. Abschnitt 2.5 beschäftigt sich schließlich mit globalen Eigenschaften von κ . Wir werden sehen, dass für nicht gleichmäßig stetige Funktionale ein effektives Konfidenzniveau γ nahe bei 1 u. U. nicht realisierbar ist. Analog zu Abschnitt 2.3 folgern wir die Nichtexistenz einer gleichmäßig konsistenten Folge von Schätzern.

2.2 Definitionen und vorbereitende Ergebnisse

Im weiteren Verlauf benötigen wir $C(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ sowie die $\mathcal{A}$ -Messbarkeit der Funktionen $\inf C$ und $\sup C$. Um dies zu erhalten, nehmen wir

$$\{(x, r) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : r \in C(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (1)$$

an. Damit folgt direkt $C(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da $C(x)$ als Schnitt einer messbaren Menge ebenfalls messbar ist. Wir bemerken, dass (1) immer erfüllt ist, falls $C(x)$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ ein Intervall mit messbaren Grenzen ist. Um die Messbarkeit der Funktionen $\inf C$ und $\sup C$ zu erhalten, müssen wir neben (1) noch $\mathcal{A} = \mathcal{A}_*$ annehmen.⁴ Dies soll hier jedoch nicht weiter ausgeführt werden

⁴Mit $\mathcal{A}_*$ bezeichnen wir die σ -Algebra der universell messbaren Mengen.

und wir verweisen stattdessen auf [Pfa98, S. 10].

Definition: Für Wahrscheinlichkeitsmaße P, Q und P_0 auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir

- i) $d(P, Q) := \sup\{|P(A) - Q(A)| : A \in \mathcal{A}\}$ (Totalvariationsabstand)
- ii) $\mathcal{P}_\varepsilon(P_0) := \{P \in \mathcal{P} : d(P, P_0) < \varepsilon\}$
- iii) $K_\varepsilon(P_0) := \kappa(\mathcal{P}_\varepsilon(P_0))$
- iv) $K(P_0) := \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon(P_0)$
- v) $\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) := \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{P \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)} P(\kappa(P) \in C)$ (effektives Konfidenzniveau bei P_0)

Dabei muss P_0 nicht notwendig in $\mathcal{P}$ liegen, der Fall $\mathcal{P}_\varepsilon(P_0) = \emptyset$ ist daher möglich.⁵ In diesem Fall werden Infima wie oben in v) oder unten in (2) gleich 1 gesetzt; für Infima und Suprema, die sich auf den Raum $\mathbb{R}$ beziehen, setzen wir in üblicher Weise $\inf \emptyset = \infty$ und $\sup \emptyset = -\infty$. $\square$

Wir geben nun obere Schranken für das effektive Konfidenzniveau bei P_0 (Niveau bei P_0) an.

2.1 Lemma: Für $P \in \mathcal{P}$ und jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P_0 auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ gilt

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \quad (2)$$

$$\leq \min\{P_0(\inf_{\varepsilon > 0} C \leq \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C)), P_0(\sup C \geq \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C))\}. \quad (3)$$

Beweis: Der uninteressante Fall $\mathcal{P}_\varepsilon(P_0) = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$ ist klar. Wir nehmen daher $\mathcal{P}_\varepsilon(P_0) \neq \emptyset$ für jedes $\varepsilon > 0$ an. Es sei $\delta > 0$ beliebig und $\varepsilon \in]0, \delta]$. Für $P \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(r \in C) < \delta + P_0(r \in C).$$

Folglich gilt für $\bar{P} \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)} P(\kappa(P) \in C) \leq \bar{P}(\kappa(\bar{P}) \in C) < \delta + P_0(\kappa(\bar{P}) \in C).$$

Da $r := \kappa(\bar{P}) \in K_\varepsilon(P_0)$ wegen der beliebigen Wahl von $\bar{P}$ beliebig ist, gilt

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)} P(\kappa(P) \in C) \leq \delta + \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C).$$

Mittels Supremumsbildung folgt

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq \delta + \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C)$$

und somit (2), da $\delta > 0$ beliebig.

⁵Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die leere Menge.

Um (3) zu zeigen, setzen wir $\underline{\kappa}(x) := \inf C(x)$. Wegen der Teilmengenbeziehung $C(x) \subseteq [\underline{\kappa}(x), \infty[$ gilt für $\varepsilon > 0$

$$\inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \leq \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(\underline{\kappa} \leq r) = P_0(\underline{\kappa} \leq \inf K_\varepsilon(P_0)),$$

wobei zur Verifizierung der Gleichung die Ungleichung „ $\geq$ “ trivial ist und die Ungleichung „ $\leq$ “ mittels Betrachtung einer fallenden Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $K_\varepsilon(P_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \inf K_\varepsilon(P_0)$ und der Stetigkeit von oben gezeigt werden kann. Anwendung von $\sup_{\varepsilon > 0}$ auf beiden Seiten liefert mit der Stetigkeit von unten die erste Ungleichung in (3). Die zweite Ungleichung kann analog gezeigt werden. $\square$

Als erste Folgerung von Lem. 2.1 erhalten wir die folgende Proposition.

2.2 Proposition: Es seien $P \in \mathcal{P}$, P_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, μ ein σ -endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $K_\varepsilon(P_0) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mu(K(P_0)) \liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq \int \mu(K(P_0) \cap C(x)) dP_0(x) \quad (4)$$

und somit

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) = 0, \quad \text{falls} \quad \mu(K(P_0)) = \infty \quad \text{und} \quad \int \mu(K(P_0) \cap C(x)) dP_0(x) < \infty. \quad (5)$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ und $s \in K_\varepsilon(P_0)$ gilt

$$\inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \leq P_0(s \in C) = \int (s \in C(x)) dP_0(x).$$

Mittels μ -Integration über $r \in K_\varepsilon(P_0)$ und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\mu(K_\varepsilon(P_0)) \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \leq \int \int_{K_\varepsilon(P_0)} (s \in C(x)) d\mu(s) dP_0(x).$$

Die Beziehung $K(P_0) \subseteq K_\varepsilon(P_0)$ liefert

$$\mu(K(P_0)) \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \leq \int \mu(K_\varepsilon(P_0) \cap C(x)) dP_0(x).$$

Da die linke Seite fallend, die rechte Seite wachsend in ε ist, erhalten wir mittels Grenzwertbildung ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\mu(K(P_0)) \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mu(K_\varepsilon(P_0) \cap C(x)) dP_0(x) = \int \mu(K(P_0) \cap C(x)) dP_0(x).$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus Grenzwertvertauschung und Stetigkeit von oben. Dabei wird die Grenzwertvertauschung durch die folgende Überlegung gerechtfertigt: Da μ ein σ -endliches Maß ist, existiert eine Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \mathbb{R}$ und $\mu(B_k) < \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Mit dem endlichen Maß $\mu_n := \mu(\cdot \cap \bigcup_{k=1}^n B_k)$, $n \in \mathbb{N}$, statt μ gilt die Grenzwertvertauschung mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Anwendung von $\lim_{n \rightarrow \infty}$, Grenzwertvertauschung mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und Stetigkeit von unten liefern die Behauptung für μ .

Unter Verwendung von (2) erhalten wir schließlich (4). $\square$

2.3 Hauptergebnisse

In diesem Abschnitt werden weitere obere Schranken für das Niveau bei P_0 unter zusätzlichen Bedingungen an C und $K_\varepsilon(P_0)$ angegeben. Das erste Resultat bezieht sich auf Funktionale, die in jeder Umgebung von P_0 ihre größten bzw. kleinsten Werte annehmen.

Definition: Der Konfidenzbereich C hat eine nichttriviale obere (untere) Schranke, falls $\sup C < \sup \kappa(\mathcal{P})$ ($\inf C > \inf \kappa(\mathcal{P})$) gilt. $\square$

2.3 Proposition: Es gelte $\sup K_\varepsilon(P_0) = \sup \kappa(\mathcal{P})$ ($\inf K_\varepsilon(P_0) = \inf \kappa(\mathcal{P})$) für jedes $\varepsilon > 0$ und C habe eine nichttriviale obere (untere) Schranke P_0 -f. s. Dann gilt

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) = 0.$$

Beweis: Nach der zweiten Ungleichung in (3) und der Voraussetzung gilt

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq P_0(\sup C \geq \inf_{\varepsilon > 0} \sup K_\varepsilon(P_0)) = P_0(\sup C \geq \inf_{\varepsilon > 0} \sup \kappa(\mathcal{P})).$$

Damit folgt die Behauptung, da $\sup C < \inf_{\varepsilon > 0} \sup \kappa(\mathcal{P})$ P_0 -f. s. gilt. Der Klammerfall kann analog mittels der ersten Ungleichung in (3) gezeigt werden. $\square$

Wir wenden nun Prop. 2.3 auf ein einfaches Beispiel an.

Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ seien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $\mathcal{P} = (N_{\mu,1}^{\otimes n} : \mu > 0)$, $P_0 = N_{0,1}^{\otimes n}$ und $\kappa(N_{\mu,1}^{\otimes n}) = \mu$. Dann gilt $\inf K_\varepsilon(P_0) = \inf \kappa(\mathcal{P}) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Nach Prop. 2.3 gibt es daher für das Schätzproblem $(\mathcal{P}, \kappa)$ keinen Konfidenzbereich C mit $\inf C > \inf \kappa(\mathcal{P})$ P_0 -f. s. $\square$

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\text{diam } B := \sup\{a - b : a, b \in B\}$ den Durchmesser einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$.

2.4 Proposition: Der Konfidenzbereich C sei gleichmäßig beschränkt, im Sinne von $t_0 := \sup_{x \in \mathcal{X}} \text{diam } C(x) < \infty$. Des Weiteren sei $P_0 \in \mathcal{P}$ und $K(P_0)$ ein Intervall mit $d_0 := \text{diam } K(P_0) > 2t_0$. Dann gilt

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq \frac{t_0}{\text{diam } K(P_0) - 2t_0} P_0(\kappa(P_0) \notin C). \quad (6)$$

Beweis: Der Fall „ $d_0 = \infty$ oder $t_0 = 0$ “ folgt aus der Anwendung von Prop. 2.2 mit μ gleich dem Lebesgue-Maß.

Im Folgenden nehmen wir daher $d_0 < \infty$ und $t_0 > 0$ an. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < d_0/t_0 \leq m+1$. Wir wählen $t > t_0$ derart, dass $d_0/t > m$ ist und definieren für $i \in \mathbb{Z}$

$$r_i := \kappa(P_0) + it \quad \text{und} \quad A_i := \{r_i \in C\}.$$

Wegen $t > t_0$ sind die Ereignisse A_i , $i \in \mathbb{Z}$, paarweise disjunkt und somit ist

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} P_0(A_i) \leq 1. \quad (7)$$

Da $K(P_0)$ ein Intervall der Länge d_0 und $m < d_0/t$ ist, enthält die Menge

$$I := \{i \in \mathbb{Z} : r_i \in K(P_0)\}$$

mindestens m , die Menge $I \setminus \{0\}$ somit mindestens $m - 1$ Elemente. Für $i \in I$ ist $r_i \in K(P_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon(P_0)$, also $r_i \in K_\varepsilon(P_0)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Folglich gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$P_0(A_i) \geq \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C), \quad i \in I$$

und somit

$$P_0(A_i) \geq \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{r \in K_\varepsilon(P_0)} P_0(r \in C), \quad i \in I.$$

Eine weitere Abschätzung mittels (2) liefert die Ungleichung

$$P_0(A_i) \geq \liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C), \quad i \in I,$$

die wiederum mit (7)

$$(m-1) \liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) \leq \sum_{i \in I, i \neq 0} P_0(A_i) \leq 1 - P_0(A_0) = P_0(r_0 \notin C)$$

impliziert. Unter Verwendung von $m-1 \geq d_0/t_0 - 2$ erhalten wir mittels Division die Behauptung. $\square$

Die in (6) angegebene Schranke für das Niveau bei P_0 ist interessant, falls $P_0(\kappa(P_0) \notin C)$ klein ist. Im folgenden Korollar werden die Ergebnisse für Konfidenzbereiche auf Schätzer übertragen.

2.5 Korollar: Es seien $P_0 \in \mathcal{P}$, $K(P_0)$ ein nicht-entartetes Intervall und $\hat{\kappa}_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine in P_0 konsistente Folge von Schätzern, d. h. die Folge erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P_0)| > \varepsilon) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist für $t < \frac{1}{4} \text{diam } K(P_0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \liminf_{P \rightarrow P_0} P^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P)| \leq t) = 0.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $\{P^{\otimes n} : P \in \mathcal{P}\}$ auf dem Produktraum $(\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^{\otimes n})$, das Funktional $\kappa_n(P^{\otimes n}) := \kappa(P)$ sowie das Konfidenzintervall⁶

$$C_n := [\hat{\kappa}_n - t, \hat{\kappa}_n + t], \quad t < \frac{1}{4} \text{diam } K(P_0)$$

⁶Das Funktional κ_n ist wohldefiniert, da $P \mapsto P^{\otimes n}$ injektiv ist.

und wenden Prop. 2.4 an. Mit $t_0 = \sup_{x \in \mathcal{X}^n} \text{diam } C_n(x) = 2t$ und der Einschränkung von t sind die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \liminf_{P \rightarrow P_0} P^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P)| \leq t) &= \liminf_{P \rightarrow P_0} P^{\otimes n}(\kappa(P) \in C_n) \\ &\leq \frac{t_0}{\text{diam } K(P_0) - 2t_0} P_0^{\otimes n}(\kappa(P_0) \notin C_n) \\ &= \frac{2t}{\text{diam } K(P_0) - 4t} P_0^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P_0)| > t). \end{aligned}$$

Wegen der Konsistenz von $\hat{\kappa}_n$ in P_0 strebt die rechte Seite gegen 0 für $n \rightarrow \infty$ und es folgt die Behauptung. $\square$

2.6 Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Kor. 2.5 existiert keine in P_0 lokal gleichmäßige konsistente Folge von Schätzern.*

Beweis: Um dies zu zeigen, nehmen wir die Existenz einer solchen Folge an, d. h. es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}_\delta(P_0)} P^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P)| > t) = 0 \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Mittels Komplementierung folgt aus Kor. 2.5 für jedes $t < \frac{1}{4} \text{diam } K(P_0)$

$$\begin{aligned} 1 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon > 0} P^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P)| > t) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{P \in \mathcal{P}_\delta(P_0)} P^{\otimes n}(|\hat{\kappa}_n - \kappa(P)| > t) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist der gewünschte Widerspruch. $\square$

2.4 Beispiele

In diesem Abschnitt wenden wir die Resultate aus Abschnitt 2.3 auf verschiedene Beispiele an. Jedes der drei Beispiele beinhaltet ein Schätzproblem $(\mathcal{P}, \kappa)$ mit einem unstetigen Funktional κ . Die Unstetigkeit wird zur Anwendung von Prop. 2.4 und Kor. 2.5 benötigt. Dies zeigen wir in dem „recht allgemeinen“ Beispiel 1. In den Beispielen 2 und 3, die Spezialfälle von Beispiel 1 sind, wenden wir zusätzlich Prop. 2.3 an. Es sei erwähnt, dass die Unstetigkeit zur Anwendung von Prop. 2.3 im Allgemeinen nicht benötigt wird. In den folgenden Beispielen sei stets $P_0 \in \mathcal{P}$.

Beispiel 1: Es sei $\mathcal{P}$ eine konvexe Menge, d. h. für $Q_0, Q_1 \in \mathcal{P}$ ist

$$Q_\vartheta := (1 - \vartheta)Q_0 + \vartheta Q_1 \in \mathcal{P}, \quad \vartheta \in [0, 1].$$

Die Konvexität von $\mathcal{P}$ impliziert die Konvexität von $\mathcal{P}_\varepsilon(P_0)$, da $d(Q_\vartheta, P_0) \leq \max\{d(Q_0, P_0), d(Q_1, P_0)\}$ ist. Wir betrachten nun ein Funktional κ mit den Eigenschaften:

i) κ ist unstetig in $Q_0 \in \mathcal{P}$

ii) $[0, 1] \ni \vartheta \mapsto \kappa(Q_\vartheta)$ ist stetig

Die Eigenschaft ii) impliziert, dass $\kappa(\mathcal{P})$, $K_\varepsilon(P_0)$ und $K(P_0)$ Intervalle sind. Ist zusätzlich P_0 eine Unstetigkeitsstelle von κ , so ist das Intervall $K(P_0)$ sogar nicht-entartet. Damit sind Prop. 2.4, Kor. 2.5 und Kor. 2.6 anwendbar, demnach kann im hier vorliegenden Rahmen beispielsweise eine in P_0 konsistente Folge von Schätzern niemals in P_0 lokal gleichmäßig konsistent sein. $\square$

Beispiel 2: Sei nun $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit positiver stetiger Lebesgue-Dichte und endlichem Erwartungswert, d. h. $\int |x| dP(x) < \infty$. Offenbar ist die Menge konvex, denn für $P, Q \in \mathcal{P}$ mit stetigen Lebesgue-Dichten $p, q > 0$ und $\vartheta \in [0, 1]$ hat

$$R := (1 - \vartheta)P + \vartheta Q$$

die positive stetige Lebesgue-Dichte

$$r := (1 - \vartheta)p + \vartheta q$$

und es gilt

$$\int |x| dR(x) = (1 - \vartheta) \int |x| dP(x) + \vartheta \int |x| dQ(x) < \infty.$$

Als interessierenden Parameter betrachten wir den Erwartungswert

$$\kappa(P) := \int x dP(x).$$

Es ist $\kappa(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$ und es gilt die Beziehung

$$\kappa((1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P) = (1 - \vartheta)\kappa(P_0) + \vartheta\kappa(P), \quad \vartheta \in [0, 1], \quad P \in \mathcal{P}. \quad (8)$$

Somit erhalten wir $K_\varepsilon(P_0) = \mathbb{R}$ für $\varepsilon > 0$, denn wegen $d((1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P, P_0) \leq \vartheta$ gilt $(1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P \in \mathcal{P}_\varepsilon(P_0)$ für $\varepsilon > \vartheta$. Das Funktional κ nimmt also in jeder beliebigen Umgebung von P_0 bereits alle möglichen Werte an. Es handelt sich daher um ein unstetiges Funktional. Die Eigenschaft i) ist also erfüllt. Außerdem sind die Voraussetzungen von Prop. 2.3, $\sup K_\varepsilon(P_0) = \sup \kappa(\mathcal{P})$ und $\inf K_\varepsilon(P_0) = \inf \kappa(\mathcal{P})$, erfüllt. Es gilt somit

$$\liminf_{P \rightarrow P_0} P(\kappa(P) \in C) = 0, \quad (9)$$

falls der Konfidenzbereich C eine nichttriviale obere oder untere Schranke P_0 -f. s. aufweist. Anders ausgedrückt gibt es keinen Konfidenzbereich zu einem positiven effektiven Konfidenzniveau bei P_0 mit nichttrivialen Schranken P_0 -f. s.

Neben i) ist auch ii) erfüllt. Dies folgt direkt aus Gleichung (8). Folglich erhalten wir die gleichen Resultate wie in Beispiel 1. $\square$

Das Resultat (9) impliziert $\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) = 0$ für einen Konfidenzbereich C mit einer nichttrivialen oberen oder unteren Schranke P_0 -f. s. Dies erhält man auch mit dem Resultat von Bahadur & Savage (vgl. Satz 3.1) angewandt auf Konfidenzbereiche. Das entsprechende Korollar findet man in [BS56, Cor. 3].

Beispiel 3: In diesem Beispiel sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit positiver stetiger Lebesgue-Dichte p , für die $\int p^2(x)dx < \infty$ gilt. Diese Menge ist konvex, denn mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2 und der Linearität des Integrals ist für $\vartheta \in [0, 1]$

$$\int r^2(x)dx = (1 - \vartheta)^2 \int p^2(x)dx + 2\vartheta(1 - \vartheta) \int p(x)q(x)dx + \vartheta^2 \int q^2(x)dx < \infty. \quad (10)$$

Dabei kann das zweite Integral in der Mitte mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abgeschätzt werden. Als interessierenden Parameter betrachten wir

$$\kappa(P) := \int p^2(x)dx.$$

Betrachten wir weiter für $\sigma \in]0, \infty[$ die Skalierung $\frac{1}{\sigma}p(x/\sigma)$, erhalten wir mittels Substitution $\frac{1}{\sigma^2} \int p^2(x/\sigma)dx = \frac{1}{\sigma} \int p^2(x)dx$ und somit $\kappa(P) =]0, \infty[$. Analog zu (10) mit anderen Bezeichnungen gilt für $\vartheta \in [0, 1]$

$$\kappa((1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P) = (1 - \vartheta)^2 \kappa(P_0) + 2\vartheta(1 - \vartheta) \int p_0(x)p(x)dx + \vartheta^2 \kappa(P). \quad (11)$$

Aus (11) und $\kappa(P) =]0, \infty[$ folgt

$$\sup\{\kappa((1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P) : P \in \mathcal{P}\} = \sup \kappa(P), \quad \vartheta \in [0, 1].$$

Wegen $d((1 - \vartheta)P_0 + \vartheta P, P_0) \leq \vartheta$ impliziert dies

$$\sup K_\varepsilon(P_0) = \sup \mathcal{P}, \quad \varepsilon > 0,$$

und mit Prop. 2.3 schließlich (9), falls der Konfidenzbereich eine nichttriviale obere Schranke P_0 -f. s. hat. Für das Schätzproblem $(\mathcal{P}, \kappa)$ gibt es keinen Konfidenzbereich zu einem positiven effektiven Konfidenzniveau bei P_0 mit nichttrivialer oberer Schranke P_0 -f. s.

Wir zeigen nun, dass das vorliegende Beispiel ein Spezialfall von Beispiel 1 ist. Da $\mathcal{P}$ konvex ist, müssen wir nur die geforderten Eigenschaften des Funktional κ verifizieren. Zunächst weisen wir die Unstetigkeit nach und betrachten dazu eine Folge von Dreiecksverteilungen mit Lebesgue-Dichten

$$g_m(x) := \begin{cases} m^4 x + m^2, & x \in [-1/m^2, 0], \\ -m^4 x + m^2, & x \in]0, 1/m^2], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad m \in \mathbb{N},$$

und konstruieren eine weitere Folge $(P_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ mit Lebesgue-Dichten⁷

$$f_m := \frac{m-1}{m} \varphi + \frac{1}{m} g_m, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Damit ist $(P_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$ eine Folge in $\mathcal{P}$ und wegen

$$f_m \rightarrow \varphi \quad \text{f. s.,} \quad m \rightarrow \infty,$$

⁷Mit φ bezeichnen wir in diesem Beispiel die Dichte der Standardnormalverteilung.

gilt

$$d(P_m, N_{0,1}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Mit

$$\int g_m^2(x) dx = \frac{2}{3} m^2 \quad \text{und} \quad \int \varphi(x) g_m(x) dx \rightarrow \varphi(0), \quad m \rightarrow \infty,$$

ist jedoch

$$\begin{aligned} \kappa(P_m) &= \int f_m^2(x) dx \\ &= \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \int \varphi^2(x) dx + \frac{2(m-1)}{m^2} \int \varphi(x) g_m(x) dx + \frac{1}{m^2} \int g_m^2(x) dx \\ &\rightarrow \int \varphi^2(x) dx + \frac{2}{3} \\ &\neq \kappa(N_{0,1}), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit ist die Unstetigkeit von κ gezeigt. Die Eigenschaft ii) folgt direkt aus (11) und die Resultate aus Beispiel 1 sind somit verwendbar. Ist also P_0 eine Unstetigkeitsstelle von κ , kann eine in P_0 konsistente Folge von Schätzern niemals in P_0 lokal gleichmäßig konsistent sein. $\square$

2.5 Globale Grenzen

In diesem Abschnitt leiten wir obere Schranken für das effektive Niveau $\gamma = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C)$ her. Die Ungleichung in Prop. 2.8 ist dabei lediglich für nicht gleichmäßig stetige Funktionale aussagekräftig. Für solche Funktionale existiert u. U. kein gleichmäßig beschränkter Konfidenzbereich (d. h. $\sup_{x \in \mathcal{X}} \text{diam } C(x) < \infty$) mit effektivem Niveau γ , das nahe bei 1 liegt. In einem abschließenden Beispiel werden wir sehen, dass sogar $\gamma = 0$ auftreten kann. Die folgenden Resultate unterliegen der folgenden zusätzlichen Annahme.

Annahme: Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $P \in \mathcal{P}$ sei $K_\varepsilon(P)$ ein Intervall.

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$D_\varepsilon := \{\kappa(P) - \kappa(Q) : P, Q \in \mathcal{P}, \kappa(P) \geq \kappa(Q), d(P, Q) < \varepsilon\}$$

und

$$D := \bigcap_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$D_\varepsilon = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} (K_\varepsilon(P) - \kappa(P)) \cap [0, \infty[\quad (12)$$

gilt. Mit der obigen Annahme impliziert diese Darstellung, dass die Mengen D_ε und somit die Menge D Intervalle sind, die 0 enthalten. Dabei ist D genau dann nicht-entartet, d. h. $D \neq \{0\}$, wenn κ nicht gleichmäßig stetig ist.

2.7 Lemma: Für jedes $P \in \mathcal{P}$ und $\varepsilon > 0$ sei $K_\varepsilon(P)$ ein Intervall. Dann gilt

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{r \in [0, s]} P(r \in C - \kappa(P)), \quad s \in D.$$

Beweis: Für $s \in D$ und $\varepsilon > 0$ ist $s \in D_\varepsilon$. Nach (12) existiert somit ein $Q_{s, \varepsilon} \in \mathcal{P}$ mit $s \in K_\varepsilon(Q_{s, \varepsilon}) - \kappa(Q_{s, \varepsilon})$. Da $K_\varepsilon(Q_{s, \varepsilon}) - \kappa(Q_{s, \varepsilon})$ ein Intervall ist, das 0 und s enthält, gilt $r \in K_\varepsilon(Q_{s, \varepsilon}) - \kappa(Q_{s, \varepsilon})$ für jedes $r \in [0, s]$. Somit existiert für $r \in [0, s]$ ein $P_{r, \varepsilon} \in \mathcal{P}_\varepsilon(Q_{s, \varepsilon})$ mit $\kappa(P_{r, \varepsilon}) - \kappa(Q_{s, \varepsilon}) = r$. Damit erhalten wir

$$P_{r, \varepsilon}(\kappa(P_{r, \varepsilon}) \in C) \leq \varepsilon + Q_{s, \varepsilon}(\kappa(P_{r, \varepsilon}) \in C) = \varepsilon + Q_{s, \varepsilon}(r \in C - \kappa(Q_{s, \varepsilon})), \quad r \in [0, s]$$

und folglich

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) \leq \varepsilon + \inf_{r \in [0, s]} Q_{s, \varepsilon}(r \in C - \kappa(Q_{s, \varepsilon})).$$

Mittels einer Abschätzung der rechten Seite folgt

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) \leq \varepsilon + \sup_{P \in \mathcal{P}} \inf_{r \in [0, s]} P(r \in C - \kappa(P))$$

und somit die Behauptung, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war. □

2.8 Proposition: Mit den Voraussetzungen aus Lemma 2.7 gilt⁸

$$\lambda(D) \inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} \int \lambda(C(x)) dP(x)$$

und somit

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) = 0, \quad \text{falls } \lambda(D) = \infty \quad \text{und} \quad \sup_{P \in \mathcal{P}} \int \lambda(C(x)) dP(x) < \infty. \quad (13)$$

Wir bemerken noch, dass obige Ungleichung im Fall $\lambda(D) = 0$ keine Aussage über das effektive Konfidenzniveau zulässt. Der interessante Fall $\lambda(D) > 0$ liegt vor, falls κ ein nicht gleichmäßig stetiges Funktional ist.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ und $s \in D$ existiert nach Lem. 2.7 ein $P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ mit

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) - \varepsilon \leq \inf_{r \in [0, s]} P_\varepsilon(r \in C - \kappa(P_\varepsilon))$$

und folglich

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\kappa(P) \in C) - \varepsilon \leq P_\varepsilon(r \in C - \kappa(P_\varepsilon)), \quad r \in [0, s].$$

⁸Mit λ bezeichnen wir in Prop. 2.8 und im anschließenden Beispiel das Lebesgue-Maß.

Zur Robustheit von Konfidenzbereichen und Tests für
Erwartungswerte

Mees, A.

2015, XI, 36 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-09033-3