

1 Beweisen in Fachwissenschaft und Fachdidaktik

Es ist nicht weniger als eine wissenschaftliche Revolution, ein wirklicher und wahrhafter, bis heute bedeutender Paradigmenwechsel (vgl. KUHN 1976): Die Weiterentwicklung der babylonischen und ägyptischen Rechen- und Messkunst zu einer auf Axiomen und Definitionen ruhenden Mathematik stellt die *Geburtsstunde der Wissenschaften* dar. Ausschlaggebend für diese Entwicklung war der Blickwechsel von anschaulich korrekten Tatsachen zur Untersuchung und Hinterfragung der jeweiligen Ursachen, der Wechsel vom babylonischen Auge und der ägyptischen Hand zum griechischen Geist. Personifiziert wird diese Entwicklung durch EUKLID von Alexandria und sein um 300 v. Chr. verfasstes Jahrtausendwerk „Die Elemente“, in welchem EUKLID das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfasste und streng bewies. Einzigartig in der Geschichte der Mathematik und wegweisend für die gesamte Entwicklung der Wissenschaften. Zweifelsfrei eine bis heute hell strahlende Sternstunde der Menschheitsgeschichte.

Das folgende Kapitel beleuchtet den Begriff „Beweis“ aus historischer, fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Perspektive. Dazu wird zunächst der griechische Übergang vom Tatsachen- zum Ursachenblick unter besonderer Berücksichtigung EUKLIDS untersucht. Es folgt ein fachwissenschaftlicher Blick auf die innermathematische Bedeutung des Beweisens, bevor entsprechende mathematikdidaktische Diskussionen historisch aufgearbeitet und deren Entwicklungen bis zum heutigen Stand nachgezeichnet werden. Das Kapitel schließt ab mit einigen resultierenden Folgen für den heutigen Mathematikunterricht sowie einem knappen Überblick über die zurzeit herrschende Unterrichtspraxis.

1.1 EUKLID von Alexandria und die Mathematik der Antike

Die Ursprünge der Mathematik liegen im Dunkeln (vgl. MESCHKOWSKI 1961, 1). Vermutlich ist sie aus dem Bedürfnis des Menschen nach Orientierung in der Welt, infolge dessen immer allgemeinere Strukturen herausgearbeitet wurden, entstanden (vgl. POPP 1999, 4). Sicher ist, dass die menschliche Arbeit schon frühzeitig mathematische Elemente erhielt, etwa als Ornamente auf Waffen und Töpfereierzeugnissen, in der Herstellung von Rädern oder der Planung von Feldern und Bauwerken (vgl. WUBING/ARNOLD 1978, 9). Mathematik verdankt ihre Entstehung ganz handgreiflichen, praktischen Problemen und drängte sich aus der Anschauung alltäglicher Gegebenheiten förmlich auf: Der Ursprung des Wortes „Geometrie“ – lange Zeit synonym für Mathematik gebraucht – verrät es: Geometrie (griechisch-lateinisch *geometria* bzw. *geometres*) setzt sich zusammen aus *Geo-*, „Erde, Feld, Land“, und *-metrie* (*metron*), „Maß“. Geo-metrie bedeutet als soviel wie, die Erde vermessen. Bei fast allen Völkern hat sich mathematisches Denken in dieser Art und unabhängig voneinander herausgebildet. Nach geometrischen Plänen errichtete Megalithbauten wie „Stonehenge“ in Südengland und „Newgrange“ in der irischen Grafschaft Meath (vgl. Abb. 1), die beide um 3000 v. Chr. errichtet wurden, sind frühe Zeugen dieser Denkweise (vgl. NEUGE-

BAUER 1934), deren Weiterentwicklung die ersten Hochkulturen der Menschheit zu beträchtlichen mathematischen Kenntnissen führte (vgl. WUBING/ARNOLD 1978, 9).

Abbildung 1: Stonehenge (Grafschaft Wiltshire, Südengland) und Newgrange (Grafschaft Meath, Irland).



Eine umfassende Neuerung, eine durchschlagende Weiterentwicklung im mathematischen Denken – KANT sprach später von einer „Revolution der Denkart“ (KANT in SCHÖNBECK 2003, 22) – ließ jedoch viele Jahrhunderte auf sich warten. Erst bei den Griechen, die ihre mathematischen Lehrer, besonders die Ägypter und Babylonier, stets mit großer Ehrfurcht und Anerkennung erwähnen (vgl. FREUD 1990, 9) und die aus dem beträchtlichen, in den vorherigen Jahrhunderten angesammelten mathematischen Wissen schöpfen konnten, gelang ein revolutionärer und entscheidender Paradigmenwechsel: wegweisend für die Wissenschaft Mathematik, bis heute von bedeutendem Einfluss und personifiziert durch den Mathematiker EUKLID von Alexandria. Im Folgenden wird nach einer kurzen Beschreibung der babylonischen und ägyptischen Mathematik eben dieser Sprung zur Wissenschaft unter besonderer Berücksichtigung EUKLIDS und seiner Elemente skizziert.

1.1.1 Rechen- und Messkunst der Babylonier und Ägypter

Wer die Geschichte der Mathematik im alten Ägypten erforschen will, muss seine Einsichten aus dem Studium von nur drei großen Dokumenten herleiten (vgl. MESCHKOWSKI 1961, 1). Der Hauptteil unserer Kenntnis beruht dabei auf nur zwei größeren Texten: einem heute im PUSCHKIN-Museum für bildende Künste in Moskau liegenden Papyrus – daher der Name „Papyrus Moskau“ – und einem im britischen Museum London archivierten Papyrus, der nach seinem ursprünglichen Besitzer, dem Schotten Alexander Henry RHIND (1833-1863), der den Papyrus 1858 in Luxor kaufte, benannte „Papyrus RHIND“ (vgl. NEUGEBAUER 1934, 110). Diese Papyri sind verhältnismäßig gut erhalten, weshalb man die Struktur und Tiefe der ägyptischen Mathematik recht gut kennt. Sie exakt zu datieren fällt allerdings schwer, da es sich in beiden Fällen um Abschriften handelt und über die Vorgeschichte der Texte nichts bekannt ist. Das umfangreichste und am besten erhaltene Dokument aus dieser Zeit ist das über fünf Meter lange und rund 30 Zentimeter breite „Papyrus RHIND“. Es beginnt mit einer gewagten Versprechung: „kunstgerechtes Eindringen in alle Dinge, Erkenntnis alles Seienden, aller Geheimnisse“ (MESCHKOWSKI 1961, 1). Tatsächlich handelt es sich aber um eine Aufgabensammlung, innerhalb derer lediglich die Geheimnisse des Multiplizierens und Dividierens enthüllt werden. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich im alten Ägypten die Mathematik deutlich für den praktischen Gebrauch entwickelte:

die Beamten des Pharaos beschäftigten sich mit mathematisch orientierten Verwaltungsproblemen wie der Berechnung von Lohnsummen oder dem Bedarf an Getreide zum Backen einer bestimmten Menge Brot, befassten sich mit Fragen der Feldvermessung, der Größenbestimmung von Vorratsbehältern und der Projektierung von Bauwerken. Glanzstück der altägyptischen Mathematik war die korrekte Berechnung des Volumens des Pyramidenstumpfes (vgl. WUBING/ARNOLD 1978, 10).

Aus der babylonischen Kultur haben mehr Aufzeichnungen die Jahrtausende bis in unsere Zeit überlebt, als aus der ägyptischen, was hauptsächlich auf die höhere Stabilität der gebrannten babylonischen Tontafeln im Vergleich zum recht vergänglichen Papyrus der Ägypter zurückzuführen ist. Was erhalten ist, gilt als verhältnismäßig zuverlässig (vgl. FREUD 1990, 21). So war die babylonische Mathematik deutlich weiter entwickelt, als die der Ägypter. Insbesondere im algebraischen Denken erreichte sie mit der Beherrschung von linearen und quadratischen Gleichungen sowie der Vertrautheit mit arithmetischen und geometrischen Reihen eine erstaunliche Höhe.

Den Weg zur Wissenschaft bahnte sich die Mathematik jedoch erst, als erste Ansätze einer argumentierenden und beweisenden Denkweise aufkamen. WUBING/ARNOLD (vgl. 1978, 11) sehen diese Ansätze bereits auf der frühen Entwicklungsstufe der babylonischen Mathematik, und auch für MESCHKOWSKI (vgl. 1979, 34) sind erste Ansätze einer Beweiskultur bei den Babyloniern erkennbar. Allerdings scheint die Bezeichnung einer (logischen) Schlusskette aus bestimmten Sachverhalten treffender als die eines Beweises, wenn bspw. als Rechtfertigung für das Streichen bestimmter Zahlenreihen „gerade Zahlen bringen Unglück“ angeführt wird (vgl. ebd.).

Es stellt sich jedoch die Frage, warum sich *überhaupt* ein Beweisbedürfnis entwickelt hat, wurden mathematische Verfahren und geometrische Einsichten nach ihrer Entdeckung doch über Jahrhunderte hinweg schlicht angewandt, ohne sie näher zu hinterfragen. So war bspw. der heute als „Satz des PYTHAGORAS“ bekannte Zusammenhang – die Fläche des Hypotenusenquadrats eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Flächen der Kathetenquadrate – zwar den Chinesen, Indern, Babyloniern und Ägyptern bekannt und wurde zum Erzeugen exakter rechter Winkel auch angewandt (zahlreiche historische Bauten wie die Pyramiden von Gizeh belegen dies), dessen Richtigkeit wurde allerdings nie einem stringenten Beweis entnommen. Die reine Anschauung reichte als Bestätigung völlig aus. Dies ist nachvollziehbar, zeigen doch die prächtigen Bauten der ersten Hochkulturen eindrucksvoll die offensichtliche Fehlerfreiheit der angewandten mathematischen und geometrischen Sätze. Warum also sollte man die Aussage, die Gültigkeit der seit langer Zeit bekannten und vielfach augenscheinlich erfolgreich angewandten Verfahren in Frage stellen? Warum sollte sich ein Bedürfnis nach formalen Beweisen dieser offensichtlich gültigen Gegebenheiten einstellen? Sicher ist, dass sich dieses Bedürfnis bei den Griechen, genauer: bei den miletischen Naturphilosophen, erstmals intensiv entwickelt hat. Die Frage nach dem „Warum“ muss jedoch unbeantwortet bleiben. „Es wäre äußerst wichtig zu wissen, wie denn die Griechen von der frühen Zahlenmystik und von der elementaren Rechentechnik der Ägypter und Babylonier zu einer wissenschaftlichen Fundierung der Mathematik vorgedrungen sind. Aber hier fehlen uns eben verlässliche Quellen über die Frühgeschichte der Mathematik im Zeitalter von THALES und PYTHAGORAS“ (MESCHKOWSKI 1979, 44). Rekonstruktionen lassen sich heute nur schwerlich anstellen, man ist auf Vermutungen angewiesen, was eine große Divergenz zwischen den Urteilen verschiedener Mathematikhistoriker zur Folge hat. In einem aber sind sie sich einig: Den entscheidenden

Paradigmenwechsel, den wirklich durchgreifenden Übergang von der rezeptartig beschriebenen Mathematik zu der auf Definitionen, Sätzen und Beweisen aufgebauten Wissenschaft, verdanken wir den Griechen (vgl. u. a. WUBING/ARNOLD 1978, 11; MESCHKOWSKI 1979, 42; FREUD 1990, 21).

1.1.2 Geburtsstunde der Wissenschaften: Griechenland

Die Griechen gelten heute als Urheber der streng logisch deduzierenden mathematischen Wissenschaft. Bei ihnen wurde aus der früheren praktischen Rechen- und Messkunst jene axiomatisch fundierte und streng beweisende Wissenschaft, die heute als Mathematik bezeichnet wird. „Die von den Griechen überlieferten Aufzeichnungen unterscheiden sich von den ägyptischen Papyrusrollen und den babylonischen Tontafeln dadurch, dass die Griechen in erster Linie die Erklärung der Zusammenhänge suchten. Sie waren es, die die Beweisführung in der Mathematik geschaffen haben, was bis heute ein grundlegendes Merkmal dieser Wissenschaft geblieben ist“ (FREUD 1990, 21). Die Mathematik der Ägypter und Babylonier diente nahezu ausschließlich Lehrzwecken für Beamte, während die griechischen Quellen Werke von Mathematikern sind. Dies lässt sich aus einem Umstand leicht erschließen: Die griechische Mathematik hat in einer relativ kurzen Zeitspanne eine bedeutende Entwicklung durchgemacht. Die Mathematik der Babylonier kann dagegen in einer viel längeren Zeitdauer nur sehr geringe Entwicklungen aufweisen, die ägyptische Mathematik weist fast gar keine Fortschritte auf. Das legt die Schlussfolgerung nahe, dass Babylonier und Ägypter höchstwahrscheinlich nie explizit und intensiv nach Ursachen und Beweisen gesucht haben, denn eine solche Suche hätte automatisch neue Entdeckungen zur Folge gehabt. Eher haben sie durch starres Anwenden von Algorithmen und unverändertes Weitergeben ihr Wissen über Jahrhunderte konserviert.

WUBING/ARNOLD (vgl. 1978, 11f) führen den bei den Griechen erfolgten Fortschritt in der Mathematik auf neue gesellschaftliche Verhältnisse zurück, die sich in Folge von weitreichenden ökonomischen, sozialen und politischen Veränderungen im östlichen Mittelmeerraum entwickelt hatten: Der Wasserweg eröffnete neue, lohnbringende wirtschaftliche Strukturen. Nicht mehr die Täler der großen Flüsse, sondern die Küstenländer boten jetzt mit ihren günstigen Möglichkeiten des Handels und Transportes die beste Möglichkeit zur Entfaltung – der legendäre „Koloss von Rhodos“ an der Hafeneinfahrt der gleichnamigen griechischen Insel ist ein Zeugnis dieser Entwicklung. „Die rings um das Ägäische Meer ansässig gewordenen griechischen Stämme der Ioner und Dorer schufen den neuen höheren Typ der antiken Gesellschaft, hoben Kultur und Wissenschaft auf eine neue Stufe der Entwicklung und vollzogen unter anderem auch, im engen Kontakt insbesondere mit der hochstehenden babylonischen Mathematik, den Übergang zur Wissenschaft Mathematik“ (WUBING/ARNOLD 1978, 12). Auch SCHÖNBECK (vgl. 2003, 26) führt die Entstehung der Wissenschaft Mathematik unter anderem zurück auf die neuen demokratischen Lebensformen in Griechenland und der damit verbundenen größeren Bedeutung des gesprochenen Wortes und des vernünftigen Argumentierens, als Vorbild für das logische Deduzieren in der Geometrie.

Insgesamt kann das Zeitalter der griechischen Mathematik entsprechend der Entwicklungsschritte im mathematischen Denken idealtypisch vereinfacht in drei bzw. vier räumlich und zeitlich getrennte sowie methodologisch unterschiedliche, aber dennoch ineinander

übergehende und in der historisch-logischen Zielsetzung einheitliche Perioden unterteilt werden, deren zeitliche Einordnung nicht absolut gemeint ist.

Tabelle 1: Perioden griechischer Mathematik (nach SCHÖNBECK 2003, 27; verändert).

| Zeitraum | Allgemeine Bezeichnung | Methodisch orientierte Bezeichnung | Bedeutende Vertreter |
|--|---|-------------------------------------|---|
| 600-450 v. Chr. (150 Jahre) | ionische Periode | eidetisch ¹ -intuitiv | THALES PYTHAGORAS HIPPOKRATES von Chios |
| 450-300 v. Chr. (150 Jahre) | athenische oder attische Periode | apodiktisch ² -diskursiv | PLATON |
| 300 v. Chr.- 200 n. Chr. (500 Jahre) | jüngere hellenistische oder alexandrinische Periode | systematisch-deduktiv | EUKLID ARCHIMEDES |
| 200-500 n. Chr. (300 Jahre) | ältere hellenistische oder alexandrinische Periode | systematisch-deduktiv | HERON von Alexandria PAPPOS von Alexandria |

¹ Eidetik bezeichnet die Fähigkeit, Vorgestelltes anschaulich zu Vergegenwärtigen.
² Als apodiktisch wird eine (wahre) Aussage bezeichnet, wenn als Beweis eine allgemeine, unumstößliche Wahrheit angeführt wird (*apódeiktikos*, griech.: „beweiskräftig“).

Die ionische Periode

Diese erste Periode der griechisch-hellenistischen Mathematik zeichnet sich durch die Herausarbeitung der Kernfrage aller modernen wissenschaftlichen Mathematik aus: Es wird nicht mehr nur nach dem „Wie“ eines mathematischen Zusammenhanges gefragt, sondern eben auch nach dem „Warum“. Innermathematische Begründungen für gefundene Zusammenhänge gewinnen somit an Bedeutung. Dieser Anfang wissenschaftlichen Denkens ist besonders verknüpft mit den in der Weltstadt Milet wirkenden Naturphilosophen, insbesondere mit dem um 600 v. Chr. lebenden THALES (ca. 620 v. Chr. – ca. 550 v. Chr.). Milet war damals reiche und größte griechische Handelsstadt in Kleinasien und kulturelles Zentrum von Ionien. Die Anhänger der miletischen Philosophie waren überzeugt, dass im Grunde der Welt eine Ordnung herrscht. Sie suchten nach einer rationalen Erklärung der Welt und sahen den Urgrund, aus dem alle Dinge hervorgehen und in den sie zurückkehren, nicht wie damals üblich in Göttern oder übernatürlichen Mächten. THALES selbst sah diesen Urgrund im Wasser, womit er zum Stammvater der materialistisch eingestellten ionischen Naturphilosophie wurde. Er galt als einer der sieben Weisen der Antike und genoss ein hohes Ansehen. SCHÖNBECK (2003, 29) beschreibt ihn als geschäftstüchtigen Kaufmann und weltfremden Theoretiker, zugleich aber praktischen Ingenieur und weisheitsliebenden Intellektuellen.

Das Charakteristikum der miletischen Philosophie, die Besinnung auf das Wesen der Erscheinungen, setzte sich fort in der Mathematik. Vermutlich war es THALES, der auch erstmalig nach dem inneren Grund mathematischer Zusammenhänge gefragt hat. „Mit THALES beginnt die griechische Mathematik, sich von der ägyptischen und babylonischen Mathematik abzusetzen und ihren eigenen Weg zu gehen“ (GERICKE 1984, 78). Seine Niederschriften unterscheiden sich durch die Allgemeinheit der Formulierung von den praktischen Aufgaben der babylonischen Geometrie. Die Frage nach dem „Warum“ führte THALES zu den ersten Beweisen, wenn diese auch noch nicht mit der strengen Axiomatik des

EUKLID geführt wurden. Vielmehr steht bei THALES die Gestalt, die sichtbare Erscheinung, die Figur in ihrer konkreten anschaulichen Unmittelbarkeit im Zentrum der Betrachtungen, so dass die „thaleitischen Beweise“, wie sie SCHÖNBECK (2003, 31) nennt, eher eine phänomenologisch-anschauliche Vorform späterer, logischer und axiomatisch-geführter Beweise darstellen: „An einer (...) Figur, einem Bild, einer Zeichnung etwas gesehen zu haben, was sich ihm (THALES; MG) über den konkreten Einzelfall hinaus als Seiendes offenbart – darin könnte (...) das wesentliche Verdienst des THALES bestanden haben.“ Seine Arbeiten ermöglichten darüber hinaus ein erstes logisches Ordnen des reichen Materials mathematischer Erfahrungen und Kenntnisse. HIPPOKRATES von Chios war der erste Verfasser einer zusammenfassenden und auf Definitionen, Sätzen und Beweisen (im thaleitischen Sinn) basierenden Darstellung der Mathematik – seine zum Ende der ionischen Periode angefertigte Darstellung der Elementargeometrie ist jedoch verschollen. Sicherlich leitete sie aber die neue apodiktisch-diskursive athenische Periode ein und könnte durchaus Vorlage oder Vorbild für die später entstandenen Elemente des EUKLID gewesen sein (vgl. SCHÖNBECK 2003, 51).

Die athenische Periode

Die zweite Periode der griechisch-hellenistischen Mathematik erstreckt sich in etwa auf die Zeit von 450 bis 300 v. Chr. – sie wird gewöhnlich als athenische oder attische Periode bezeichnet; SCHÖNBECK (2003, 57) spricht bemerkenswerterweise von der „voreuklidischen Periode“. Diese Epoche hat das Wesen der antiken Wissenschaft stark geprägt. Der Stadtstaat Athen hatte zusammen mit seinen Verbündeten im griechisch besiedelten Raum die führende Stellung erreicht. Ein ausgebreiteter Seehandel und ein groß angelegter Silberbergbau markierten die wirtschaftliche Basis dieser politischen und militärischen Vormachtstellung – eine Zeit kultureller Hochblüte, in der sich auch die Wissenschaften und die Mathematik günstig entwickeln konnten.

Letztere wurde auf der einen Seite stark durch die Philosophie PLATONS beeinflusst, für den die Mathematik ein wesentliches Element seines philosophischen Systems und ein Beweis dafür war, dass durch menschliches Denken allein ein Zugang zur Welt der Ideen möglich sei. „Beispielsweise sei jedes hingezeichnete Dreieck nur ein mehr oder weniger guter Abklatsch der – nach seiner (PLATONS; MG) Auffassung objektiv existierenden – Idee ‚Dreieck‘, die alle am Dreieck nur mehr oder weniger genau nachmessbaren Eigenschaften in Vollkommenheit besitzt. Jedes Ausmessen der Winkelsumme am konkreten Dreieck weicht eben ab von 180° , während die Idee Dreieck genau 180° als Winkelsumme besitzt“ (WUBING/ARNOLD 1978, 14). Geometrische Gegenstände erreichten einen neuen ontologischen Status. „Hatten zunächst die konkreten, die sinnlich wahrnehmbaren Figuren im Blickpunkt der Geometer gestanden, so wurden jetzt die ‚intelligiblen‘, die geistig wahrnehmbaren Figuren Ziel ihrer Untersuchungen. (...) Es ist deshalb wohl kaum als historischer Zufall anzusehen, dass aus dieser Zeit die ältesten Existenz- und Konstruktionsprobleme überliefert sind: die als selbstständige Aufgabenstellung nur dann Sinn haben, wenn ihre Inhalte sich nicht allein auf die realen Gegenstände der Außenwelt beziehen“ (SCHÖNBECK 2003, 47).

Auf der anderen Seite entwickelte sich während der athenischen Periode ein neuer Typ von Mathematik. Die pythagoreische Schule war kurz zuvor mit ihrer Grundauffassung, die

Mathematik bestehe nur aus ganzen Zahlen und deren Verhältnissen, gescheitert, denn mit der leicht zu konstruierenden Diagonalen im Einheitsquadrat war eine Strecke gefunden, die nicht im Verhältnis ganzer Zahlen zur Länge einer der Seiten steht. Das Problem der Existenz einer offenbar geometrisch relevanten Strecke ohne ein entsprechendes (ganzes) Zahlenäquivalent wurde zum theoretischen Grundproblem für die Mathematiker der athenischen Periode, die sich deshalb von der vorangegangenen vor allem in methodischer Hinsicht unterscheidet. Die neu entdeckten, überraschenden Phänomene waren eidetisch-intuitiv nicht mehr zu begreifen. Sie gesehen zu haben reichte nicht aus, um sie unwiderleglich zu wissen. Es bedurfte einer neuen Qualität des Argumentierens, welche sich vor allem durch die Philosophie PLATONS, die wesentlich zu einem axiomatisch-deduktiven System und so zum methodischen Ansatz der Elemente des EUKLID beigetragen hat, entwickelte (vgl. SCHÖNBECK 2003, 57ff).

Für die endgültige Lösung dieser intuitiv nicht mehr fassbaren Probleme – statt dem Aufbau einer Theorie der irrationalen Zahlen als Ausweg aus der Krise, für den jedoch zunächst der Unendlichkeitsbegriff hätte entwickelt werden müssen, konstruierte man später eine geometrische Algebra – reichte es während der athenischen Periode jedoch nicht mehr. Zu plötzlich endete diese friedliche und fruchtbare Epoche mit dem Peloponnesischen Krieg (431-404 v. Chr.) zwischen Athen und Sparta, der ganz Griechenland in Mitleidenschaft zog und schließlich mit dem Sieg Spartas endete, und der folgenden Eroberung des durch den Krieg geschwächten Griechenlands durch den mazedonischen König PHILIPP (338 v. Chr.) – mit dessen Sohn, dem Eroberer ALEXANDER von Mazedonien (ALEXANDER der Große), begann schließlich das Zeitalter des Hellenismus (300-0).

Die zwei alexandrinischen Perioden

Im Hellenismus wurde, nach dem Zerfall des von ALEXANDER dem Großen in kurzer Zeit eroberten Weltreichs und bis zur Eroberung durch die Römer unter Julius CÄSAR (47 v. Chr.), die von ihm in der Nilniederung nahe dem Meer gegründete und nach ihm benannte ägyptische Hauptstadt Alexandria Zentrum der antiken Wissenschaft. Man bezeichnet die ersten 300 Jahre des Hellenismus infolge dessen auch als alexandrinische Periode. Alexandria nahm einen beispiellosen Aufschwung. Die nach Art des sogenannten „hippodamischen Stadtplans“ entworfene Stadt war mit parallelen, einander rechtwinklig kreuzenden Straßenzügen, die regelmäßige Quartiere und Stadtteile entstehen ließen, mit großzügigen Plätzen und repräsentativen Bauwerken Muster einer wohlgegliederten Stadt. Die Einwohnerzahl wuchs schnell auf rund 500.000 an, Alexandria entwickelte sich zur kulturellen, literarischen und wissenschaftlichen Metropole des östlichen Mittelmeerraumes.

Mittelpunkt des geistigen Lebens war das erste staatlich begründete und unterhaltene Forschungszentrum, das sogenannte Museion (Haus der Musen), eine ausgedehnte Gruppe von Gebäuden mit Hörsälen, Arbeitszimmern und Speiseräumen, umgeben mit zoologischen und botanischen Gärten, Höfen, Wandelgängen und einer angeschlossenen, riesenhaften, etwa 400.000 Papyrusrollen umfassenden Bibliothek – andere Quellen sprechen sogar von 700.000 Rollen. Eine moderne Universität, ein „Institute for advanced study“ der Antike“ (SCHÖNBECK 2003, 4), welches an Einfluss die Schulen in Athen bald übertraf. Die Gelehrten konnten sich hier bei ansehnlicher Bezahlung und großzügigen Arbeitsmöglichkeiten ausschließlich ihren wissenschaftlichen Neigungen widmen. Begünstigt durch

die Verbreitung der griechischen Sprache, den allgemeinen Wohlstand, die Einführung des Pergaments und die Vereinfachung der Schrift entwickelte sich eine Zeit der Literatur und der Bücher. Die Aufgabe der dem Museion angeschlossenen Bibliothek bestand darin, alle wissenschaftlichen, philosophischen und schöngeistigen Schriften der Völker des Mittelmeeres und des Vorderen Orients systematisch zu archivieren – man begann, die literarischen Schätze zu sammeln. Jeder namhafte Fremde, der die Stadt besuchte, musste eine Abschrift von jedem Buch, das er besaß, zurücklassen. Bedauerlicherweise ist von all diesen Schätzen nur ein geringer Teil im Original erhalten. Große Teile der größten und berühmtesten Bibliothek des Altertums wurden in den Kriegen CÄSARS durch Feuer vernichtet. Gebliebenes wurde in der Anfangszeit des Christentums zerstört, den Rest besorgten die Mohammedaner, als sie 642 n. Chr. Alexandria eroberten und mit folgender, berühmt gewordenen Begründung des Kalifen Omar die Vernichtungsaktion starteten: Entweder widerspricht der Inhalt der Bücher dem Koran, dann verdienen sie, vernichtet zu werden. Oder aber er stimmt mit ihm überein, dann sind sie unnütz und können ebenfalls vernichtet werden (vgl. STÖRIG 2007, 88f). So sind wichtige Dokumente über die Frühgeschichte der Mathematik verloren gegangen und alte Kenntnisse gerieten in Vergessenheit. Erst Jahrhunderte später wurden diese mühsam und durch Vermittlung arabischer Übersetzungen wiederentdeckt. Unser heutiges Wissen speist sich zu großen Teilen aus diesen sehr viel jüngeren Quellen.

Dennoch ist die herausragende Bedeutung des Museion für die Entwicklung der Mathematik unzweifelhaft. Während der ersten Jahrhunderte dessen Bestehens haben alle bedeutenden Naturforscher und Mathematiker in Alexandria gewirkt oder dort ihre Ausbildung erhalten: EUKLID, ARCHIMEDES, APOLLONIOS, DIOPHANTOS, ERATOSTHENES von Kyrene, HERON von Alexandria, PTOLEMAIOS, PAPPOS von Alexandria und viele mehr – die griechisch-hellenistische Mathematik erreichte während dieser Periode ihren Höhepunkt, und dank EUKLIDS Elementen sind uns die umfassenden Ergebnisse dieser Zeit so bekannt.

In der sich anschließenden, letzten Periode der griechisch-hellenistischen Mathematik (200-500 n. Chr.) wurden nur noch kleine Fortschritte erzielt, die sich allerdings auf eine Wiederbelebung der echt algebraischen babylonischen Traditionen und einen Aufschwung der praktischen Methoden der Mathematik beschränken. „Im ganzen (...) handelt es sich in dieser letzten Periode um eine Periode des Verfalls der Kultur, der Wissenschaften und auch der Mathematik durch die um sich greifende Stagnation der ökonomischen Entwicklung der antiken Gesellschaft und die beginnende Zersetzung und Auflösung des römischen Weltreichs“ (WUBING/ARNOLD 1978, 17). Die griechisch-hellenistische Mathematik ging zu Ende, aber nicht verloren. Sie ging ein in die Mathematik der islamischen Länder. Im 14. Jahrhundert schließlich gelangten die Ergebnisse der griechisch-hellenistischen Mathematik aus dem arabischen Kulturkreis nach Europa, wo sie bis ins 17. Jahrhundert für wesentliche Impulse für die Begründung der modernen Mathematik sorgten.

1.1.3 EUKLID und „Die Elemente“

EUKLID von Alexandria: Leben und Werk

Was sicher über EUKLID bekannt ist, lässt sich in wenigen Worten zusammenfassen: „EUKLID, der Verfasser der Elemente (und einiger anderer Werke) lebte – vermutlich (!) – um

300 v. Chr. in Alexandria in Ägypten“ (SCHÖNBECK, 2003, 16). An gesicherten Kenntnissen existiert tatsächlich nicht viel mehr und einige Historiker zweifeln aufgrund dieser bruchstückhaften Faktenlage sogar an, dass es in hellenistischer Zeit einen Mathematiker EUKLID überhaupt gegeben hat und dass die ihm zugeschriebenen Werke tatsächlich von einem einzigen Autor verfasst wurden. Sehr wahrscheinlich scheinen diese Zweifel jedoch nicht zu sein, denn EUKLID, der durch die Jahrhunderte hinweg bis heute angesehen wird als Autor der „Elemente“ (im folgenden schlicht Elemente), d. h. des wohl berühmtesten, einflussreichsten und am meisten verbreiteten Textes der mathematischen Literatur, zählt zweifelsfrei zu den Großen der Weltgeschichte, „(weil) ohne (ihn) die Welt uns unvollständig schiene, weil bestimmte große Leistungen nur durch ihn innerhalb seiner Zeit und Umgebung möglich waren und sonst undenkbar sind“ (SCHÖNBECK 2003, 16).

Der Name EUKLID ist fest verbunden mit der pulsierenden Weltstadt Alexandria, in der er gelebt und gelehrt hat. Dass er auch am dortigen Museion gewirkt hat ist sehr wahrscheinlich, jedoch nicht sicher belegt. „Es ist nicht mit Sicherheit überliefert, ob überhaupt, wie oft und wie lange oder in welchen Jahren EUKLID in Alexandria sich aufgehalten und gelebt hat, ob er dort geboren wurde oder dort starb, woher er vielleicht kam und welche Reisen er unternahm, ob er erst in Alexandria seine wissenschaftlichen Werke verfasste oder sie dort nur vortrug, wer seine Lehrer, Freunde und Schüler waren, ob er am gesellschaftlichen oder politischen Leben in Alexandria sich beteiligte. Wir wissen nichts oder nichts Genaues über seine persönlichen oder beruflichen Lebensumstände, wir kennen kein Bild von ihm und nicht seine Handschrift. (...) Über EUKLID von Alexandria, den alle Mathematiker der Welt kennen, ist nichts uns wirklich mit Bestimmtheit bekannt“ (SCHÖNBECK 2003, 5). Schon der Name EUKLID stiftet Verwirrung: Offenbar war er im Altertum sehr gebräuchlich. Mindestens ein Dutzend Träger dieses Namens sind bekannt, darunter Politiker, Ärzte, Handwerker, Wissenschaftler und Philosophen, was lange Zeit für Verwechslungen sorgte.

Tabelle 2: Zeittafel zu EUKLID (nach SCHÖNBECK 2003, 12; verändert).

| Jahr | Ereignis |
|----------------|---|
| 348/347 | Tod PLATONS, SPEUSIPPOS wird Leiter der Akademie in Athen |
| um 340 v. Chr. | Geburt EUKLIDS (Geburtsjahr unsicher, Geburtsort unbekannt) |
| 339 | XENOKRATES aus Chalkedon wird Leiter der Akademie |
| 336 | ALEXANDER wird König |
| 332/331 | ALEXANDER gründet Alexandria |
| um 325 | Niederschrift der Elemente |
| 323 | Tod ALEXANDERS |
| 322 | Tod ARISTOTELES ⁴ |
| 314 | POLEMON aus Athen wird Leiter der Akademie |
| um 290 | PTOLEMAIOS gründet das Museion und die Bibliothek in Alexandria |
| um 280 | Tod EUKLIDS, vermutlich in Alexandria (Angaben unsicher) |

EUKLID hat insgesamt über zehn umfassende Werke zur Mathematik und zur mathematischen Physik geschrieben. Darunter befinden sich auch Schriften zur Geometrie (u. a. die Elemente), zur Astronomie, zur Musiktheorie, zur Optik und möglicherweise auch zur Mechanik. Es sind jedoch nicht alle Werke erhalten, von einigen existieren nur Bruchstücke, bei anderen ist nicht sicher, ob EUKLID tatsächlich der Autor ist. Dies alles konnte

seinen Ruhm jedoch nicht schmälern. Literarische Zeugnisse und bildnerische Darstellungen aus sämtlichen Epochen (vgl. Abb. 2) bestätigen dies (vgl. SCHÖNBECK 2003, 13).

Abbildung 2: Teilfresko EUKLIDS am Glockenturm der Kathedrale von Florenz (Cattedrale di Santa Maria del Fiore, 1359).



EUKLIDS um 325 niedergeschriebene Elemente, „aus denen eine ganze Welt (...) Geometrie gelernt hat“ (VAN DER WAERDEN in SCHÖNBECK 2003, 131), bilden zweifellos den Höhepunkt seines literarischen Schaffens von „nicht zu überschätzendem Einfluss“ (SCHÖNBECK 2003, 140). „Mit dem Werk EUKLIDS hatte die griechische Mathematik das erste wissenschaftliche System geschaffen und damit einen Höhepunkt erreicht“ (POPP 1999, 23). Sie „stehen noch immer als ein unübertroffenes Muster eines guten Lehrervortrags da; sie zeigen uns in der größten Einfachheit und notwendigen Abstufung ihrer Probleme, wie Eingang und Zutritt zu allen Wissenschaften beschaffen sein sollten“ (GOETHE in FALK 1832, 30). EUKLIDS Elemente nehmen „nach der Bibel den zweiten Platz der Welt-Bestsellerliste“ ein (RANDOW 1984, 15), sie gehören mit Bestimmtheit zu jenen traditionsreichen Werken, welche „die Welt verändert haben“ (CARTER/MUIR 1969, 1), weil es „spürbar das Denken der Menschen beeinflusst“ hat (ebd., 8). „EUKLID und sein Werk ‚Die Elemente‘ sind zu einem Inbegriff von Mathematik schlechthin geworden. Die ‚Elemente‘ stellen mit Abstand das erfolgreichste mathematische Werk der Weltgeschichte dar. Länger als 2.000 Jahre war es die Grundlage für die Mathematikausbildung, und noch in jüngster Zeit wurden in England die ‚Elemente‘ als offizielles Schulbuch verwendet“ (WUBING/ARNOLD 1978, 25). Zudem unterstreicht die umfangreiche und beispiellose Literatur zu EUKLID und den Elementen deren Bedeutung nachdrücklich. „So ist die Sekundärliteratur über EUKLID und die ‚Elemente‘ mittlerweile fast unübersehbar und wächst noch ständig. All dies auch nur in Kürze zu referieren, würde allein ein Buch füllen“ (SCRIBA/SCHREIBER 2000, 49). Ähnlich äußert sich SCHÖNBECK (2003, VIII): „Die zu EUKLID und zu den Elementen vorhandene umfangreiche Literatur kann kaum ausgeschöpft oder annähernd vollständig erfasst werden.“

Nicht viele mathematische Schriften können Vergleichbares von sich behaupten. SCHÖNBECK (2003, 199f) nennt eine Top-Eleven mathematischer Schriften ähnlich prominenten Ranges – die (freilich subjektive) Liste zeigt die beeindruckende Gesellschaft, in der sich EUKLID mit seinen Elementen befindet. Bezeichnenderweise rahmen die „alten“ Elemente EUKLIDS und die „neuen“ Elemente HILBERTS die übrigen Schriften ein.

Beweisen verstehen im Mathematikunterricht
Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der
Lehrkunstdidaktik

Gerwig, M.

2015, XIX, 394 S. 82 Abb., 14 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-10187-9