Theoretische Analyse 2

Die theoretische Analyse der Komponenten des erfindungsgemäßen faseroptischen Stromsensors hat deren Dimensionierung zum Ziel. Dazu werden die Komponenten einzeln betrachtet und zwar in der Reihenfolge, dass vorherige Dimensionierungen in nachfolgende einfließen können.

2.1 Spulen

2.1.1 Parametergleichungen

a) Magnetische Leitwerte

Ausgehend von Abb. 1.5 ergibt sich zunächst für den differenziellen magnetischen Leitwert im Messwertkreis durch „Homogenität im Kleinen“:

$$d\,G_{m2} = \frac{\mu_o\, dA_\perp}{2\pi r}; \quad dA_\perp = a dr \tag{2.1}$$

und damit das Integral

$$G_{m2} = \frac{\mu_o\, a}{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} \tag{2.2}$$

$$\underline{\underline{G_{m2} = \frac{\mu_o\, a}{2\pi}\, \ell n \frac{r_a}{r_i}}} \tag{2.3}$$

R. Thiele, *Design eines Faraday-Effekt-Stromsensors,* essentials,
DOI 10.1007/978-3-658-10098-8_2

Im Messgrößenkreis erhalten wir analog, mit c als Länge der Stromschiene und der Breite $R_a - R_i$ der Leiterschleife, den magnetischen Leitwert

$$dG_{m1} = \frac{\mu_o \, dA_\perp}{2\pi r}, \quad dA_\perp = c\,dr \tag{2.4}$$

$$\rightarrow \quad G_{m1} = \frac{\mu_o \, c}{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{dr}{r} \tag{2.5}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{G_{m1} = \frac{\mu_o \, c}{2\pi} \ell n \frac{R_a}{R_i}}} \tag{2.6}$$

b) Gegeninduktivität

Die Gegeninduktivitäten M_{12} und M_{21} zwischen den Stromkreisen 2 und 1 bzw. 1 und 2 (mit „1“ Messgrößenkreis und „2“ Messwertkreis) leitet man wie folgt her:

M_{12}: Durchflutung: $$\Theta_2 = M_0 \, I_2 \tag{2.7}$$

magnetischer Fluss: $$\Phi_2 = G_{m2} \, \Theta_2 \tag{2.8}$$

$$\Phi_2 = G_{m2} \, M_0 \, I_2 \tag{2.9}$$

primärer Hauptfluss: $$\Phi_{12} = k_2 \, \Phi_2 \tag{2.10}$$

$$\Phi_{12} = k_2 \, G_{m2} \, M_0 \, I_2 \tag{2.11}$$

Koppelfaktor: $$k_2 \approx 1 \tag{2.12}$$

verketteter Fluss: $$\Psi_{12} = M \, \Phi_{12}, \quad M = 1 \tag{2.13}$$

$$\Psi_{12} = M_0 \, G_{m2} \, I_2 \tag{2.14}$$

$$\Psi_{12} = M_{12} \, I_2 \tag{2.15}$$

Gegeninduktivität: $$M_{12} = M_0 \, G_{m2} \tag{2.16}$$

$$\underline{\underline{M_{12} = \frac{\mu_0 \, a \, M_0}{2\pi} \ell n \frac{r_a}{r_i}}} \tag{2.17}$$

M_{21}: Durchflutung: $$\Theta_1 = M\, I_1 \tag{2.18}$$

magnetischer Fluss: $$\Phi_1 = G_{m1}\, \Theta_1 \tag{2.19}$$

$$\Phi_1 = M\, G_{m1}\, I_1, \quad M = 1 \tag{2.20}$$

sekundärer Hauptfluss: $$\Phi_{21} = k_1\, \Phi_1\, I_1 \tag{2.21}$$

$$\Phi_{21} = k_1\, G_{m1}\, I_1 \tag{2.22}$$

$$\Phi_{21} = G_{m2}\, M_0\, I_2 \tag{2.23}$$

Messwert: $$I_2 = \frac{I_1}{M_0} = ü\, I_1 \tag{2.24}$$

Übersetzungsverhältnis: $$ü = \frac{1}{M_0} \tag{2.25}$$

Koppelfaktor: $$k_1 = \frac{G_{m2}}{G_{m1}} \tag{2.26}$$

$$k_1 = \frac{a}{c} \cdot \frac{\ell n \frac{r_a}{r_i}}{\ell n \frac{R_a}{R_i}} \tag{2.27}$$

verketteterFluss: $$\Psi_{21} = M_0\, \Phi_{21} \tag{2.28}$$

$$\Psi_{21} = M_0\, G_{m2}\, I_1 \tag{2.29}$$

$$\Psi_{21} = M_{21}\, I_1 \tag{2.30}$$

Gegeninduktivität: $$M_{21} = M_0\, G_{m2} \tag{2.31}$$

$$\underline{\underline{M_{21} = \frac{\mu_0\, a M_0}{2\pi}\, \ell n \frac{r_a}{r_i}}} \tag{2.32}$$

Damit erhalten wir die einheitliche Gegeninduktivität M (M hier nicht Windungszahl):

$$\underline{\underline{M = M_{12} = M_{21} = \frac{\pi_0\, a M_0}{2\pi}\, \ell n \frac{r_a}{r_i}}} \tag{2.33}$$

c. (Selbst)-Induktivitäten

Für die Induktivitäten L_1 und L_2 der Stromkreise „1“ bzw. „2“ erhält man:

$$L_1 = M^2\, G_{m1} = G_{m1} \tag{2.34}$$

(hier: $M^2 = 1$)

$$\underline{\underline{L_1 = \frac{\mu_0\, c}{2\pi}\, \ell n\, \frac{R_a}{R_i}}} \tag{2.35}$$

$$L_2 = M_0^2\, G_{m2} \tag{2.36}$$

$$\underline{\underline{L_2 = \frac{\mu_0\, a\, M_0^2}{2\pi}\, \ell n\, \frac{r_a}{r_i}}} \tag{2.37}$$

2.1.2 Dimensionierungsbeispiel

a) Ermittlung der Verdet-Konstanten

Zur Bestimmung der Gegeninduktivität M und der (Selbst-) Induktivitäten L_1 und L_2 benötigt man die Windungszahl M_0, die mit der gleichgewählten Windungszahl N_0 der LWL-Spulen im Zusammenhang steht. Realisiert wurde $M_0 = N_0 = 1675$.

Auf diese Weise wird der „optische“ Arbeitspunkt, gegeben durch die konstante Faraday-Drehung der Faraday-Rotator-Mirrors von $\frac{\pi}{2}$, eingestellt. Dadurch sichert man, dass sich ein Arbeitspunkt des Photostromes der Photodiode von $I_{phA} \neq 0$ bei ausreichender Empfindlichkeit ergibt, der aber nicht auf die Integratoren wirkt.

Dann wurde eine Probespule mit den Windungszahlen $N_0 = M_0 = 1675$ gebaut, um die Verdet-Konstante V wie folgt zu ermitteln:

Gegeben:	$N_0 = M_0 = 1675$
Messstrom:	$I = 0{,}4\,A$
Gemessen:	Faraday-Drehung: $\alpha = 8^o$
Gesucht:	$\tilde{V}$, V
Lösung:	

Verdet – Konstante in ^{o}/A:
$$\underline{\underline{\tilde{V}}} = \frac{\alpha}{N_0\, M_0\, I} = \underline{\underline{7{,}13 \cdot 10^{-6}\ {}^o/A}}$$

Verdet – KonstanteimBogenmaβ/A:
$$V = \frac{\pi}{180}\, \tilde{V} = \underline{\underline{1{,}247 \cdot 10^{-7}\ A^{-1}}}$$

b) Messung der Kupferwiderstände

im Messgrößenkreis: $R_{cu1} \approx 2\ \mathrm{m\Omega}$

im Messwertkreis: $\underline{\underline{R_{cu2} = R_{cu}}} = \underline{\underline{36{,}2\ \Omega}}$

c) Ermittlung der Induktivitäten

Gegeben: $M_0 = 1675, \qquad M = 1$

$2\,r_a = 335\ \mathrm{mm}, \quad 2\,r_i = 295\ \mathrm{mm}$

$a \approx 260\ \mathrm{mm}, \quad c = 1{,}2\ \mathrm{m}$

$2\,R_a = 2\ \mathrm{m}, \quad 2\,R_i = 30\ \mathrm{mm}$

$$\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

Gesucht: $M, L_1, L_2, ü, L_{\sigma 1}, L_{\sigma 2}$

Lösung:

Gegeninduktivität:

$$M = \frac{\mu_0\ a\,M_0}{2\,\pi}\ \ell n\ \frac{2\,r_a}{2\,r_i}$$

$$\underline{\underline{M = 11{,}32\ \mu\mathrm{H}}}$$

(Selbst–)Induktivitäten:

$$L_1 = \frac{\mu_0\ c}{2\pi}\ \ell n\ \frac{2\,R_a}{2\,R_i}$$

$$\underline{\underline{L_1 = 974\ \mathrm{nH}}}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0\ a\,M_0^2}{2\,\pi}\ \ell n\ \frac{2\,r_a}{2\,r_i}$$

$$\underline{\underline{L_2 = 18{,}96\ \mathrm{mH}}}$$

Übersetzungsverhältnis:

$$\underline{\underline{ü}} = \frac{M}{M_0} = \frac{1}{M_0} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-4}}}$$

Streuinduktivitäten: $L_{\sigma 1} = L_1 - uM$

- imMessgrö†enkreis: $\underline{\underline{L_{\sigma 1} = L_\sigma = 967{,}2\ \mathrm{nH}}}$
- im Messwertkreis: $L_{\sigma 2} = L_2 - \frac{1}{ü} M$

$$\underline{\underline{L_{\sigma 2} \approx 0}}$$

2.1.3 Messgrößen-Stromverlauf

Unser Sensor kann als optischer Transformator angesehen werden. Damit gelten die bekannten Transformator-Gleichungen in der Form

$$u_1 = R_{cu1}\, i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \tag{2.38}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} - R_{cu_2} i_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{2.39}$$

Mit $i_2 = ü\, i_1$ wird

$$u_1 = R_{cu2}\, i_1 + \underbrace{(L_1 - ü\, M)}_{=L_{\sigma 1}} \frac{di_1}{dt} \tag{2.40}$$

$$u_2 = -R_{cu2}\, i_2 - \underbrace{\left(L_2 - \frac{1}{ü} M\right)}_{=L_{\sigma 2} \approx 0} \frac{di_2}{dt} \tag{2.41}$$

bzw.

$$u_1 = R_{cu1}\, i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} \tag{2.42}$$

$$u_2 = -R_{cu2}\, i_2 \tag{2.43}$$

Nach der Umbenennung

$$u_1 = u, \quad i_1 = i, \quad R_{cu1} = R_{cu}, \quad L_1 = L, \quad L_{\sigma 1} = L_\sigma \tag{2.44}$$

gilt im Messgrößenkreis folgende DGL für die Messgröße i:

$$L_\sigma \frac{di}{dt} + R_{cu}\, i = u \tag{2.45}$$

Die Lösung dieser DGL erfolgt nun für eine reine 50 Hz-Wechselgröße als Störfunktion der Spannung

$$u = \hat{u} \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f = 314\, s^{-1} \tag{2.46}$$

und der Zeitkonstanten

$$T_\sigma = \frac{L_\sigma}{R_{cu}} \tag{2.47}$$

Somit gilt:

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{T_\sigma} = \frac{\hat{u}}{L_\sigma} \cos(\omega t) \tag{2.48}$$

Diese lineare DGL mit konstanten Koeffizienten hat die homogene Lösung

$$i_H = K_o \, e^{-\frac{t}{T_\sigma}} \tag{2.49}$$

und die partikuläre Lösung

$$i_p = \frac{\hat{u}}{R_{cu}} \cdot \frac{\cos(\omega t) + \omega T_\sigma \sin(\omega t)}{1 + (\omega T_\sigma)^2} \tag{2.50}$$

i ergibt sich aus der Überlagerung beider Lösungsanteile

$$i = i_p + i_H \tag{2.51}$$

Die Konstante K_0 erhält man aus der Anfangsbedingung

$$i(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad K_0 = -\frac{\hat{u}}{R_{cu}[1 + (\omega T_\sigma)^2]} \tag{2.52}$$

Nach elementaren Umformungen erhalten Sie die Lösung als Messgrößen-Stromverlauf (2.53).

$$\underline{\underline{i(t) \; = \; \hat{i} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\hat{i}}{\sqrt{1 + (\omega T_\sigma)^2}} \, e^{-\frac{t}{T_\sigma}}}} \tag{2.53}$$

mit

$$\hat{i} \; = \; \frac{\hat{u}}{R_{cu}\sqrt{1 + (\omega T_\sigma)^2}} \tag{2.54}$$

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tan}(\omega T_\sigma) \tag{2.55}$$

$$T_\sigma = \frac{L_\sigma}{R_{cu}} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi f = 314\ s^{-1} \tag{2.56}$$

2.1.4 Kompensation der Wirkung der Gegeninduktivität auf die Verfälschung des Messwertes

a. Herleitung der Dimensionierungsbedingungen

Wie nachfolgend gezeigt wird, verursacht die Gegeninduktivität M einen systematischen Fehler im Messwert, der sich durch die Lag-Glieder in Abb. 1.6 beseitigen lässt.

Ausgangspunkt ist die DGL (2.45), wobei L_σ jetzt ersetzt wird durch

$$L_\sigma = L - \ddot{u}M \tag{2.57}$$

Damit geht (2.45) über in

$$R_{cu}\, i + L\frac{di}{dt} = u + \ddot{u}M\frac{di}{dt} \tag{2.58}$$

Durch Laplace-Transformation von (2.58) erhalten wir bei verschwindendem Anfangswert von i mit der komplexen Frequenz s:

$$\underbrace{(R_{cu} + sL)\, I(s) = U(s)}_{\text{gewünscht}} + \underbrace{\ddot{u}\, sM\, I(s)}_{\text{unerwünscht}} \tag{2.59}$$

Für den Laplace-transformierten Messwert $I_{0\sim}(s)$ gilt, wie später gezeigt

$$I_{0\sim}(s) = \ddot{u}\, I(s) \tag{2.60}$$

und wenn noch die „gewünschte" Zeitkonstante

$$T = \frac{L}{R_{cu}} \tag{2.61}$$

eingeführt wird, ergibt sich aus (2.59) bis (2.61):

$$I_{0\sim}(s) = \underbrace{\frac{\ddot{u}\, U(s)}{R_{cu}(1+sT)}}_{\text{gewünscht}} \cdot \underbrace{\frac{1+sT}{1+sT_\sigma}}_{\substack{\text{unerwünscht}\\ \text{mit } T_\sigma < T}} \tag{2.62}$$

Das unerwünscht auftretende Lead-Glied mit $T_\sigma < T$ muss durch ein Lag-Glied mit reziproker Systemfunktion in Reihenschaltung kompensiert werden. Die Systemfunktion des Lag-Gliedes lautet also

$$G(s) = \frac{1 + sT_\sigma}{1 + sT} \tag{2.63}$$

und ist identisch mit der Systemfunktion der Lag-Glieder aus der Schaltung in Abb. 1.6, z. B.

$$G(s) = \frac{1 + s\,C_{20}\,R_{50}}{1 + s\,C_{20}(R_{40} + R_{50})} \tag{2.64}$$

Damit gelten die Dimensionierungsbedingungen

$$C_{20}\,R_{50} = T_\sigma \tag{2.65}$$

$$C_{20}\,(R_{40} + R_{50}) = T \tag{2.66}$$

b) Dimensionierung
b1) Berechnung der Zeitkonstanten

Gegeben: $L = 974\ \text{nH}, \quad L_\sigma = 976{,}2\ \text{nH}, \quad R_{cu} = 2\ \text{m}\Omega$

Gesucht: $T, \quad T_\sigma$

Lösung:

$$T = \frac{L}{R_{cu}} = \underline{\underline{0{,}487\ \text{ms}}}$$

$$\underline{\underline{T_\sigma}} = \frac{L_\sigma}{R_{cu}} = \underline{\underline{0{,}483\ \text{ms}}}$$

b2) Dimensionierung des Lag-Gliedes

Gegeben: $T = 0{,}487\ \text{ms}, \quad T_\sigma = 0{,}483\ \text{ms}$

Gesucht: $R_{40}, R_{50}, R_{41}, R_{51}, C_{20}, C_{21}$

Lösung:

$$\underline{\underline{\frac{R_{40}}{R_{50}}}} = \frac{T}{T_\sigma} - 1 = \underline{\underline{0{,}008}}$$

Wahl:

$$\underline{\underline{R_{50} = R_{51}}} = \underline{\underline{1\ \text{k}\Omega}}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{R_{40} = R_{41}}} = \underline{\underline{8\ \Omega}}$$

$$\rightarrow \quad C_{20} = C_{21} = \frac{T_\sigma}{R_{50}} = \underline{\underline{483\ \text{nF}}}$$

2.2 Verstärker

2.2.1 Parametergleichungen

Die Parametergleichungen der Verstärker werden am Beispiel des oberen Verstärkers in Abb. 1.6 hergeleitet.

Zur Abtrennung des Arbeitspunktstromes I_{1A} des Messwertes i_1 ist die Betriebsspannung U_- so festzulegen, dass am Emitter des Darlington-Transistors Nullpotential herrscht, wenn die Aussteuerung Null ist. Daraus folgt, auch aus Symmetriegründen

$$-U_- = R_{cu1}\, I_{1A} = U_+ \tag{2.67}$$

Weiterhin muss bei $u_{21} = 0$ und einem bekannten Diodenstrom I_{DA} gelten

$$-U_- = R_{31}\, I_{DA} \tag{2.68}$$

Für eine günstige Verstärkung von −100 gilt weiterhin

$$\frac{R_{21}}{R_{11}} = 100 \tag{2.69}$$

2.2.2 Dimensionierungsbeispiel

a. Dimensionierung der Widerstände

Gegeben: $I_{1A} = I_{0A} = 0{,}5\ \text{A}, \quad I_{DA} = 6\ \text{mA}, \quad R_{cu1} = R_{cu0} \approx 36\ \Omega$

Gesucht: $U_+ = -U_-, \quad R_{30} = R_{31}, \quad R_{20} = R_{21}, \quad R_{10} = R_{11}$

Lösung:

$$U_+ = -U_- = R_{cu0}\, I_{0A} = R_{cu1}\, I_{1A}$$

$$\underline{\underline{U_+ = -U_-}} = \underline{\underline{18\ \text{V}}}$$

$$R_{30} = R_{31} = \frac{U_+}{I_{DA}} = \frac{-U_-}{I_{DA}}$$

$$\underline{\underline{R_{30} = R_{31} = 3\ \text{k}\Omega}}$$

$$\frac{R_{20}}{R_{10}} = \frac{R_{21}}{R_{11}} = 100$$

Springer
http://www.springer.com/978-3-658-10097-1

Design eines Faraday-Effekt-Stromsensors
Thiele, R.
2015, X, 39 S. 10 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-10097-1