

2 Schnittgrößen und zugehörige Spannungen in Stabquerschnitten

In unseren bisherigen Betrachtungen ist die Frage nach der Beanspruchung von Bauteilen nur am Rande erwähnt worden. Ihre Beantwortung stellt zwar nicht das Endziel unserer Bemühungen dar, ist jedoch im Hinblick auf die Notwendigkeit, Bauteile zu entwerfen und wirtschaftlich zu bemessen, von entscheidender Wichtigkeit. Tatsächlich gibt ihre Behandlung einem großen Teil der bisher angestellten Untersuchungen erst ihren Sinn. Während nämlich die Kenntnis der Stützgrößen eines Bauteils für sich als wünschenswert erkennbar ist, konnte die Kenntnis der Schnittgrößen bisher nicht konkret verwertet werden. Was es für den Querschnitt eines Bauteils bedeutet, eine bestimmte Normal- oder Querkraft bzw. ein bestimmtes Biege- oder Torsionsmoment zu übertragen, können wir bisher nur vermuten. In diesem Kapitel nun werden wir ermitteln, welche Art von Spannungen zu den verschiedenen Schnittgrößen gehört, wie ihre Verteilung über den Querschnitt und ihre Größe in einzelnen Punkten dieses Querschnitts ist. Sind diese Dinge einmal bekannt, dann, kann jedes Bauteil seiner Belastung entsprechend bemessen werden. Dies allerdings kann nur mit Vorbehalt gesagt werden. Bekannt am Ende dieses Kapitels werden nämlich nur die auf einer Querschnittsfläche wirkenden Spannungen sein.

Wir haben oben an einer Stelle von Spannungen gesprochen, die „zu den verschiedenen Schnittgrößen gehören“. Diese Formulierung deutet darauf hin, dass es sich bei einer bestimmten Schnittgröße und der zugehörigen Spannungsverteilung um äquivalente Kraftsysteme handelt, wobei die Schnittgröße (wie wir wissen) die Resultierende der Spannungskräfte in einem Querschnitt ist. Die in diesem zweiten Kapitel immer wieder zu lösende Aufgabe wird deshalb sein, zu einem gegebenen einfachen Kraftsystem (bestehend aus einer Schnittgröße oder mehreren) ein weniger einfaches zu finden, nämlich flächenmäßig verteilte Kräfte: die Spannungen. Es handelt sich hier also um die Umkehrung der Reduktion eines Kraftsystems, wie wir sie in Band 1 kennengelernt haben. Dementsprechend werden wir es in diesem Kapitel im Allgemeinen nicht mit Gleichgewichtsbetrachtungen zu tun haben, sondern mit Äquivalenzbetrachtungen.

2.1 Allgemeines

Im Folgenden werden stabförmige Bauteile untersucht, deren Stabachse gerade ist und deren Querschnittsform und -größe gleichbleibend ist oder sich jedenfalls nur allmählich ändert. Alle Lasten eines solchen Bauteils sollen in ein und derselben Ebene (der

Lastebene) wirken. Enthält diese Ebene nicht die Stabachse, denn werden in jedem Stabquerschnitt i. A. sechs Schnittgrößen übertragen, drei Schnittkräfte und drei Schnittmomente (siehe auch Bild 1). Bei dem Versuch, eine der Wirkung der sechs Schnittgrößen äquivalente Spannungsverteilung zu finden, werden wir nach einem bewährten Rezept vorgehen: Wir werden die sechs Schnittgrößen der Reihe nach einzeln angreifen lassen und jeweils die zugehörige Spannungsverteilung ermitteln. Wir verfahren so nicht ohne Vorbehalt. Es könnte dabei nämlich der Eindruck entstehen, diese sechs Schnittgrößen wären alle unabhängig voneinander. Was freilich nicht so ist oder jedenfalls nicht durchweg so. Zwar kann man von einer gegebenen Belastung diejenigen Lasten oder Lastkomponenten abspalten, die Normalkräfte oder Torsionsmomente erzeugen, man kann aber nie das Entstehen von Querkraften trennen vom Auftreten entsprechender Biegemomente. Diese beiden Schnittgrößen sind, wie wir wissen, unlösbar miteinander verbunden.²⁰⁾ Auf diese Verbindung und Abhängigkeit werden wir bei der Behandlung der Querkraft zurückgreifen müssen.

Bei der Untersuchung von Spannungsfragen hat sich gezeigt, dass sich nicht für alle Querschnittsformen geschlossene Lösungen mit gleichem Aufwand angeben lassen. Wir werden deshalb jeweils für bestimmte Querschnitte die gesuchten Beziehungen herleiten und diese dann so allgemein wie möglich formulieren. Eine solche Generalisierung bringt es mit sich, dass die Anwendung der entsprechenden Formeln und die Interpretation der mit ihnen ermittelten Ergebnisse mit Bedacht geschieht.

2.2 Spannungen in einem Rechteckquerschnitt, auf den N , M_y und M_z wirken

Wir wollen zunächst den wohl am häufigsten auftretenden Fall untersuchen, bei dem alle Lasten direkt auf die Stabachse wirken, die Stabachse also in der Lastebene liegt (Bild 20). Dann werden in einem Stabquerschnitt i. A. die Normalkraft N (häufig auch Längskraft genannt), die Biegemomente M_y und M_z und die Querkraften V_z und V_y übertragen, während ein Torsionsmoment mit Sicherheit fehlt.

Im Hinblick auf die Richtung der zugehörigen Spannungen bzw. Spannungskomponenten (relativ zur Querschnittsfläche) lassen sich, wie wir wissen, die hier wirkenden Schnittgrößen in zwei Gruppen einteilen: die Querkraften V_z und V_y als Resultierende von Tangential- bzw. Schubspannungen und die Biegemomente M_y und M_z zusammen mit der Normalkraft N als (Teil-) Resultierende von Normalspannungen. In diesem Abschnitt wollen wir die Verteilung der Normalspannungen bestimmen, die zu einer zweiachsig ausmittigen Längskraft, dargestellt durch die Schnittgrößen

²⁰⁾ Zu einer von Null verschiedenen Querkraft gehört grundsätzlich ein sich mit x änderndes Biegemoment: $V = dM/dx$.

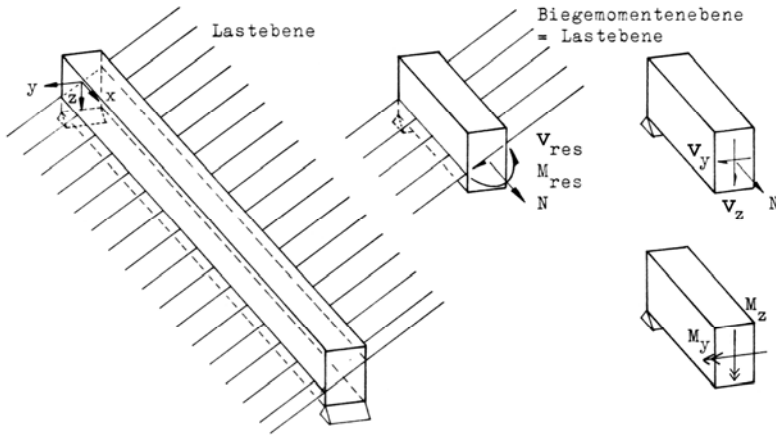
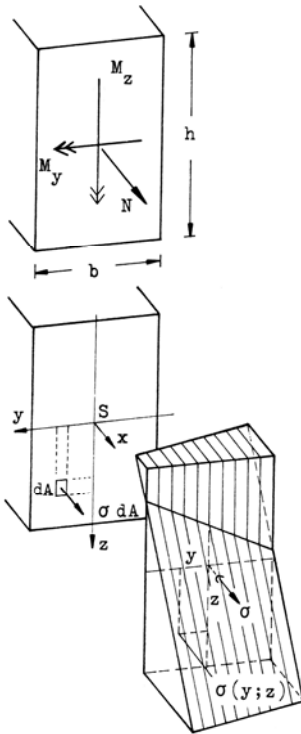


Bild 20 Die Lastebene enthält die Stabachse; auftretende Schnittgrößen

N , M_y und M_z gehört. Sie Suche nach Hinweisen über die Art der Spannungsverteilung führt uns – wir haben darüber im vorangegangenen Kapitel gesprochen – zur Beobachtung des Formänderungsverhaltens des beanspruchten Stabes. Ein solcher Stab wird, wie man sich leicht vorstellt, bei Belastung i.A. in seiner Länge geändert und in einer Ebene, die nicht Lastebene sein muss, gebogen. Hat man auf der Oberfläche eines solchen Stabes vor der Verformung die Schnittlinien irgendeiner Querschnittsebene mit der Oberfläche markiert, so stellt man nach der Verformung fest, dass diese Schnittlinien immer noch, nahezu in einer Ebene liegen. Die Annahme ist deshalb berechtigt, dass bei der Verformung dieses Stabes ebene Querschnitte eben bleiben. Tatsächlich trifft dies, wie schon angedeutet, im allgemeinen Fall der sogenannten Querkraftbiegung (wir haben es in unserem Fall mit solcher Querkraftbiegung zu tun) nicht exakt zu. Die Abweichungen sind jedoch bei stabförmigen Bauteilen (bei denen sind die Querschnittsabmessungen klein im Vergleich zur Längenabmessung, sodass die Lasten hauptsächlich Biegung verursachen) im Bereich großer Biegemomente so klein, dass sie zugunsten einer handlichen Lösung (technische Biegelehre) vernachlässigt werden können. In Bereichen großer Querkräfte – also etwa in Auflagernähe – wird man allerdings auch bei stabförmigen Bauteilen an die so entwickelte Lösung keine allzu großen Genauigkeitsanforderungen stellen dürfen. Diese Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte bei Biegung mit und ohne Längskraft, von der wir bereits in Kapitel 1 sprachen, ist für die Entwicklung der technischen Biegetheorie von fundamentaler Bedeutung. Sie wurde von dem seinerzeit in Basel lebenden Mathematiker Jacob *Bernoulli* (1654 – 1705) zuerst

**Bild 21**

Zur Äquivalenz von verteilter Flächenbelastung und Schnittgrößen

formuliert und wird deshalb auch Bernoulli – Hypothese genannt. Bleiben nun zwei in einem beliebigen Abstand voneinander entfernt liegende Querschnittsebenen bei der Verformung eben, dann müssen ²¹⁾ die Längenänderungen der einzelnen Fasern zwischen Ihnen linear über den Querschnitt verteilt sein: $\Delta l = ax + by + \Delta l_0$. Da diese Fasern bei einem geraden Stab ursprünglich alle gleich lang waren, muss sich auch für den Quotienten $\frac{\text{Längenänderung}}{\text{Ursprungslänge}}$ eine lineare Verteilung ergeben. Dieser

Quotient ist freilich nichts anderes als die Faserdehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta}{l}$. Wir erhalten

die zu dieser linearen Dehnungsverteilung gehörende Spannungsverteilung, indem wir die für das jeweils vorhandene Material gültige Spannungs-, Dehnungs-Beziehung einführen (siehe Kapitel 1, Zugversuch.). Für die konstruktiven Baustoff-

²¹⁾ Deshalb die Forderung, dass alle Lasten in einer Ebene liegen; dann nämlich ist das Verhältnis M_y/M_z für alle Querschnitte gleich.

fe Stahl und Holz kann, wie wir wissen, in bestimmten Grenzen mit Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen gerechnet werden, sodass in diesen Fällen hier das Hookesche Gesetz $\sigma = E \varepsilon$ einzuführen ist. Damit ergibt sich, dass auch, die (Normal-)Spannungen linear über den Querschnitt verteilt sind, genauer, dass die Normalspannung eine lineare Funktion der Querschnittskordinaten y und z ist:

$$\sigma = my + nz + \sigma_0.$$

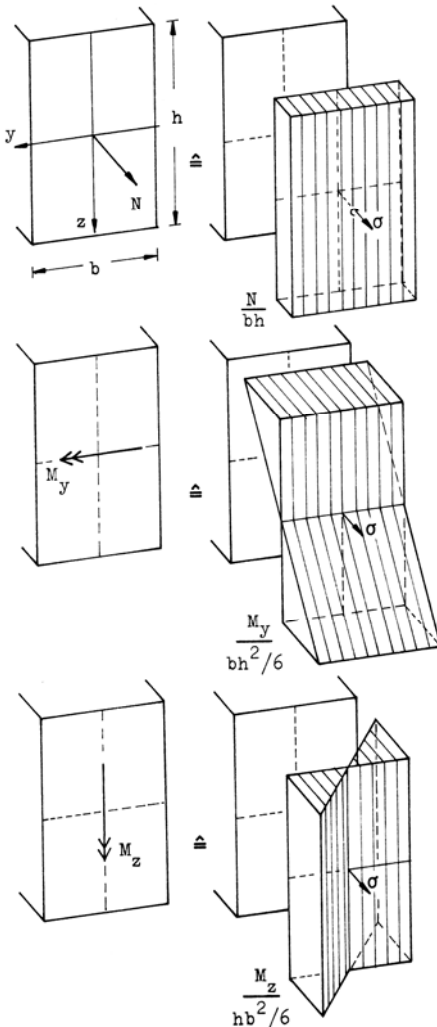


Bild 22
 Drei einfache Sonderfälle

Dementsprechend ergibt sich, graphisch im σ -y-z-Raum eine Ebene, wenn man die Spannungen über der Querschnittsfläche aufträgt.

Für den Fall, dass der beanspruchte Stab einen rechteckigen Querschnitt hat und dessen zwei Symmetrieachsen mit der y- bzw. z-Achse zusammenfallen, wollen wir nun die Spannungsverteilung ermitteln (Bild 22). Liegt auf einem Flächenelement von der Größe

$$dA = dy dz$$

die Spannung σ , dann hat die resultierende Kraft die Größe

$$dF = \sigma dy dz.$$

Die Summe dieser resultierenden Kräfte muss nun den gegebenen Kräften bzw. Kraftgrößen äquivalent sein, beide Kraftsysteme müssen also gleiche Wirkungen hervorrufen; sie tun dies, wenn z.B. die folgenden drei Äquivalenzbedingungen ²²⁾ von ihnen erfüllt werden:

$$\int \sigma dA = N$$

(A)

$$\int z \sigma dA = M_y$$

(A)

$$\int y \sigma dA = -M_z$$

(A)

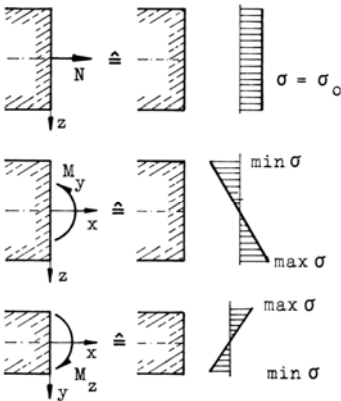


Bild 23

Vereinfachte Darstellung einer Spannungsverteilung

²²⁾ Im allgemeinen Fall sind natürlich sechs Äquivalenzbedingungen zu erfüllen. Wir untersuchen augenblicklich jedoch nur Normalspannungen in x-Richtung.

Die Verwendung der Beziehung

$\sigma = my + nz + \sigma_0$ und $dA = dy dz$ liefert, wenn die Integrationsgrenzen gleichzeitig angepasst werden, die drei Gleichungen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (my+nz+\sigma_0) dy dz = N$$

$$\iint z(my+nz+\sigma_0) dy dz = M_y$$

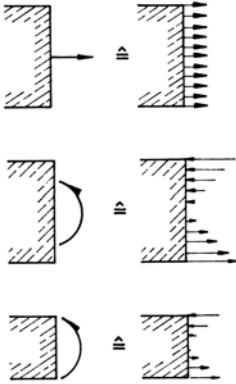
$$\iint y(my+nz+\sigma_0) dy dz = -M_z$$

Diese Gleichungen können nun als Bestimmungsgleichungen für die drei unbekannten Größen m , n und σ_0 aufgefasst und nach Integration mühelos nach ihnen aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\frac{m}{2} y^2 + n z y + \sigma_0 y \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{m}{2} b^2 + n z b + \sigma_0 b \right) dz = \\ &= \left[\frac{n}{2} b z^2 + \sigma_0 b z \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{n}{2} b^2 h + \sigma_0 b h = N \rightarrow \sigma_0 = \frac{N}{b \cdot h} \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (m y z + n z^2 + \sigma_0 z) dy dz = M_y$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\frac{m}{2} y^2 z + n z^2 y + \sigma_0 z y \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{m}{2} z b^2 + n z^2 b + \sigma_0 z b \right) dz =$$

**Bild 24**

Richtung und Größe zugehöriger Spannungen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (n b z^2 + \sigma_0 b z) dz = \left[\frac{n}{3} b z^3 + \frac{1}{2} \sigma_0 b z^2 \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{n}{3} b \left(2 \frac{h^3}{8} \right) = M_y \rightarrow$$

$$n = M_y / \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (m y^2 + n y z + \sigma_0 y) dy dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\frac{m}{3} y^3 + \frac{n}{2} y z + \frac{1}{2} \sigma_0 y^2 \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz =$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[\frac{m}{3} \left(2 \frac{b^3}{8} \right) + \frac{n}{2} \cdot b \cdot z \right] dz = \left[\frac{m b^3}{12} z + \frac{n}{2} \cdot b \frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} m b^3 h + 0 = -M_z$$

$$\rightarrow m = -M_z / \frac{b^3 h}{12}$$

Damit ergibt sich

$$\sigma = \frac{-M_z}{\frac{h b^3}{12}} y + \frac{M_y}{\frac{b h^3}{12}} z + \frac{N}{b h}$$

Oder konkreter

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{-M_z(x)}{\frac{h b^3}{12}} y + \frac{M_y(x)}{\frac{b h^3}{12}} z + \frac{N(x)}{b h}$$

Indem man in dieser Beziehung eine oder zwei der Größen M_y , M_z und N gleich Null setzt, erhält man Ausdrücke wie

$$\sigma = \frac{N}{b h} \quad \text{für } M_y = M_z = 0$$

$$\sigma = \sigma(z) = \frac{M_y}{\frac{b h^3}{12}} z \quad \text{für } M_z = N = 0$$

$$\sigma = \sigma(y) = -\frac{M_z}{\frac{h b^3}{12}} y \quad \text{für } M_y = N = 0$$

Diese Funktionen sind in Bild 22 graphisch dargestellt. Bild 23 zeigt eine vereinfachte Form der Darstellung, wie sie allgemein üblich ist. Diese Darstellung einer mathematischen Funktion ist nicht zu verwechseln mit der Darstellung der zu den Spannungen gehörenden Vektoren (Bild 24). Diesem Bild kann neben der Größe der Spannungskräfte auch deren Richtung entnommen werden, während Bild 23 nur die Größe (Verteilung) der Spannungen zu entnehmen ist.²³⁾ Selbstverständlich sind neben den Koordinaten y und z auch die Schnittgrößen mit Vorzeichen behaftet, können also ebenfalls positive und negative Werte annehmen. Ergibt sich auf diese Weise bei der Normalspannung ein negatives Vorzeichen (bzw. ein negativer Wert), so handelt es sich (entsprechend der Definition von Normalspannungen) um eine Druckspannung.

Bei der Beanspruchung durch M_y ergeben sich für die Normalspannungen die Extremwerte

$$\max \sigma = \sigma\left(\frac{h}{2}\right) = +\frac{M_y}{\frac{b h^2}{6}} \quad \text{und} \quad \min \sigma = \sigma\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{M_y}{\frac{b h^2}{6}}$$

Die entsprechenden Werte für eine Beanspruchung durch M_z lauten

$$\max \sigma = \sigma\left(-\frac{b}{2}\right) = +\frac{M_z}{\frac{h b^2}{6}} \quad \text{und} \quad \min \sigma = \sigma\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{M_z}{\frac{h b^2}{6}}$$

²³⁾ Bei der Darstellung der Schubspannungen werden wir später auf diesen Unterschied zu achten haben.

Man könnte nun für alle möglichen Querschnittsformen solche Formeln aufstellen. Wir werden dies nicht tun, sondern diese Formeln durch Einführung neuer Größen so verallgemeinern, dass sie auf beliebige Querschnitte anwendbar sind. Dies soll im folgenden Abschnitt geschehen.

2.3 Spannungen in beliebig geformten Querschnitten, auf die Normalkräfte und Biegemomente wirken

Im Laufe der nun folgenden Verallgemeinerung werden wir feststellen, dass bei der rechnerischen Behandlung von Biegemomenten mehr Bedingungen bezüglich ihrer Richtung relativ zur Lage des beanspruchten Querschnitts zu beachten und zu erfüllen sind als bei der Behandlung von Normalkräften. Wir werden deshalb Normalkräfte und Biegemomente getrennt behandeln.

2.3.1 Zu einer Normalkraft gehörende Spannungen

In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, dass bei einem rechteckförmigen, also doppel-symmetrischen (homogenen) Querschnitt, zu einer Normalkraft eine gleichmäßige Spannungsverteilung gehört, wenn diese Normalkraft im Schwerpunkt der Querschnittsfläche wirkt. Wir betrachten jetzt das in Bild 25 dargestellte System und schreiben die Bedingungen für Äquivalenz beider Kraftsysteme – des gegebenen (N) und des ermittelten (σ -Verteilung) – an:

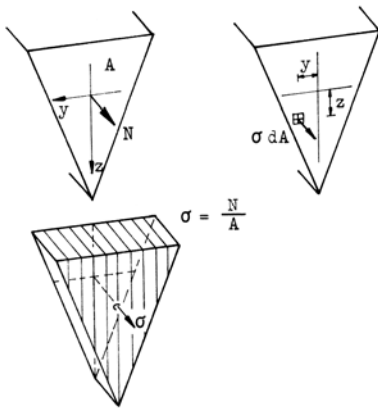


Bild 25

Verteilung der Normalkraft über die Querschnittsfläche

$$1) \int_{(A)} \sigma dA = N$$

$$2) \int_{(A)} z \sigma dA = M_y = 0$$

$$3) \int_{(A)} y \sigma dA = -M_z = 0$$

Da, wie wir ja wissen, σ konstant ist über den Querschnitt, kann es jeweils vor das Integral gezogen werden:

$$1a) \sigma \int_{(A)} dA = N$$

$$2a) \sigma \int_{(A)} z dA = 0$$

$$3a) \sigma \int_{(A)} y dA = 0$$

In der Gleichung 1a kann die Integration unmittelbar ausgeführt werden: $\int_{(A)} dA = A$.

Damit ergibt sich allgemein $\sigma A = N$ und $\sigma = \frac{N}{A}$.

In der Gleichung 2a haben wir es zu tun mit einem Produkt, dessen Wert Null ist. Bekanntlich muss dann mindestens einer der Faktoren Null sein. Es braucht hier nur die Möglichkeit $\int z dA = 0$ untersucht zu werden, da der Fall $\sigma = 0$ trivial ist. Nun stellt der Ausdruck $z dA$ das statische Moment des Flächenelementes dA in Bezug auf die y -Achse dar und entsprechend ist $\int z dA$ das statische Moment der Gesamtfläche in Bezug auf die y -Achse. Für eine beliebige Lage der y -Achse ist dieses statische Moment der Gesamtquerschnittsfläche natürlich ungleich Null. Es verschwindet nur für eine Bezugsachse, die durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche geht: für eine Schwerpunktsachse. Mit anderen Worten: Die Gleichung 2a kann nur erfüllt werden, wenn die y -Achse eine Schwerpunktsachse ist. Für die Gleichung 3a gilt entsprechendes: Sie kann nur erfüllt werden, wenn die z -Achse eine Schwerpunktsachse ist. Damit ist klar, dass der Schnittpunkt von y - und z -Achse der Schwerpunkt der Querschnittsfläche sein muss. Das bedeutet: Stab und Bezugssystem müssen so zueinander liegen, dass die x -Achse (= Stabachse) und damit die Wirkungslinie der Normalkraft die Schwerpunkte aller Stabquerschnitte miteinander verbindet, wenn die in einem Querschnitt auftretenden Spannungen durch $\sigma = N/A$ allein korrekt beschrieben sein sollen. Bezeichnet man diese Verbindungslinie der

Schwerpunkte aller Stabquerschnitte als Schwerlinie, dann gilt also: Stabachse = Schwerlinie.

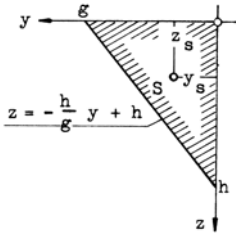


Bild 26
Zur Bestimmung des Schwerpunktes

Wir zeigen hier die Bestimmung des Schwerpunktes für ein Dreieck (Bild 26) und kommen anlässlich der zusammenfassenden Behandlung von Flächenwerten in Kapitel 3 noch einmal hierauf zurück. Per definitionem ist der Schwerpunkt derjenige Punkt, in dem man sich die ganze Fläche vereinigt denken kann, solange es um das statische Moment dieser Fläche um jede beliebige Achse geht. Dementsprechend muss in Bezug auf eine beliebige Achse das statische Moment der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtfläche gleich sein der Summe der statischen Momente der Teilflächen. Diese Aussage kann als Bestimmungsgleichung für den Schwerpunktabstand von der erwähnten Bezugsachse benutzt werden. Wählen wir etwa die y-Achse als Bezugsachse und nennen den Abstand des Schwerpunktes von dieser Achse z_s , dann muss sein

$$z_s A = \int_{(A)} z dA = S_y \quad \text{und also} \quad z_s = \frac{1}{A} \int_{(A)} z dA = \frac{S_y}{A}$$

Wir wollen jetzt für unser Dreieck den Wert des Integrals bestimmen und ersetzen dazu dA durch $dz dy$ bei gleichzeitiger Anpassung der Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{(A)} z dA = \int_0^g \int_0^z z dz dy = \int_0^g \frac{1}{2} z^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^g \left(-\frac{h}{g} y + h \right)^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{g} \right)^2 \int_0^g (-y+g)^2 dy = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{g} \right)^2 \int_0^g (y^2 - 2gy + g^2) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h}{g} \right)^2 \left[\frac{1}{3} y^3 - g y^2 + g^2 y \right]_0^g = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{g} \right)^2 \left[\frac{1}{3} g^3 - g^3 + g^3 \right] = \frac{1}{6} g h^2 \end{aligned}$$

Das liefert mit $A = \frac{1}{2} g h$ den Schwerpunktsabstand $z_s = \frac{1}{3} h$.

Wählen wir nun die z-Achse als Bezugsachse und nennen den Abstand des Schwerpunktes von dieser Achse y_s , dann muss gelten

$$y_s A = \int_{(A)} y dA = S_z \text{ und also } y_s = \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA = \frac{S_z}{A}.$$

Damit ergibt sich entsprechend $y_s = \frac{1}{3} g$.

Noch ein Wort zu den entsprechenden Verformungen. Die Dehnung eines Stabelementes ergibt sich mit $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ und $\sigma = \frac{N}{A}$ unmittelbar zu (Bild 27)

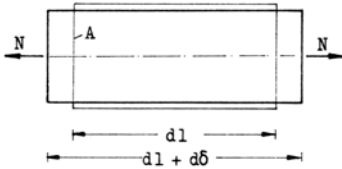


Bild 27
Verformung eines Stabelementes

$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}.$$

Für eine Normalkraft bestimmter Größe hängt die Dehnung eines Elementes also nur ab von E und A. Der Elastizitätsmodul E kennzeichnet den Einfluss des Materials, der Querschnittswert A denjenigen der Querschnittsgröße. Das Produkt EA nennt man die Dehnsteifigkeit.

Die Verlängerung $d\delta$ eines Stabelementes von der Ursprungslänge d/l ergibt sich unmittelbar zu $d\delta = \frac{N}{E \cdot A} \cdot d/l$. Integration über die Stablänge liefert

$$\delta = \int_{(l)} \frac{N}{E \cdot A} \cdot d/l.$$

Sind N, E und A über die Stablänge konstant, so ergibt sich mit

$$N = F \text{ unmittelbar } \delta = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{E \cdot A}{l} \delta.$$

Der Faktor $\frac{E \cdot A}{l}$ also die auf die Stablänge bezogene Dehnsteifigkeit, wird Federkonstante genannt und mit c bezeichnet:

$$F = c \delta \quad \text{mit} \quad c = \frac{E \cdot A}{l}.$$

Zum Schluss die Frage: Welche Belastung erzeugt in einem Stab nur (ausschließlich) den hier ermittelten Spannungs- und Verformungszustand? Die Antwort: Eine Zug- oder Druckkraft in Richtung der Stabachse, gesamtheitlich: Eine mittige Längskraft.

Hierzu ein kleines Zahlenbeispiel:

Ein Stahlstab (S235) der Länge $l = 5 \text{ m}$ wird durch die Längskraft $F = 80 \text{ kN}$ beansprucht. Welche Querschnittsfläche muss dieser Stab mindestens haben, wie groß ist die zugehörige Dehnung und um wieviel wird der Stab bei der Verformung länger bei einer Stahlspannung von 160 N/mm^2 ?

$$\text{Damit ergibt sich erf } A = \frac{N}{\sigma} = \frac{80000}{160} = 500 \text{ mm}^2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\text{und vorh } \epsilon = \frac{N}{E \cdot A} = \frac{80000}{210000 \cdot 500} = 0,762 \cdot 10^{-3} = 0,762 \frac{\text{mm}}{\text{m}}.$$

Die Verlängerung des Stabes beträgt $\delta = 0,762 \cdot 5 = 3,81 \text{ mm}$.

2.3.2 Zu einem Biegemoment gehörende Spannungen

In Abschnitt 2.1 haben wir die Beanspruchung eines (homogenen) doppelsymmetrischen Querschnitts, eines Rechteckquerschnitts, durch Biegemomente untersucht und dabei festgestellt, dass sich bei Beanspruchung durch ein in einer Symmetrie – Ebene des Stabes (etwa der x-z-Ebene) wirkendes Biegemoment eine zu dieser Ebene symmetrische Spannungsverteilung ergibt, bei der die Spannungsnulllinie mit

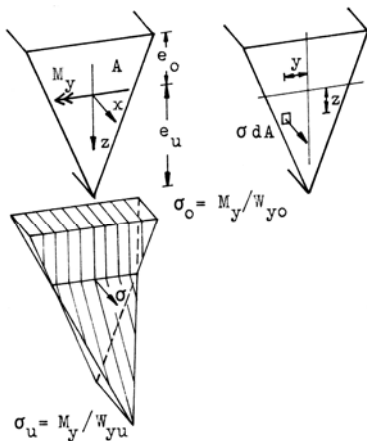


Bild 28

Biegemoment M_y und zugehörige Spannungsverteilung

der zweiten Symmetrie – Achse des Querschnitts (hier der y-Achse) zusammenfällt. Wir wollen jetzt einem Balken, der in der x-z-Ebene belastet wird, einen Querschnitt beliebiger Form geben und untersuchen, welche Forderungen an die Lage bzw. Orientierung dieses Querschnitts in Bezug auf das y-z-System gestellt werden müssen, damit die zu M_y gehörende Spannungsverteilung durch eine Formel vom Typ $\sigma = m \cdot z$ allein beschrieben werden kann. Auch wollen wir den Proportionalitätsfaktor m bestimmen (Bild 28).

Dazu formulieren wir zunächst die drei entsprechenden Äquivalenzbedingungen:

$$1) \int_{(A)} \sigma \cdot dA = N = 0$$

$$2) \int_{(A)} y \cdot \sigma \cdot dA = -M_z = 0$$

$$3) \int_{(A)} z \cdot \sigma \cdot dA = M_y$$

Wir verarbeiten die o. a. Beziehung $\sigma = m \cdot z$ und erhalten

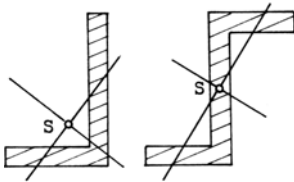


Bild 29
Lage der Schwerpunkshauptachsen
für L- und Z-Profil (qualitativ)

$$1a) \int_{(A)} m \cdot z \cdot dA = m \cdot \int_{(A)} z \cdot dA = 0$$

$$2a) \int_{(A)} y \cdot m \cdot z \cdot dA = m \cdot \int_{(A)} y \cdot z \cdot dA = 0$$

$$3a) \int_{(A)} z \cdot m \cdot z \cdot dA = m \cdot \int_{(A)} z^2 \cdot dA = M_y$$

Die erste Bedingung wird automatisch erfüllt sein, wenn wir, wie verabredet, die y-Achse durch den Schwerpunkt gehen lassen. Die zweite Bedingung freilich wird für eine beliebige bzw. willkürlich angenommene Orientierung der Querschnittsfläche bezüglich des orthogonalen Koordinatensystems (und damit bezüglich der Lastebene) nicht erfüllt sein, auch dann nicht, wenn wie hier verabredungsgemäß der

Flächenschwerpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Zu dem Term $\int y \cdot z \cdot dA$ ²⁴⁾ den man Zentrifugal- oder Deviationsmoment nennt und mit I_{yz} bezeichnet, liefern Flächenelemente in den vier Quadranten Beiträge unterschiedlichen Vorzeichens, je nachdem, ob das Produkt $y \cdot z$ ihrer Koordinaten positiv oder negativ ist. Die Flächenelemente im ersten und dritten Quadranten liefern positive Beiträge, diejenigen im zweiten und vierten Quadranten liefern negative Beiträge. Die Summe dieser Beiträge, also der Wert des Integrals, kann somit positiv oder negativ werden und wird für bestimmte Orientierungen des Koordinatensystems auf dem Querschnitt (oder umgekehrt) auch den Wert Null annehmen, wobei sich dann die positiven und negativen Beiträge genau ausgleichen. Koordinatenachsen, die so liegen, dass dies gerade eintritt, nennt man Schwerpunkthauptachsen. Die Bestimmung solcher Schwerpunkthauptachsen für beliebige Querschnittsformen werden wir in Kapitel 3 ausführlich besprechen. Im Vorgriff darauf zeigt Bild 29 deren Lage für einige technisch wichtige Querschnittsformen. Die dritte Gleichung schließlich liefert den Proportionalitätsfaktor m in der allgemeinen Form

$$m = \frac{M_y}{\int z^2 \cdot dA} \quad (A)$$

Man nennt den Ausdruck $\int z^2 \cdot dA$ Flächenträgheitsmoment um die y -Achse und hat dafür das Symbol I_y eingeführt:

$$I_y = \int z^2 dA \quad (A)$$

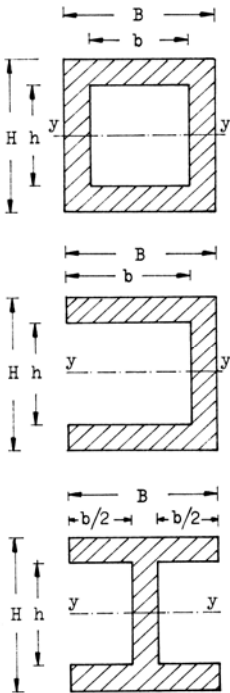
Da nur z im Quadrat vorkommt, liefern alle Flächenelemente positive Beiträge, sodass das axiale Flächenträgheitsmoment einer von Null verschiedenen Fläche stets positiv ist. Die Berechnung von axialen Flächenträgheitsmomenten für beliebige Querschnittsformen werden wir in Kapitel 3 ausführlich besprechen.

Wir stellen fest: Wenn Querschnittsfläche und orthogonales Koordinatensystem so zueinander liegen, dass die y - und z -Achse Schwerpunkthauptachsen sind, dann wird die zu einem Biegemoment M_y gehörende Spannungsverteilung durch die Formel

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$$

²⁴⁾ Wir brauchen nur den Fall $\int yz dA = 0$ zu untersuchen, da der Fall $m = 0$ trivial ist.

allein korrekt beschrieben. Wie man sieht, werden diejenigen Querschnittsfasern am meisten beansprucht, die den größten Abstand von der y -Achse haben. Man bezeichnet diese Rand – Abstände mit e_0 und e_u und schreibt

**Bild 30**

Zur Berechnung des axialen Trägheitsmomentes I_y

$$\sigma_0 = \frac{M_y}{I_y} e_0 \quad \text{und} \quad \sigma_u = \frac{M_y}{I_y} e_u.$$

Die Quotienten I_y/e_0 und I_y/e_u , die für jeden Querschnitt je einen festen Wert haben, hat man Widerstandsmoment genannt und mit W_{y0} bzw. W_{yu} bezeichnet:

$$\sigma_0 = \frac{M_y}{W_{y0}} \quad \text{und} \quad \sigma_u = \frac{M_y}{W_{yu}}$$

Für ein Biegemoment bestimmter Größe hängen die in einem Querschnitt auftretenden Randspannungen also nur ab von den entsprechenden Widerstandsmomenten: Je größer ein Widerstandsmoment, desto kleiner die zugehörige Randspannung. Die Übertragung von Biegemomenten kann deshalb besonders günstig bzw. wirtschaft-

lich mit solchen Querschnittsformen bewerkstelligt werden, die ein großes Widerstandsmoment haben bei kleinem Materialaufwand, also kleiner Querschnittsfläche.

Deutlicher als oben, wo die drei Größen σ , M und W sozusagen für einen Spannungsnachweis angeordnet sind, wird dies, wenn wir sie so umstellen, dass unmittelbar bemessen werden kann. Da, wenn zwei betragsmäßig verschiedene Widerstandsmomente vorhanden sind, das kleinere von ihnen zur größeren Randspannung führt und diese Randspannung zu σ nicht überschreiten darf, ergibt sich zu $M_y = W_y$ maßgebend \cdot zu σ , wenn das kleinere W_y mit W_y maßgebend bezeichnet wird. Wir erwähnen noch, dass W_y im Gegensatz zu I_y sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, je nachdem, ob e positiv oder negativ ist. In Kapitel 3 werden wir für verschiedene Querschnittsformen die Widerstandsmomente berechnen. Für alle technisch wichtigen Querschnittsformen sind die Lage der Schwerpunktsachsen, die zugehörigen axialen Trägheitsmomente und das jeweils kleinste Widerstandsmoment (letzteres ohne Vorzeichen) in Tabellenwerken zahl-

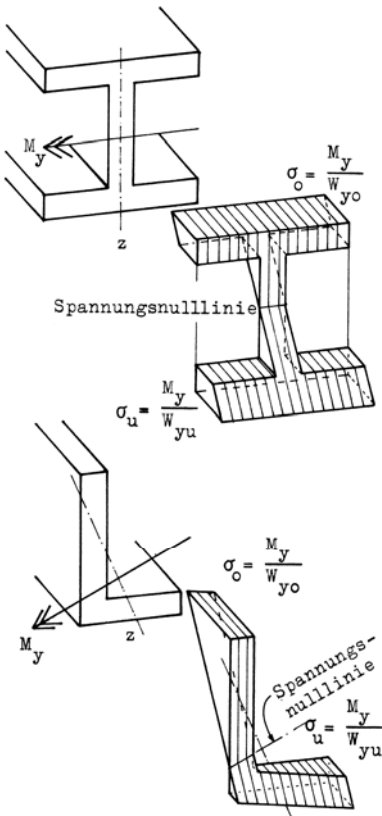


Bild 31

Normalspannungen auf einem I- und L-Querschnitt

lenmäßig angegeben. Hier zeigen wir für den in Bild 22 dargestellten Rechteckquerschnitt die Berechnung von I_y , W_{y0} , W_{yu} sowie I_{yz} .

$$I_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} z^2 dy dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 b dz = \frac{b}{3} \left[z^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Mit $e_u = +\frac{h}{2}$ und $e_0 = -\frac{h}{2}$ ergibt sich $W_{yu} = +\frac{bh^2}{6}$ bzw. $W_{y0} = -\frac{bh^2}{6}$.

$$I_{yz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} yz dy dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{2} \left[y^2 \right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z}{2} 0 dz = 0^{25)}$$

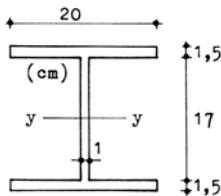


Bild 32

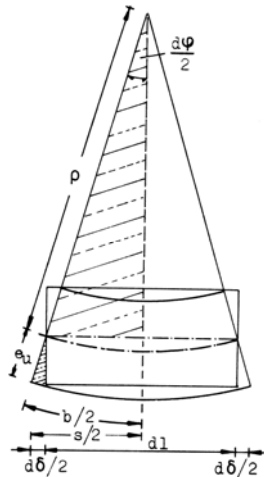


Bild 33 Zur Krümmung eines durch Biegemomente beanspruchten Stabelementes

²⁵⁾ Man sieht hier, dass das Zentrifugalmoment verschwindet schon dann, wenn eine der beiden Bezugsachsen eine Symmetrieachse ist.

Damit ergibt sich, wie wir schon wissen, $\text{zul } M_y = \text{zul } \sigma \cdot b \cdot h^2/6$. Das zulässige übertragbare Biegemoment ist also proportional dem Quadrat der Balkenhöhe. Daher kann z. B. durch eine Verdoppelung der Balkenhöhe das übertragbare Biegemoment vervierfacht werden. Die Querschnittsfläche, die ja von der Balkenhöhe linear abhängt, wird dabei nur verdoppelt.

Da man den in Bild 32 gezeigten Querschnitt als Differenz verschiedener Rechtecke bilden kann, die alle eine und dieselbe Schwerachse $y-y$ haben, kann man die Trägheitsmomente I_y solcher Querschnitte als Differenz der Trägheitsmomente entsprechender Rechtecke darstellen:

$$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

Das Widerstandsmoment W_y solcher Querschnitte ergibt sich dann in der Form

$$W_y = \frac{2}{H} \cdot \left(\frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} \right).$$

Wir haben oben festgestellt, dass in Bezug auf die Übertragung von Biegemomenten die Wirtschaftlichkeit eines Querschnitts sich darstellen lässt als Quotient $\frac{\text{Widerstandsmoment}}{\text{Flächeninhalt}}$. An einem Zahlenbeispiel wollen wir exemplarisch zeigen,

wie man durch Verlagerung von Querschnittsteilen aus der Umgebung der neutralen Faser in den hochbeanspruchten Randbereich das Widerstandsmoment und das Trägheitsmoment beträchtlich steigern kann. Ein Rechteckquerschnitt $B \cdot H = 3,84 \cdot 20 = 76,8 \text{ cm}^2$ hat das Trägheitsmoment

$$I_y = \frac{1}{12} 3,84 \cdot 20^3 = 2,56 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$$

und das Widerstandsmoment

$$W_y = \frac{1}{6} 3,84 \cdot 20^2 = 256 \text{ cm}^3.$$

Das in Bild 32 dargestellte I-Profil gleicher Querschnittsfläche hat das Trägheitsmoment

$$I_y = \frac{1}{12} (20 \cdot 20^3 - 19 \cdot 17^3) = \frac{1}{12} (16 \cdot 10^4 - 9,33 \cdot 10^4) = 5554 \text{ cm}^4$$

und das Widerstandsmoment $W_x = 555 \text{ cm}^3$. Wir sehen: Das Trägheitsmoment und das Widerstandsmoment haben sich durch die hier vorgenommene Verlegung des Materials um mehr als 100 Prozent erhöht. Dies ist der Grund, weshalb für Biegebalken aus Stahl I-Profile hergestellt bzw. verwendet werden.

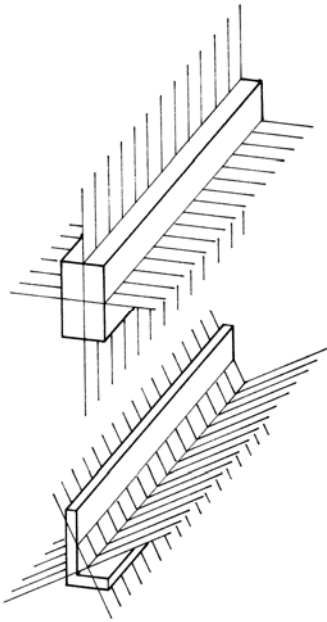


Bild 34
Hauptebenen

Für einige Querschnittsformen zeigen wir qualitativ den Verlauf der Normalspannungen in Bild 31.

Noch ein Wort zu der durch ein Biegemoment hervorgerufenen Verformung eines Stabelementes. Die untere Stabfaser des in Bild 33 gezeigten Elementes erfährt wegen

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{d\delta}{dl} \quad \text{die Verlängerung}$$

$$d\delta_u = \frac{M_y \cdot e_u}{E \cdot I_y} dl; \quad \text{die obere entsprechend}$$

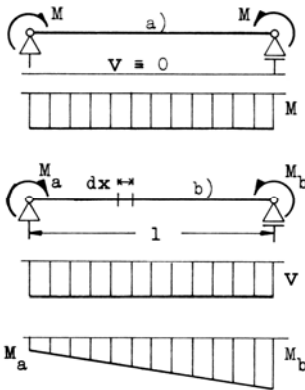
$$d\delta_0 = \frac{M_y \cdot e_0}{E \cdot I_y} dl.$$

Dazwischen liegen in der Höhe des Schwerpunktes senkrecht zur Lastebene Stabfasern, die unbeansprucht bleiben und dementsprechend keine Längenänderung erfahren. Man nennt sie neutrale Fasern. Eine solche Verformung ist nun nur möglich, wenn, sich das Element in der x-z-Ebene (der Lastebene) kreisbogenförmig krümmt: Lastebene = Biege – Ebene. Für diese Krümmung wollen wir nun einen Wert ermitteln. Bekanntlich ist sie in der Mathematik definiert als Kehrwert des

zugehörigen Krümmungsradius ρ , den wir somit zu bestimmen haben. Dabei werden wir einige Vereinfachungen vornehmen, wozu uns die Tatsache berechtigt, dass die Krümmung außerordentlich klein ist. Dies freilich wird sofort klar, wenn man bedenkt, dass die größtmögliche elastische Dehnung unserer Baustoffe bei etwa 1 % liegt, die Verlängerung der Randfaser also etwa nur 1/1000 ihrer Ursprungslänge beträgt. Ein Blick auf Bild 33 liefert unmittelbar

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\rho + e_u} \quad \text{und} \quad \arcsin \frac{d\varphi}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{\rho + e_u}$$

Da, wie die Reihenentwicklung der Sinus – Funktion zeigt, bei kleinen Winkeln, deren Sinus und Arcus gleichgesetzt werden können, ergibt sich $s \approx b$. Die Länge des Kreisbogens stimmt also für sehr kleine Öffnungswinkel mit der Länge der Sekante überein.

**Bild 35**

Biegebalken mit Querkraft (b) und (a)

Damit können wir die Verlängerung korrekt in unser Bild wie dargestellt eintragen und erhalten wegen der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke

$$\frac{e_u}{d\delta} = \frac{\rho}{dl} \quad \text{also} \quad \rho = \frac{e_u \cdot dl}{\frac{M_y \cdot e_u}{E \cdot I_y} \cdot dl} = \frac{E \cdot I_y}{M_y}$$

Die Krümmung ergibt sich damit zu

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

Für ein Biegemoment bestimmter Größe hängt die Krümmung eines Stabelementes also nur ab von E und I . Der Elastizitätsmodul E kennzeichnet den Einfluss des Materials, das axiale Trägheitsmoment I denjenigen von Querschnittsgröße und -form. Das Produkt $E \cdot I$ nennt man Biegesteifigkeit.

Wir vergleichen die oben für die Krümmung und für die Dehnung (siehe Abschnitt 2.3.1) ermittelten Ausdrücke und stellen große Ähnlichkeit im Aufbau fest. Wie eine Multiplikation der Dehnung mit dl die gegenseitige Verschiebung der zwei zugehörigen Querschnitte lieferte, so liefert eine Multiplikation der Krümmung mit dl die gegenseitige Neigung der entsprechenden zwei Querschnitte:

$$\chi \cdot dl = \frac{dl}{\rho} = \tan d\varphi \approx d\varphi = \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot dl \quad .$$

Bei der Untersuchung des Zugstabes (Abschnitt 2.3.1) konnten wir von der Verformung des Stabelementes durch Integration über die Stablänge auf die wesentliche Verformung des ganzen Stabes übergehen, also dessen Längenänderung bestimmen. Ein ähnlicher Übergang zu einer entsprechenden Größe, nämlich der – senkrecht zur unverformten Stabachse gemessenen – Durchbiegung w ist hier auch möglich; da er hier nicht ganz so einfach ist wie dort, werden wir in einem besonderen Kapitel später darüber sprechen.

Zum Schluss wieder die Frage: Welche Belastung erzeugt in einem Balken ausschließlich, den hier ermittelten Spannungs- und Verformungszustand? Für die Antwort zunächst eine Definition: Eine durch Stabachse und eine der beiden Schwerpunkthauptachsen aufgespannte Ebene nennen wir Hauptebene (Bild 35). und nun die Antwort: Ein in seinen Endquerschnitten angreifendes und in einer Hauptebene wirkendes Momentenpaar (Bild 35).

2.4 Spannungen in einem Rechteckquerschnitt , auf den eine Querkraft, gehörend zu einer Biegemomentenänderung, wirkt

Während zu Normalkräften und Biegemomenten eine Querschnittsbelastung durch Normalspannungen gehört, stellt eine Querkraft, wie sie etwa in Bild 36 auftritt, die Resultierende von Tangentialspannungen dar. Wir haben in Bild 36 eine Querkraft V_z und über den Querschnitt (irgendwie) verteilte parallel zu V_z verlaufende Schubspannungskräfte dargestellt und wollen jetzt das Verteilungsgesetz ermitteln. Wie bisher schreiben wir zunächst die Äquivalenzbedingungen an:

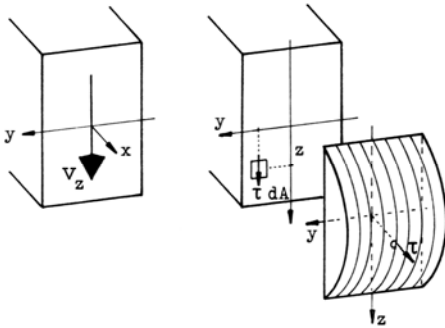


Bild 36
Zur Berechnung von Schubspannungen

$$1) \int_{(A)} \tau_{xz} \cdot dA = V_z$$

$$2) \int_{(A)} y \cdot \tau_{xz} \cdot dA = M_x = 0$$

Während wir bei Normalspannungen aufgrund einer Verformungsbetrachtung eine qualitative Angabe machen konnten über die Art ihrer Verteilung, ist das hier nicht möglich. Verlockend freilich ist diese Überlegung: Da die Beobachtung gezeigt hat, dass ebene Querschnitte eines Biegebalkens bei der Verformung nahezu eben bleiben, muss die Querkraftverformung eines Stabelementes wie in (Schnitt) Bild 37 dargestellt sein. Zu dieser gleichmäßigen Verzerrung gehört eine gleichmäßige Verteilung der Tangentialspannungen. Damit wäre τ_{xz} konstant, könnte in den Gleichungen 1 und 2 jeweils vor das Integral gezogen werden und ergäbe sich dann zu $\tau_{xz} = \frac{V_z}{A}$. Leider ist diese gleichmäßige Verteilung nicht möglich, wie wir sofort sehen werden.

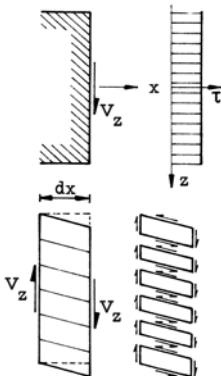


Bild 37
Zur Verteilung der Schubspannungen

Schneiden wir aus dem Inneren eines beliebig belasteten Biegebalkens ein Element heraus, dann müssen auf seiner Oberfläche die dabei zerstörten Spannungskräfte als äußere Kräfte angebracht werden. Im Allgemeinen werden es die in Bild 38 dargestellten Kräfte²⁶⁾ sein. Unter der Wirkung dieser Schnittkräfte muss das Element natürlich im Zustand der Ruhe bleiben, die Schnittkräfte müssen also unter sich im Gleichgewicht sein. Dann muss u.a. die Bedingung $\sum M_y = 0$ (etwa bezogen auf den Element – Schwerpunkt) von ihnen erfüllt werden:

$$\tau_{xz} dz \frac{dx}{2} + (\tau_{xz} + d\tau_{xz}) dz \frac{dx}{2} - \tau_{zx} dx \frac{dz}{2} - (\tau_{zx} + d\tau_{zx}) dx \frac{dz}{2} = 0$$

Da die Element – Abmessungen dz und dx infinitesimal klein sind, kann der Beitrag des Zuwachses der Spannungen gegenüber dem Beitrag der Spannungen selbst vernachlässigt werden. Nach Division durch $dz \, dx$ ergibt sich dann $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. In Worten bedeutet das: Die in zwei zueinander senkrechten Flächen liegenden Schubspannungskomponenten, welche normal zur Schnittlinie der beiden Flächen gerichtet sind, sind nahe der Schnittlinie gleich groß. Diese Komponenten sind entweder beide zur Schnittkante hin oder beide von ihr fort gerichtet. Man bezeichnet diese beiden Komponenten als einander zugeordnete Schubspannungen. Dies bedeutet, dass Elemente an der Oberfläche eines Stabes auf den zur Oberfläche senkrechten Schnittflächen frei sein müssen von Schubspannungen, die zur Oberfläche hin (oder von ihr fort) gerichtet sind, wenn nicht auf dieser Oberfläche äußere Tangentialkräfte wirken.

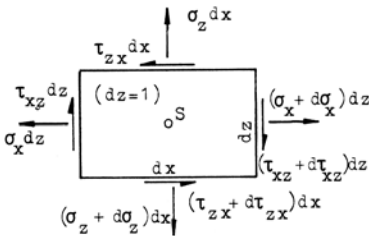
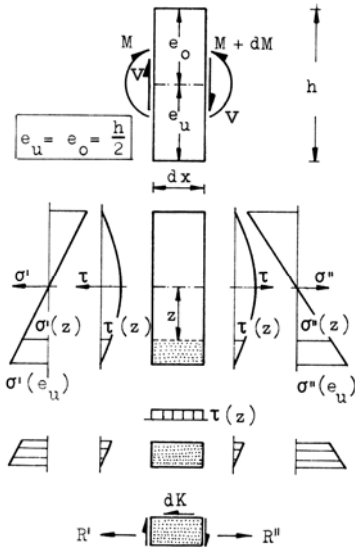


Bild 38
Betrachtung am Element

²⁶⁾ Wir haben in diesem Bild beim Spannungszuwachs das totale Differenzial angegeben, um die Lesbarkeit zu verbessern. Tatsächlich muss natürlich an dessen Stelle das partielle Differenzial treten, also etwa anstatt $d\sigma_x$ der Ausdruck $(\partial\sigma_x/\partial x)dx$, da ja die Spannung σ_x ihren Wert nicht nur in x -Richtung sondern auch in z -Richtung ändert.

**Bild 39**

Zur Berechnung der Schubspannungen

Überprüfen wir daraufhin die oben vorgeschlagene Schubspannungsverteilung, dann sehen wir sofort, dass sie diese (Rand-) Bedingungen nicht erfüllt: Die Schubspannung ist am oberen und unteren Querschnittsrand nicht Null sondern ebenso groß wie etwa auf halber Höhe, nämlich V_z/A . Es muss also eine andere Schubspannungsverteilung gefunden werden; eine solche, dass τ_{xz} sich dabei am oberen und unteren Rand zu Null ergibt. Bevor wir uns an ihre Herleitung machen, spekulieren wir: Wird es eine geradlinige Spannungsverteilung sein? Wird es eine parabolische Spannungsverteilung sein? Da die Schubspannung an beiden Bereichsenden verschwinden und dazwischen von Null verschieden sein muss, würde bei einer geradlinigen Verteilung zwangsläufig irgendwo ein Knick in der Schubspannungslinie sein müssen. Da solch ein Knick durch nichts mechanisch zu erklären oder zu rechtfertigen ist, scheidet eine linear über die Querschnittshöhe veränderliche Schubspannung ebenso aus wie eine konstante. Sie wird also mit Sicherheit mindestens parabolisch über die Querschnittshöhe verteilt sein. Wie finden wir nun diese Schubspannungsverteilung? Nun, da die hier gegebene Querkraft V_z unlösbar verbunden ist mit einer Änderung des Biegemomentes M_y , wird es nicht verkehrt sein, die zugehörigen Biegespannungen in unsere Betrachtung mit einzubeziehen. In Bild 39 haben wir das in Bild 37 gezeigte Stabelement noch einmal dargestellt, auf dessen Schnittflächen Biegespannungen bekannter Größe und Schubspannungen (noch) unbekannter Größe wirken. Wir führen jetzt einen weiteren Schnitt horizontal durch dieses Stabelement und müssen dann natürlich auf der neu entstandenen (horizontalen) Schnittfläche ebenfalls flächenmäßig verteilte Schnittkräfte anbringen, allgemein eine Tangential- und eine Normalspannungsbelastung. Da, wie die

Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Z = 0$ unmittelbar zeigt, σ_z gleich Null sein muss, zeigen wir von vornherein nur die Schubspannungskräfte. Mit den Beziehungen von Bild 39 liefert $\Sigma X = 0$ die Gleichung

$$R' + dK - R'' = 0,$$

$$\text{also } dK = R'' - R'.$$

Mit

$$R'' = \int_z^{\frac{h}{2}} (\sigma + d\sigma) \cdot b \cdot dz = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{M+dM}{I} \cdot z \cdot b \cdot dz = \frac{M+dM}{I} \int_z^{\frac{h}{2}} z \cdot b \cdot dz = \frac{M+dM}{I} \cdot S_y(z)$$

und

$$R' = \int_z^{\frac{h}{2}} \sigma \cdot b \cdot dz = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{M}{I} \cdot z \cdot b \cdot dz = \frac{M}{I} \cdot \int_z^{\frac{h}{2}} z \cdot b \cdot dz = \frac{M}{I} \cdot S_z(z)$$

ergibt sich

$$dK = \frac{dM}{I} \cdot \int_z^{\frac{h}{2}} b \cdot z \cdot dz = \frac{dM}{I} \cdot S_y(z).$$

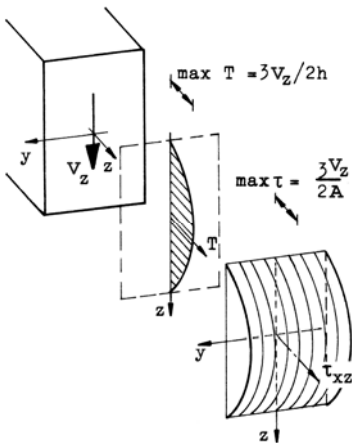


Bild 40

Verteilung der bezogenen Schubkraft und der Schubspannung

Wir haben dabei das statische Moment der abgeschnittenen Teilquerschnittsfläche in Bezug auf die y-Achse mit dem Symbol $S_y(z)$ belegt. Dieses dK ist die in der entsprechenden horizontalen Längsschnittfläche $b \cdot dx$ von dem oberen Teil des Sta-

belementes auf den unteren Teil übertragene Schubkraft. Die auf die (Schnitt-) Länge dx bezogene Schubkraft nennt man Schubfluss $T = \frac{dK}{dx}$. Dieser ergibt sich damit zu

$$T = \frac{dM \cdot S_y(z)}{dx \cdot I} = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{I},$$

da $\frac{dM}{dx} = V_z$ gilt. Um von diesem Schubfluss, der für sich schon eine, wie wir noch sehen werden, für die Praxis äußerst wichtige Größe darstellt (etwa bei der Dübelberechnung), zur Schubspannung zu kommen, müssen wir eine Annahme hinsichtlich seiner Verteilung über die Balkenbreite machen. Wenn wir annehmen, dass in y -Richtung im Stab weder Normalspannungen noch Schubspannungen wirken, so folgt daraus zwangsläufig, dass sich der Schubfluss gleichmäßig über die Balkenbreite verteilt: $\tau = \frac{T}{b}$.

Wegen der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen sind damit auch die entsprechenden in der Querschnittsfläche wirkenden Schubspannungen bekannt:

$$\tau_{xz}(z) = \tau_{zx}(z) = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b} \quad 27)$$

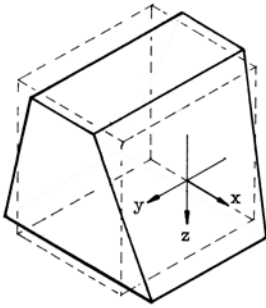
Mit $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ und $S_y(z) = \int_z^{\frac{h}{2}} z \cdot b \cdot dz = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]$ ergibt sich

$$\tau_{xz}(z) = \frac{6 \cdot V_z}{b \cdot h^3} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right],$$

also die erwartete parabolische Schubspannungsverteilung.

Mit $\tau_{xz}(-h/2) = \tau_{xz}(+h/2) = 0$ sind die Randbedingungen am oberen und unteren Querschnittsrand erfüllt. Sie sind auch an den seitlichen Rändern erfüllt, da die Schubspannung überall im Querschnitt und also auch dort der resultierenden Kraft V parallel wirkt. In Höhe der neutralen Faser, also entlang der Spannungsnulllinie erreichen Schubfluss und Schubspannungen ihr Maximum:

²⁷⁾ International wird diese Formel nach Dmitri Zhuravski (andere Schreibweise: Jourawski), 1821-1891, benannt. Verballhornisiert in Studentenkreisen heißt diese Formel auch: Kusinenformel, weil mit der früheren Bezeichnung für die Querkraft Q sich diese Formel ähnlich wie „Kusine“ anhörte.

**Bild 41**

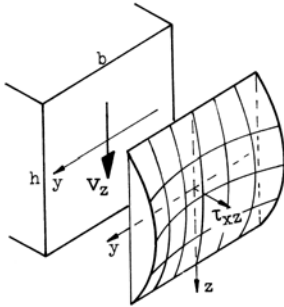
Verformung eines Stabelementes bei Beanspruchung durch M_V

$$\max T = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot h} \quad \text{bzw.} \quad \max \tau_{xz} = \tau_{xz}(0) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot A}.$$

Das statische Moment der abgeschnittenen Querschnittsfläche beträgt in dieser Höhe $S_y = S_y(0) = \frac{b \cdot h^2}{8} S_x$. Bild 40 zeigt den Verlauf des Schubflusses und der Schubspannung.

Bevor wir uns neuen Dingen zuwenden, wollen wir uns die Aufgabe des Schubflusses, wie sie aus der oben gezeigten Herleitung deutlich wird, klar bewusst machen. Schneidet man aus einem Stab ein Element von der Länge 1 heraus und ändert sich auf dieser Länge das Biegemoment, so gehört dazu eine unterschiedliche Normalspannungsbelastung der beiden Querschnittsflächen. Da jedoch bei allen zu Biegemomenten gehörenden Normalspannungsbelastungen die Resultierende der Druckspannungen betragsmäßig stets gleich ist der Resultierenden der Zugspannungen, ergibt sich auf beiden (Gesamt-) Querschnittsflächen die resultierende Kraft $X = 0$: Die Normalspannungen gleichen sich untereinander aus. Die Frage ist: Wie geschieht dieser Ausgleich, wo ist der dazugehörige Kraftfluss? Diesen „geheimnisvollen“ Kraftfluss entdecken wir, wenn wir sozusagen seinen Weg durch einen etwa horizontalen Längsschnitt blockieren. Durch diesen Längsschnitt zerfällt das Element in einen oberen und einen unteren Teil, von denen wir zunächst den oberen betrachten mögen. Auf seinen beiden Querschnittsflächen wirken verschiedene große Normalspannungen, die zu zwei verschiedenen großen resultierenden X-Kräften führen, die zu einer Kraft dK zusammengefasst werden können. Das Gleiche beobachten wir am unteren Teil: Auch auf seinen Querschnittsflächen wirken Normalspannungen, die zu zwei verschiedenen großen resultierenden X-Kräften führen, die wieder zu einer Kraft zusammengefasst werden können. Diese Kraft ist der oben erwähnten Kraft dK gleich und ihr entgegengesetzt. Sie schafft den Ausgleich über die Querschnittshöhe. Es leuchtet somit unmittelbar ein, dass diese Kraft, mit Null am unterem (oder oberen) Querschnittsrand beginnend, betragsmäßig solange mit

steigender (oder fallender) Höhenlage der Längsschnittfläche wächst, wie Spannungen eines und desselben Vorzeichens auf den Querschnittsflächen des abgeschnittenen Teilkörpers wirken. Wechselt dann in Höhe der neutralen Faser das Vorzeichen dieser Spannungen, dann nimmt diese Kraft dK wieder ab: eine gewisser Ausgleich findet dann wieder innerhalb der Querschnittsflächen statt.

**Bild 42**

Zur Verteilung der Schubspannungen

Die Zu- oder Abnahme dieser Kraft von einem Längsschnitt zum nächsten ist umso größer, je größer die Resultierende der Spannungen der beiden neu hinzugekommenen Querschnittsflächen ist. Beim vorliegenden Rechteckquerschnitt ist die Änderung dementsprechend am größten in den am weitesten von der Spannungs- Nulllinie entfernt liegenden Querschnittsbereichen: oben und unten. Der Verlauf des Schubflusses (Bild 40) zeigt dies deutlich.

Abschließend weisen wir noch auf zwei Dinge hin:

- 1) Wir haben oben angenommen, dass in Richtung der Balkenbreite keine Spannungen im Balken auftreten und dementsprechend die Schubspannungen über die Balkenbreite konstant sind. Diese Annahme trifft nicht exakt zu, wie die Beobachtung des Formänderungsverhaltens eines Biegebalkens zeigt. Wegen der Querkontraktion geht nämlich mit einer Dehnung bzw. Stauchung des Materials in Längsrichtung Hand in Hand eine Stauchung bzw. Dehnung in Querrichtung. Ein Stabelement verformt sich bei Biegung deshalb wie in Bild 41 gezeigt. Zu dieser Verformung gehören unter anderem Schubspannungen etwa auf z -Ebenen in y -Richtung, die eine ungleichmäßige Verteilung der Schubspannungen τ_{zx} bzw. τ_{xz} über die Balkenbreite zur Folge haben. Dabei nehmen (beim Rechteckquerschnitt) die Schubspannungen von der Mitte aus nach den seitlichen Querschnittsrändern hin zu, sodass eine Sattelfläche wie in Bild 42 entsteht.²⁸⁾ Die Abweichungen von den oben berechneten Mittelwerten sind für die im Bauwe-

²⁸⁾ Wie wir noch sehen werden, kann für andere Querschnittsformen eine umgekehrte Tendenz gültig sein.

sen üblichen Seitenverhältnisse $b/h < 1$ gering, wie Bild 43 zeigt, und werden in der Praxis vernachlässigt.

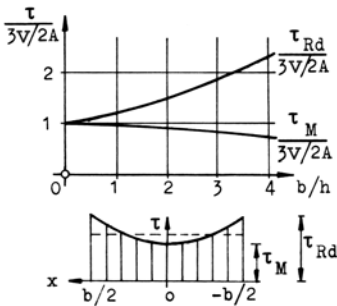


Bild 43 Verlauf von $\tau_{zy}(0)$

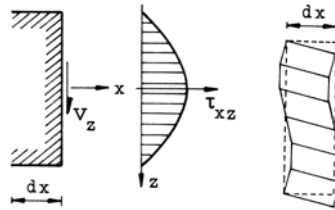


Bild 44 S-förmige Verwölbung der Querschnittsebenen

- 2) Wir haben weiter oben bei der Berechnung der Normalspannungsverteilung angenommen, dass ebene Querschnitte bei der (allgemeinen Biege-) Verformung eben bleiben. Die hier ermittelte über die Querschnittshöhe ungleichmäßige Schubspannungsverteilung jedoch geht Hand in Hand mit einer S-förmigen Verwölbung der Querschnitte, da Körperelemente in verschiedenen Höhenlagen durch verschieden große Schubspannungen belastet werden und sich dementsprechend verschieden stark verformen (Bild 44). Die Verwendung der Bernoulli – Hypothese führt also im Falle der Querkraft – Biegung auf einen Widerspruch: Man geht aus von der Annahme, ebene Querschnitte bleiben bei der Verformung eben, berechnet eine entsprechende Normalspannungsverteilung und dann die zugehörige Schubspannungsverteilung und stellt schließlich fest, dass zu dieser Verteilung zwingend eine Verwölbung der Querschnitte gehört, diese also mit Sicherheit nicht eben bleiben. Zum Glück ist es nun so, dass die mit dieser Verwölbung der Querschnitte i. A. verbundene Längenänderung²⁹⁾ der einzelnen Stabfasern bei stabförmigen Bauteilen sehr klein sind im Vergleich mit denjenigen Längenänderungen, die zu der durch Biegemomente verursachten Neigung derselben Querschnitte gehören. Deshalb kann bei der Untersuchung von (schlanken) Balken ohne weiteres mit den oben abgeleiteten Formeln gerechnet werden.

²⁹⁾ Diese Längenänderung der Stabfasern tritt nicht auf, wenn die Verwölbung entlang der Stabachse konstant ist. Dazu muss a) die Querkraft über x konstant sein und b) die Verwölbung überall ungehindert stattfinden können, also auch an den Balkenenden. Der in Bild 35(b) gezeigte Einfeldbalken erfüllt diese Bedingungen.

2.4.1 Schubspannungen in beliebigen, zur Lastebene symmetrischen Querschnitten

Wir haben oben einen Biegebalken mit Rechteckquerschnitt in einer seiner Symmetrieebenen quer – belastet und die zugehörige Schubspannungsverteilung berechnet. Dabei wurden, wie wir gesehen haben, alle (Kräfte-) Randbedingungen automatisch erfüllt. Wir wollen jetzt prüfen, wie weit die Formel

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b}$$

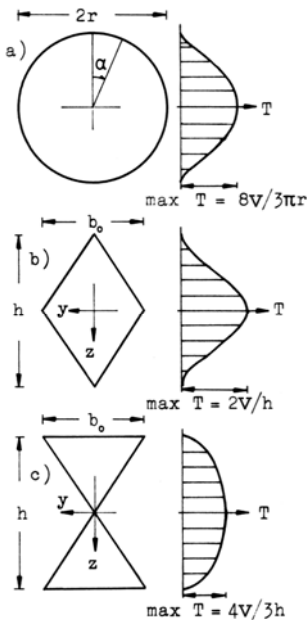


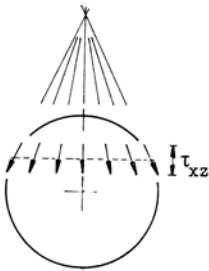
Bild 45

Zur Abhängigkeit des Verlaufes der bezogenen Schubkraft von der Querschnittsform

allein auch bei anderen zur Lastebene symmetrischen Querschnittsformen den Schubspannungsverlauf korrekt beschreibt. Dabei unterscheiden wir zwei Arten von Querschnitten: die fülligen Querschnitte und die dünnwandigen Querschnitte. Zunächst füllige Querschnitte, etwa die in Bild 45 dargestellten. Im Hinblick auf die Anwendung der o.a. Formel unterscheiden sich diese Querschnitte vom Rechteckquerschnitt dadurch, dass die Breite b sich über die Höhe ändert, $b = b(z)$. Das kann bei der Rechnung berücksichtigt werden und führt – das ist nicht beunruhigend – zu einer nicht mehr parabolischen Verteilung der Schubspannungen τ_{xz} . Diese Schubspannungen müssen teilweise ergänzt werden durch τ_{xy} -Spannungen, da ja

die resultierenden Schubspannungen nirgends eine Komponente senkrecht zu einem freien Rand haben dürfen. Zu den zwei o.a. Äquivalenzbedingungen kommt hier also noch als dritte hinzu $\int \tau_{xy} dA = 0$. Bild 46 zeigt die Richtung der entsprechenden Kräfte für einen Kreisquerschnitt. Für diesen Querschnitt ergibt sich mit

$$I_y = \frac{\pi r^4}{4}, \quad S_y(\alpha) = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \alpha \quad \text{und} \quad b(\alpha) = 2r \sin \alpha$$

**Bild 46**

Zur Richtung resultierender Schubspannungskräfte in einem Kreisquerschnitt

der in einer horizontalen Längsschnittfläche zu übertragende Schubfluss in der Form

$$T(\alpha) = \frac{V \cdot S}{I} = \frac{8 \cdot V \cdot \sin^3 \alpha}{3 \cdot \pi \cdot r}$$

**Bild 47**

Dünnwandige Querschnitte, symmetrisch zur Lastebene

und die zugehörige Schubspannung im Querschnitt zu

$$\tau_{xz}(\alpha) = \frac{4 \cdot V \cdot \sin^2 \alpha}{3 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Für $\alpha = 90^\circ$ liefert das den in der neutralen Faser zu übertragenden Schubfluss $\max T = \frac{8 \cdot V}{3 \cdot \pi \cdot r}$ und entsprechend die größte im Querschnitt auftretende Schubspannung

$$\max \tau = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot A}.$$

Dieser Spannungswert ist freilich auch wieder ein über die Breite $2r$ gemittelter Wert. Genauere Untersuchungen ergeben, dass bei einem solchen Kreisquerschnitt (wie bei allen elliptischen Querschnitten) die Schubspannungen längs der Biegespannungs-Nulllinie von der Mitte zu den seitlichen Rändern hin leicht abfallen.³⁰⁾ Bei dem rhombusförmigen Querschnitt nach Bild 45(b) ergibt sich mit

$$I_y = b h^3 / 48, \quad S_y(z) = \frac{b}{6 \cdot h} \cdot \left[4 \cdot z^3 - 3 \cdot h \cdot z^2 + \frac{1}{4} \cdot h^3 \right] \quad \text{und}$$

$b = \frac{b_0}{h}(h - 2 \cdot z)$ der in einer horizontalen Längsschnittfläche zu übertragende Schubfluss

$$T(z) = \frac{8 \cdot V}{h} \cdot \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]$$

und die zugehörige Schubspannung im Querschnitt

$$\tau_{xz}(z) = \frac{8 \cdot V}{b \cdot (h - 2 \cdot z)} \cdot \left[4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]$$

³⁰⁾ Es ist zu vermuten, dass zwischen dem Rechteckquerschnitt und einem elliptischen Querschnitt eine Querschnittsform liegt, bei der die Schubspannungen in der neutralen Faser tatsächlich konstant über die Balkenbreite sind. Diese Querschnittsform gibt es; ihre Bezeichnung folgt der Gleichung $\left(\frac{y}{a} \right)^\mu + \left(\frac{z}{b} \right)^2 = 1$. Dabei ist μ die Querdehnzahl (für Stahl 0,3).

Für $z = 0$ liefert der in der neutralen Faser zu übertragenden Schubfluss $\max T = \frac{2 \cdot V}{h}$ und entsprechend die größte im Querschnitt auftretende Schubspannung

$$\max \tau = \frac{2 \cdot V}{b \cdot h} = 2 \frac{V}{A}$$

In dem für Querkraftbiegung unbrauchbaren Querschnitt nach Bild 45(c) ergäbe sich mit

$$I_y = b h^3 / 16, \quad S_y(z) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^2 \cdot \left[1 - 8 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad \text{und} \quad b(z) = \frac{b_0}{h} \cdot z \quad \text{der in}$$

einer horizontalen Längsschnittfläche zu übertragende Schubfluss

$$T(z) = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot h} \cdot \left[1 - 8 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$$

und die zugehörige Schubspannung im Querschnitt

$$\tau_{xz}(z) = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot b \cdot z} \cdot \left[1 - 8 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right].$$

Für $z = 0$ ergäbe sich der in der neutralen Faser zu übertragende Schubfluss

$$\max T = \frac{4 \cdot V}{3 \cdot h} \quad \text{und die zugehörige Schubspannung} \quad \tau_{xz}(0) = \infty.$$

Hier zeigt sich mathematisch, dass ein solcher Querschnitt für Querkraftbiegung nicht zu gebrauchen ist und entsprechend modifiziert werden müsste. Ein Blick auf die in Bild 45 dargestellten Schubflussverteilungen bestätigt das in Abschnitt 2.4 gesagte: Der Schubfluss ändert sich von Längsschnitt zu Längsschnitt dort besonders viel, wo die Resultierende der Normalspannungen auf den neu hinzugekommenen Querschnittsteilflächen besonders groß ist. Deren Größe hängt ab nicht nur von der Größe der Normalspannung, sondern auch von der Breite der neu hinzugekommenen Querschnittsteilfläche.

Und nun die dünnwandigen Querschnitte, wie etwa das I- und das T-Profil oder auch der Kreisring (Bild 47). Bei der Behandlung solcher Querschnitte gewinnt vor allem die Forderung an Bedeutung, dass die Schubspannungen in der Nähe eines Randes keine Komponenten senkrecht zu diesem Rand haben dürfen, also entweder verschwinden oder parallel zu diesem Rand verlaufen müssen. Damit liegt die Richtung der wesentlichen Schubspannungen in einer Querschnittsfläche fest: Sie ist gleich der Richtung der Profilmittellinie. Man wird deshalb für die Schubspannung

in einem bestimmten Punkt eines dünnwandigen Trägerquerschnitts dann mit der o.a. Formel einen vernünftigen Wert errechnen, wenn man durch diesen Punkt einen Schnitt führt, der die in der Nähe liegenden Querschnittsränder senkrecht trifft.³¹⁾ Dabei wird stillschweigend angenommen, dass sich die Schubspannungen gleichmäßig über die entsprechende Schnittbreite verteilen, was sicherlich sinnvoll und zulässig ist. Für die Bezeichnung so errechneter Schubspannungen wird das orthogonale y - z -System nicht immer günstig oder überhaupt geeignet sein, man denke an den Kreisring. Darüber werden wir noch sprechen müssen.

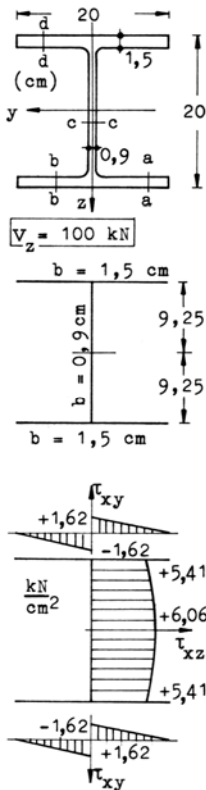
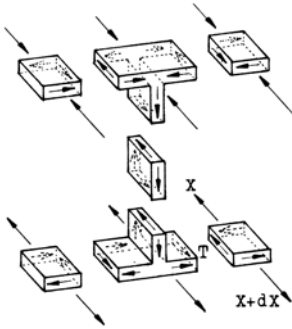


Bild 48
Schubspannung auf einem I-Querschnitt

³¹⁾ Verletzt man diese Regel bei der Schnittführung, so wird man Spannungen und Spannungswerte ermitteln, die uninteressant sind und einen nichtssagenden Mittelwert mit unzulässig großer Streuung darstellen.

**Bild 49**

Zur Festlegung der Vorzeichen von Schubspannungen

Wir wollen nun annehmen, ein Biegebalken in der Form eines IPB 200 (HE200B) werde in der x - z -Ebene belastet, wobei sich an einer Stelle die Querkraft $V_z = 100 \text{ kN}$ ergeben möge. Die zugehörige Schubspannungsverteilung auf einem positiven Schnittufer soll ermittelt werden. Wir entnehmen zunächst Querschnittsabmessungen und Trägheitsmoment einer Profiltafel ($I_y = 5700 \text{ cm}^4$) und stellen den materiellen Querschnitt und – für die Berechnung besser geeignet – den Verlauf der Profilmittellinie dar (Bild 48). Dann beginnen wir mit der Bestimmung der Schubspannungen in einzelnen Punkten, zunächst etwa im rechten Teil des unteren Flansches. Führen wir einen Schnitt a - a am rechten Flansch-Ende (nicht eingezeichnet), so wird dadurch keine Querschnittsteilfläche abgetrennt: S_y und entsprechend τ_{xy} sind Null. Führen wir einen solchen Schnitt unmittelbar rechts neben dem Anschlusspunkt Steg-Flansch, so wird dadurch der halbe Flanschquerschnitt abgetrennt (nicht eingezeichnet) und es ergibt sich mit

$b = 1,5 \text{ cm}$ und $S_y = 10 \cdot 1,5 \cdot 9,25 = 138,8 \text{ cm}^3$ die Schubspannung $\tau_{xy} = 1,62 \text{ kN/cm}^2$. Führt man dazwischen Schnitte a - a (eingezeichnet) so zeigt sich, dass das zugehörige statische Moment S_y proportional der Entfernung vom rechten Flanschende ist; dementsprechend ist auch der Schubspannungsverlauf in diesem Bereich linear. Die Richtung der Schubspannungen in diesem Bereich, und damit ihr Vorzeichen, liefert eine Gleichgewichtsbetrachtung des durch den vertikalen Längsschnitt a - a abgetrennten Körperteils (Bild 49). Da bei einer positiven Querkraft das Biegemoment mit wachsendem x größer werden muss, muss im Bereich positiver Momente die auf dem Flanschquerschnitt liegende resultierende Zugkraft X ebenfalls in Richtung wachsender x größer werden: $X + dX$.³²⁾ Die Schubkraft T auf der durch den Längsschnitt a – a erzeugten Schnittfläche muss also in Richtung fallender x -Werte wirken (auf unserem Bild von vorn nach hinten), um die resultierenden Zugkräfte X und $X + dX$ im Gleichgewicht zu halten. Sie wirkt damit von derjeni-

³²⁾ Im Bereich negativer Biegemomente muss die auf diesem Flanschquerschnitt liegende resultierende Druckkraft kleiner werden mit wachsendem x .

gen Kante, die beiden hier betrachteten Schnittflächen gemeinsam ist, fort, sodass auch die zugeordnete Schubspannung in der Querschnittsfläche von dieser Kante fort gerichtet sein muss, also nach rechts wirkt. Wenn wir uns bei der Bezeichnung der Schubspannungen beziehen auf das eingezeichnete y-z-System, so handelt es sich dabei also um eine negative Schubspannung.

Nun zum linken Teil des unteren Flansches, etwa Schnitt b-b. Dem Betrage nach, das erkennt man sofort, entsprechen die Schubspannungen hier denen im rechten Flanschteil. Wegen der erforderlichen Symmetrie muss auch die Richtung der Schubspannung derjenigen im rechten Teil entsprechen; sie verläuft hier also nach links, in Richtung wachsender y-Werte, erhält also ein positives Vorzeichen.

Wir kommen nun zur Bestimmung der Schubspannungen im Steg und führen zunächst einen horizontalen (Längs-) Schnitt c-c unmittelbar oberhalb des Anschlusspunktes Steg – unterer Flansch (nicht eingezeichnet). Das statische Moment der abgeschnittenen Restfläche beträgt dann $S_y = 20 \cdot 1,5 \cdot 9,25 = 277,5 \text{ cm}^3$ sodass sich mit $b = 0,9 \text{ cm}$ die Schubspannung $\tau_{xz} = 5,41 \text{ kN/cm}^2$ ergibt, die auf der Querschnittsfläche nach unten gerichtet und damit positiv ist. Ein Schnitt c-c in Höhe des Schwerpunktes (nicht eingezeichnet) liefert $S_y = 277,5 + 0,9 \cdot 8,50^2/2 = 310,0 \text{ cm}^3$, damit ergibt sich die Schubspannung $\tau_{xz} = 6,04 \text{ kN/cm}^2$ mit der Breite $b = 0,9 \text{ cm}$. Diese zuletzt bestimmte Spannung wirkt ebenfalls nach unten, wie eine Gleichgewichtsbetrachtung etwa des unteren abgeschnittenen Körperteils unmittelbar zeigt, erhält also auch ein positives Vorzeichen. Da sich das statische Moment der abgeschnittenen Querschnittsfläche im Stegbereich nichtlinear ändert, ändert sich auch die Schubspannung nichtlinear, wie in Bild 48 gezeigt. Schnitte im Bereich des oberen Flansches liefern Spannungen, die betragsmäßig denen im unteren Flansch entsprechen. Die Vorzeichen ergeben sich wieder aus der Anschauung (Schnitte d-d und e-e). Wir erwähnen bei dieser Gelegenheit, dass das statische Moment der durch einen Horizontalen (Längs-)Schnitt durch den Schwerpunkt abgeschnittenen Querschnittsfläche S_y in Tabellen angegeben ist, in unserem Fall mit $S_y = 321 \text{ cm}^3$.³³⁾ Die in diesem Schnitt wirkende Schubspannung kann also ohne eigene Berechnung des statischen Momentes unmittelbar bestimmt werden. Diese Berechnung wird sogar

noch einfacher, wenn man den in Tabellen angegebenen Wert $s_y = \frac{I_y}{S_y}$ berück-

sichtigt: $\max \tau_{xz} = \frac{V_z}{s_y \cdot b}$ Es handelt sich bei s_y übrigens um den sogenannten inne-

ren Hebelarm der resultierenden Kräfte, wie die folgende kurze Betrachtung zeigt. Die resultierende Zugkraft z.B. ergibt sich in der Form

³³⁾ Der Unterschied gegenüber dem von uns berechneten Wert von etwa 3% ist zurückzuführen auf die Vernachlässigung der Ausrundung im Flansch-Steg-Anschluss.

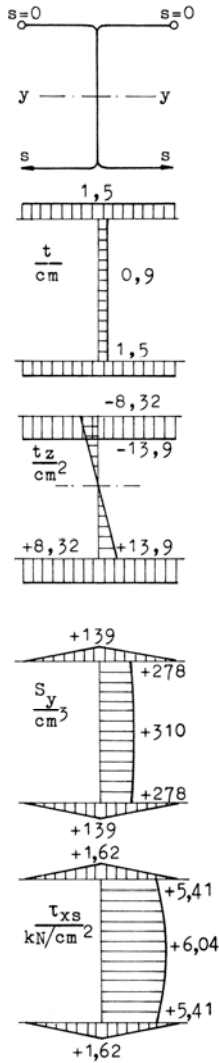


Bild 50
Schubspannungen τ_{xs}

$$Z = \int_0^{\frac{h}{2}} \sigma \cdot b \cdot dz = \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{M_y}{I_y} \cdot z \cdot b \cdot dz = \frac{M_y}{I_y} \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} z \cdot b \cdot dz = \frac{M_y}{I_y} \cdot S_y = \frac{M_y}{s_y} = |D|$$

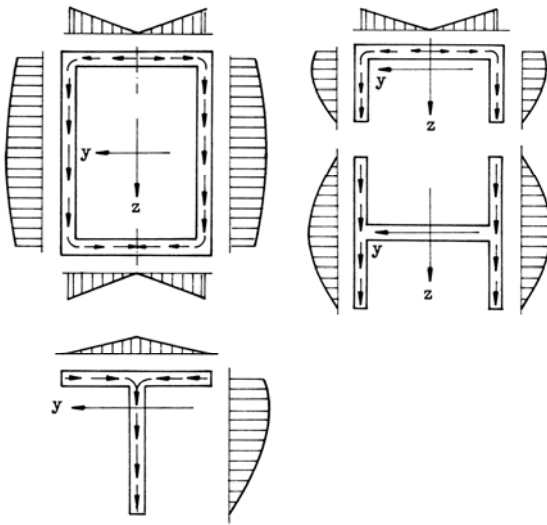


Bild 51 Schubspannungen auf dünnwandigen Querschnitten, beansprucht durch V_z

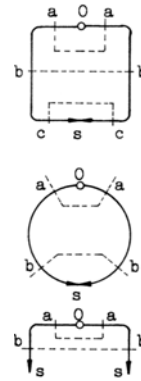


Bild 51a Schnittführung

und muss betragsmäßig gleich der resultierenden Druckkraft sein. Da das aus Z und D gebildete Kräftepaar dem wirkenden Biegemoment gleich sein muss, gilt, wenn man den entsprechenden Hebelarm mit s_y bezeichnet

$$\text{einerseits} \quad M_y = Z \cdot s_y$$

$$\text{und andererseits} \quad M_y = Z \cdot \frac{I_y}{S_y}$$

Daraus ergibt sich $s_y = I_y / S_y$, was zu zeigen war.

Wie man sieht, ändert sich die Schubspannung nur wenig im Stegbereich. Man wird deshalb keinen großen Fehler machen, wenn man die Querkraft V_z gleichmäßig über die Stegfläche verteilt und also mit einer „mittleren Schubspannung“ rechnet:

$\tau_{\text{mittel}} = V_z / A_{\text{Steg}}$. Mit $A_{\text{Steg}} = 18,5 \cdot 0,9 = 16,65 \text{ cm}^2$ liefert das $\tau_{\text{mittel}} = 6,01 \text{ kN/cm}^2$; die Abweichung beträgt, bezogen auf den „genauen Wert“, weniger als 3%. Diese Art der Berechnung ist im Stahlbau erlaubt, die benötigten Werte für A_{Steg} stehen in den üblichen Tabellenwerken. Wir kommen noch einmal zurück zu den Schubspannungen im Bereich des Übergangs vom Flansch zu Steg. Wie man sieht, ändern die Schubspannungen hier sprunghaft ihren Wert, wobei ein Zusammenhang zwischen den Werten im Flansch, und im Steg nicht sofort zu erkennen

ist. Ein solcher Zusammenhang wird erkennbar, wenn man nicht die Schubspannungen, sondern den Schubfluss darstellt: Der im Steg (an dessen Enden) zu übertragende Schubfluss ist gleich der Summe der in den jeweiligen Flanschhälften „ankommenden“ Schubflüsse.

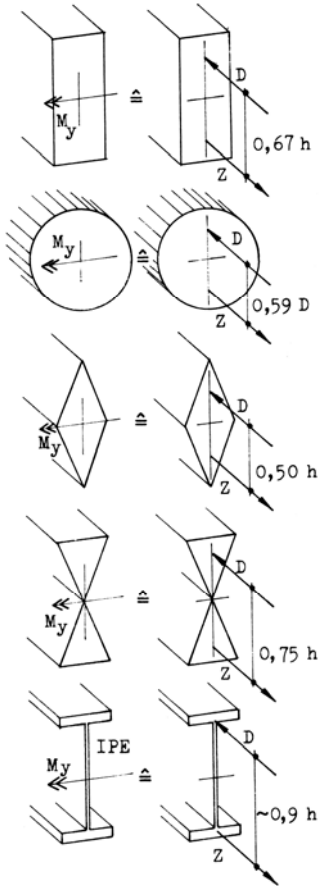


Bild 51b

Lage der Resultierenden Z und D für verschiedene Querschnittsformen ($s_V = M_V/Z$)

Wir haben oben bereits erwähnt, dass eine entlang der Profilmittellinie laufende Koordinate s sich als Bezugsgröße ebenso gut eignet wie das orthogonale y - z -System. Natürlich wird man nicht nur bei der Berechnung, sondern auch bei der Bezeichnung der Schubspannungen sich beziehen auf diese Laufkoordinate, man wird also Schubspannungen τ_{xs} berechnen. Dabei stellt man fest, dass sich die Vorzeichen zum Teil gegenüber den oben berechneten τ_{xz} bzw. τ_{xy} ändern, was sofort

einleuchtet. Die Richtung der Schubspannungen freilich ist von dem gewählten Bezugssystem unabhängig und muss sich stets gleich ergeben. Ausgehend von der Formel

$$\tau_{xs} = \frac{V_z \cdot S_y(s)}{I_y \cdot t(s)}$$

kann die Berechnung der Schubspannung bei Querschnitten wie dem hier vorliegenden einfach und übersichtlich organisiert werden. Ein kleines Flächenelement $t \cdot ds$ liefert zum statischen Moment um die y -Achse den Beitrag $z \cdot t \cdot ds$, sodass sich insgesamt ergibt $S_y = \int_0^s y \cdot t \cdot ds$. Die numerische Berechnung dieses Integrals

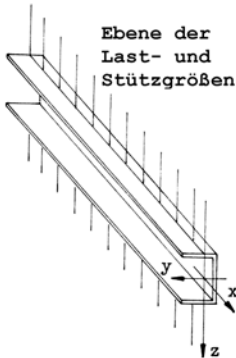
geschieht zweckmäßig in zwei Schritten. Wir zeigen abschließend den Schubspannungsverlauf für verschiedene andere Querschnittsformen, ohne auf die Berechnung, die sich ebenso einfach gestaltet wie oben, einzugehen (Bild 51). Geeignete Koordinaten und zweckmäßige Schnittführung zeigt Bild 51a. Dabei zeigt sich noch deutlicher, was wir schon bei fülligen Querschnitten beobachtet haben: In Querschnittsbereichen, in denen von den Normalspannungen kleine Beiträge zur resultierenden Zug- oder Druckkraft geleistet werden, ändert sich der Schubfluss nur wenig. Den Extremfall stellt ein Querschnitt dar, der aus zwei zug- und druckfesten Gurten und einem (nur) schubfesten Steg besteht. In diesem Fall ist der Schubfluss im Steg über die Höhe konstant, die Schubspannungsverteilung hängt nur von der Stegbreite ab. In Bild 51b ist übrigens für einige Querschnittsformen die Lage der resultierenden Zug- und Druckkraft angegeben.

2.4.2 Schubspannungen in beliebigen, zur Lastebene nicht symmetrischen Querschnitten. Der Schubmittelpunkt

Wir wollen als nächstes einen Balken aus einem U-Profil untersuchen, der wie üblich in der z - x -Ebene querbelastet wird (Bild 52). Überprüfung des Deviationsmomentes für die eingezeichnete Lage des Koordinatensystems ergibt $I_{yz} = 0$, sodass

die Formeln $\sigma = \frac{M}{I} \cdot z$ und $\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot t}$ offenbar den Normalspannungsverlauf bzw.

Schubspannungsverlauf (für sich allein) korrekt beschreiben. Wir wollen nun kontrollieren, ob die so ermittelten Schubspannungen tatsächlich der gegebenen Querkraft äquivalent sind und setzen die Schubspannungen dazu zu Teilresultierenden R_h und R_v zusammen (Bild 53).

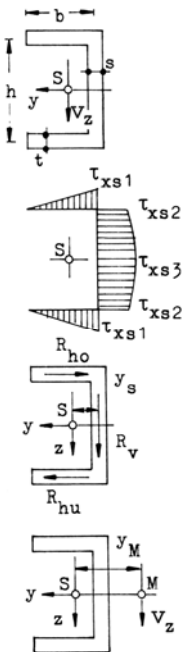
**Bild 52**

Belastung eines Stabes mit U-Querschnitt in der x-z-Ebene

$$R_{ho} = \frac{\tau_{xs1} \cdot A_{Fl}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{V \cdot b \cdot h}{I} \cdot b \cdot t = \frac{V \cdot b^2 \cdot t \cdot h}{4 \cdot I} \quad R_{ho} = R_{hu} = R_h$$

$$R_v = \left(\tau_{xs2} + \frac{2}{3} \cdot (\tau_{xs3} - \tau_{xs2}) \right) \cdot A_{Steg} = \frac{V}{I} \cdot \left(\frac{h^2 \cdot b \cdot t}{2} + \frac{h^3 \cdot s}{12} \right)$$

Mit $I = \frac{h^2 \cdot b \cdot t}{2} + \frac{h^3 \cdot s}{12}$ ergibt das wie erwartet $R_v = V$.

**Bild 53**

Schubmittelpunkt

Errechnetes und gegebenes Kraftsystem haben somit jeweils gleichgroße Komponenten in y - und z -Richtung. Bleibt noch zu prüfen, ob sie auch gleich große Momente um die x -Achse bilden. Das gegebene System liefert $M_{xg} = 0$, das errechnete System $M_{xe} = V \cdot y_s + R_h \cdot h$. Mit anderen Worten: Errechnetes und gegebenes Kraftsystem sind nicht äquivalent. Es kann nun zweierlei getan werden, um diese Äquivalenz herzustellen: Entweder wir fügen zu der bisher berechneten Schubspannungsverteilung eine weitere hinzu, die das (sozusagen auf dieser Seite entstandene) Torsionsmoment M_{xe} wieder rückgängig macht, oder wir verschieben bzw. versetzen die Lastebene und damit die (gegebene) Querkraft in solcher Weise, dass sie um die x -Achse das gleiche Torsionsmoment M_{xe} ausübt. Wir werden hier das letztere tun³⁴⁾ und berechnen dazu das Maß y_M , um das die Querkraft seitlich versetzt werden muss, aus der Bedingung

$$V \cdot y_M = M_x = R_v \cdot y_s + R_h \cdot h \quad \text{zu} \quad y_M = y_s + \frac{b^2 \cdot t \cdot h^2}{4 \cdot I}.$$

Für ein Profil U200 ergibt das

$$y_M = 1,585 + \frac{7,075^2 \cdot 1,15 \cdot 18,85^2}{4 \cdot 1910} = 4,26 \text{ cm}.$$

Der Profiltafel entnehmen wir $y_M = 3,9 \text{ cm}$. Die Abweichung des errechneten Wertes vom Tafelwert hängt zusammen damit, dass die inneren Flanschflächen (und damit auch die Profilmittellinie in diesem Bereich) beim U-Profil stark geneigt sind, während wir unserer Berechnung ein parallelfanschiges Profil zugrunde gelegt haben.

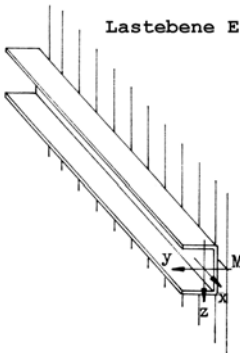


Bild 54 Die Lastebene enthält die Schubmittelpunktslinie

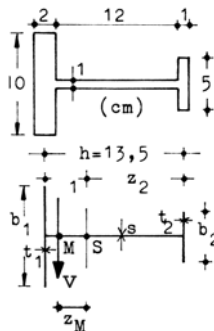


Bild 55 Zur Berechnung des Schubmittelpunktes

³⁴⁾ Das Erstere wird im folgenden Abschnitt getan werden.

Wir stellen fest: Wird ein Biegebalken, bestehend aus einem U-Profil, durch q_z und die zugehörigen Stützkkräfte beansprucht, so muss diese Belastung in einer Ebene E wirken, die parallel zur x - z -Ebene liegt und den Abstand y_M zu ihr hat, wenn die zu M_y und V_z gehörende Spannungsverteilung durch

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad \text{und} \quad \tau_{xs} = \frac{V_z \cdot S_y(s)}{I_y \cdot t(s)}$$

allein korrekt beschrieben werden und als einzige wesentliche Verformung eine Krümmung des Balkens (der Stabachse) in der x - z -Ebene auftreten soll. – Auf Grund der in Abschnitt 2.4.1 angestellten Betrachtungen wissen wir, dass bei einer Beanspruchung des U-Profiles durch q_y diese Belastung in der x - y -Ebene wirken muss, damit gehörende Spannungsverteilung durch die Formeln

$$\sigma_x = \frac{-M_z}{I_z} \cdot y \quad \text{und} \quad \tau_{xs} = \frac{V_y \cdot S_z(s)}{I_z \cdot t(s)}$$

korrekt beschrieben wird und dementsprechend als (wesentliche) Verformung nur eine Krümmung des Balkens in der x - y -Ebene auftritt. Bezeichnen wir (analog zur Schwerlinie) die Schnittlinie der oben definierten E -Ebene (Bild 54) mit der x - y -Ebene als Schubmittelpunktslinie und deren Durchstoßpunkt durch eine Querschnittsfläche als Schubmittelpunkt, dann können wir sagen: Wird ein Biegebalken, bestehend aus einem U-Profil, durch eine Querlast q beansprucht, so muss diese Querlast in einer (Last-) Ebene liegen, die die Schubmittelpunktslinie enthält, damit der Spannungszustand des Biegebalkens durch eine Linearkombination der o.a. vier Formeln korrekt beschrieben wird.³⁵⁾

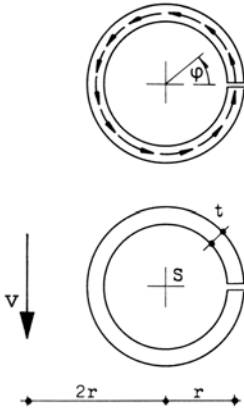
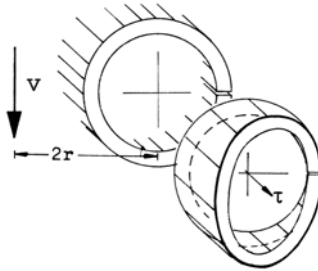
Während man für verschiedene andere zur Lastebene unsymmetrische Querschnitte die Lage des Schubmittelpunktes ohne Rechnung unmittelbar aus der Anschauung angeben kann (s. u.) ist dies z.B. beim I-Träger mit ungleichen Gurten und beim geschlitzten Rohr (ebenso wie beim U-Profil) nicht möglich. Hier zunächst die Rechnung für das erstgenannte Profil (Bild 55). Die Lage des Schwerpunktes (relativ zur Profilmittellinie des rechten Gurtes) ergibt sich unmittelbar zu

$$z_2 = \frac{b_1 \cdot t_1 \cdot h + 0,5 \cdot h^2 \cdot s}{b_1 \cdot t_1 + b_2 \cdot t_2 + h \cdot s} = 9,38 \text{ cm}.$$

Das axiale Trägheitsmoment um die z -Achse ergibt sich zu

$$I_z = \frac{b_1^3 \cdot t_1}{12} + \frac{b_2^3 \cdot t_2}{12} + \frac{s^3 \cdot h}{12} = 178,2 \text{ cm}^4$$

³⁵⁾ Zu diesem Spannungszustand gehört als einzige Verformung eine Krümmung des Biegebalkens. Die dabei entstehende Biege-Ebene fällt, wie wir bald sehen werden, i. A. nicht mit der Lastebene zusammen.

**Bild 56** Das geschlitzte Rohr**Bild 57** Schubspannungen auf dem Querschnitt eines geschlitzten Rohres

Da die Schubspannung etwa im linkem Gurt aus Symmetriegründen unmittelbar unterhalb des Steges ebenso groß ist wie unmittelbar oberhalb des Steges und also auch die beiden Schubflüsse $T = \tau \cdot t_2$ gleich groß sind, muss im Steg der Schubfluss ebenso wie die Schubspannung am Gurt-Anschluss und damit überall Null sein: Es treten nur in den Gurten Schubspannungen auf. Die entsprechenden Maximalwerte betragen

$$\tau_{xs1} = \frac{V \cdot b_1^2 \cdot t_1 / 8}{I_z \cdot t_1} \quad \text{und} \quad \tau_{xs2} = \frac{V \cdot b_2^2 \cdot t_2 / 8}{I_z \cdot t_2}$$

Die Resultierenden der Schubspannungen im linken bzw. rechten Gurt ergeben sich damit zu

$$R_1 = \frac{2}{3} \cdot \tau_{xs1} \cdot A_1 = \frac{V \cdot b_1^3 \cdot t_1 / 12}{I_z} \quad \text{und}$$

$$R_2 = \frac{2}{3} \cdot \tau_{xs2} \cdot A_2 = \frac{V \cdot b_2^3 \cdot t_2 / 12}{I_z} = \frac{V \cdot I_2}{I_z}$$

Damit das aus diesen Resultierenden gebildete Kraftsystem äquivalent ist der angreifenden Kraft V , muss diese vom Schwerpunkt den Abstand z_M haben:

$$V \cdot z_M = R_1 \cdot z_1 - R_2 \cdot z_2 \rightarrow z_M = \frac{I_1 \cdot z_1 - I_2 \cdot z_2}{I_z}$$

In unserem Fall ergibt sich mit $I_1 = 166,6 \text{ cm}^4$ und $I_2 = 10,4 \text{ cm}^4$, sowie $z_1 = 4,1 \text{ cm}$ und $z_2 = 9,38 \text{ cm}$ der Wert $z_M = (686 - 98)/178,2 = 3,3 \text{ cm}$

Damit ist die Lage des Schubmittelpunktes, der ja in jedem Fall auf der Symmetrieachse des Querschnitts, liegen muss, eindeutig bestimmt.

Für das geschlitzte Rohr (Bild 56) gestaltet sich die Bestimmung des Schubmittelpunktes recht einfach.

Ausgehend von der Formel $\tau_{xs} = \frac{V}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot (1 - \cos \varphi)$ ergibt sich (Bild 57) das resul-

tierende Moment M_x der Spannungenkräfte unmittelbar zu

$$M_x = \int_0^{2\pi} \tau_{xs} \cdot t \cdot r^2 \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{V \cdot r}{\pi} \cdot (1 - \cos \varphi) d\varphi = 2 \cdot r \cdot V$$

Das gleiche Moment muss von der Querkraft um die x-Achse ausgeübt werden, die also im Abstand $2r$ von dieser Achse wirken muss.

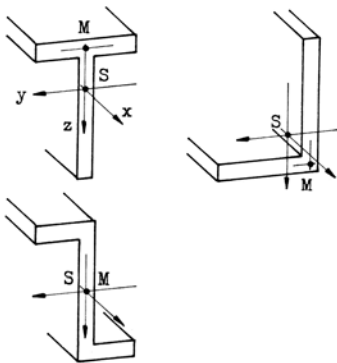


Bild 58

Zur Lage des Schubmittelpunktes

Wie oben schon erwähnt, kann man bei verschiedenen anderen Querschnitten die Lage des Schubmittelpunktes ohne Rechnung angeben. Beim T-Profil etwa ergibt eine Belastung durch q_z (mit V_z), dass der Schubmittelpunkt M auf der z-Achse (der Symmetrieachse) liegen muss; eine Belastung q_y (mit V_y), dass M auf der Flanschmittellinie liegen muss: M liegt damit im Schnittpunkt beider Linien, wie Bild 58 zeigt. Beim L-Querschnitt ergibt eine ähnliche Betrachtung, dass M im Schnittpunkt der Mittellinien beider Schenkel liegen muss. Beim Z-Profil muss M aus Symmetriegründen mit dem Schwerpunkt S zusammenfallen. Entsprechend kann man auch, bei einem doppelsymmetrischen Querschnitt von einem Schubmittelpunkt sprechen, der natürlich dort mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Wir haben in Kapitel 1 festgestellt, dass Normalspannungen und Schubspannungen Komponenten resultie-

render Spannung sind und zeigen in Bild 59 für einen Rechteckquerschnitt die zu diesem resultierenden Spannungen gehörenden kleinen Kraftvektoren für den Fall der Querkraftbiegung.

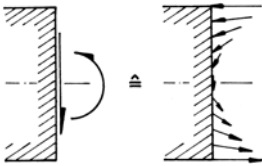


Bild 59
Flächenmäßig verteilte Kräfte

Bevor wir uns der Torsion von Stäben zuwenden, geben wir noch die durch Querkraften verursachte Verformung eines Stabelementes an, also die gegenseitige Verschiebung der zwei Querschnittsflächen in ihren Ebenen. In einem kleinen Körperelement ($dx=dy=dz=1$), das durch Schubspannungen τ beansprucht wird, ist die innere Energie $a_i = \tau^2/(2 \cdot G)$ gespeichert (siehe Kapitel 1). Dann ist in einem Stabelement der Länge $dx=1$ und der Querschnittsfläche A die Energie

$$A_i = \int_{(A)} a_i \cdot dA = \int_{(A)} \left(\frac{\tau^2}{2 \cdot G} \right) dA$$

gespeichert. Die entsprechende Formänderungsarbeit wurde bei der Verformung von den äußeren Kräften geleistet und in dieses Element investiert:

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot V \cdot w_s = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \gamma \cdot 1.$$

Damit gilt

$$\gamma = \frac{1}{V \cdot G} \cdot \int_{(A)} \tau^2 \cdot dA^*.$$

Verwendung der Beziehung $\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot b}$ liefert

$$\gamma = \frac{V}{G \cdot A} \cdot A \cdot \int_{(A)} \left(\frac{S}{I \cdot b} \right)^2 dA = \frac{V}{G \cdot A} \cdot \chi_v$$

Der dimensionslose Beiwert χ_v kann, wenn S und b als Funktion einer geeigneten Bezugsgröße bekannt sind, ohne weiteres ermittelt werden. Für einen Rechteckquer-

schnitt ergibt sich mit $S(z) = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]$ der Wert $\chi_v \approx 1,20$; für einen Voll-

kreis mit $S(\alpha) = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin^3 \alpha$ und $b = (\alpha) = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha$ der Wert $\chi_v \approx 1,11$.

Für I-Profile erhält man die Werte für χ_v einfacher, wenn man wie folgt überlegt: Die Schubspannungen haben im Steg näherungsweise den konstanten Wert $\tau \approx V/A_{\text{Steg}}$. Dies verarbeiten wir in der Beziehung * von der vorigen Seite und erhalten unmittelbar

$$\gamma \approx \frac{V}{G \cdot A_{\text{Steg}}} = \frac{V}{G \cdot A} \cdot \frac{A}{A_{\text{Steg}}}$$

Also gilt bei I-Profilen $\chi_v \approx A/A_{\text{Steg}}$. Für einige Profile ist der Wert dieses Quotienten hier angegeben.

Tafel 3 Schubverformungsbeiwerte

	I 120	I 300	I 450	IPB 200	IPB 400	IPB 700
χ_v	2,48	2,25	2,13	4,68	3,90	2,68

Schließlich wieder die Frage: Gibt es eine Belastung, zu der ausschließlich die Querschnittsspannungen

$$\tau = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

und die Verformungen

$$\gamma_{xz} = \frac{V_z}{G \cdot A} \cdot \chi_v$$

gehören?

Die Antwort: Nein; zu einer von Null verschiedenen Querkraft V_z gehört grundsätzlich ein sich mit x änderndes Biegemoment M_y . Somit treten zusammen mit diesen Spannungen und Verformungen stets die in Abschnitt 2.3.2 ermittelten Spannungen

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

und Krümmungen

$$\chi_{xz} = \frac{M_y}{E \cdot I_y} \quad \text{auf.}$$

Die Frage muss deshalb lauten: Welche Belastung erzeugt in einem Balken den durch die oben angeschriebenen Formeln charakterisierten Spannungs- und Verformungszustand?

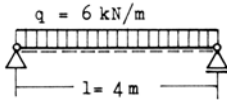


Bild 60
Einfeldbalken

Die Antwort: Eine parallel zu einer Hauptebene wirkende und auf die Schubmittelpunktslinie gerichtete Querbewehrung.

Hierzu ein kleines Zahlenbeispiel:

Das in Bild 60 dargestellte System ist als Holzbalken (Nadelholz) zu bemessen. Welchen Wert hat die größte auftretende Krümmung?

Lösung: 1) Schnittgrößen: $\max M_y = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{6 \cdot 4,00^2}{8} = 12 \text{ kNm}$

$$\max V_z = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{6 \cdot 4,00}{2} = 12 \text{ kN}$$

2) Bemessung: Nach DIN 1052 (Holzbauwerke) gilt

$$\text{zul } \sigma = 1,0 \text{ kN/cm}^2, \text{ zul } \tau = 0,09 \text{ kN/cm}^2, E = 1000 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\text{Damit ergibt sich erf } W_y = \frac{\text{vorh } M_y}{\text{zul } \sigma} = \frac{12 \cdot 100}{1,0} = 1200 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird ein Kantholz **16/22** mit:

$$\text{vorh } A = 352 \text{ cm}^2, \text{ vorh } I_y = 14197 \text{ cm}^4 \text{ und vorh } W_y = 1291 \text{ cm}^3.$$

Die größte im Balken auftretende Schubspannung beträgt

$$\max \tau = 1,5 \cdot \frac{V}{A} = 1,5 \cdot \frac{12}{352} = 0,0512 \text{ kN/cm}^2 < 0,09 \text{ kN/cm}^2.$$

Als größte Krümmung ergibt sich

$$\chi = \frac{\max M}{E \cdot I} = \frac{12 \cdot 100}{10^3 \cdot 14197} = 8,46 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}.$$

$$\text{Dazu gehört der Krümmungsradius } \rho = \frac{1}{\chi} = 11830 \text{ cm} = 118,30 \text{ m}.$$

2.5 Spannungen in einem Kreisquerschnitt und einem Kreisringquerschnitt, auf den ein Torsionsmoment wirkt

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir angenommen, dass die Lastebene die Schubmittelpunktslinie enthält, sodass ein beanspruchter Stab nicht tordiert (verdreht) wird. Das wird man freilich nicht immer erreichen können, weshalb wir nun einen Stab untersuchen wollen, dessen Belastung nicht durch die Schubmittelpunktslinie geht (Bild 61). Wir können die auf diesen Stab wirkende Einzellast parallel zu ihrer Wirkungslinie in y -Richtung in die x - z -Ebene verschieben, wenn wir gleichzeitig das Versetzungsmoment $M_x = F \cdot a$ ansetzen. Die so verschobene Einzellast erzeugt in unserem Stab Biegemomente M_y und Querkräfte V_z , für die wir die zugehörige Spannungsverteilung inzwischen kennen. Das äußere Moment M_x verursacht als Schnittgröße ein (über x konstantes) Torsionsmoment M_T , für das wir die zugehörige Spannungsverteilung nun bestimmen wollen.

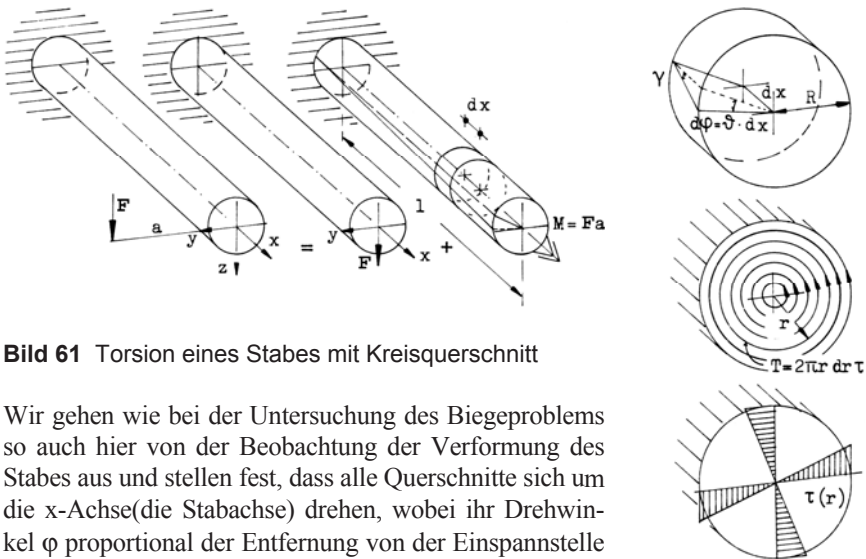


Bild 61 Torsion eines Stabes mit Kreisquerschnitt

Wir gehen wie bei der Untersuchung des Biegeproblems so auch hier von der Beobachtung der Verformung des Stabes aus und stellen fest, dass alle Querschnitte sich um die x -Achse (die Stabachse) drehen, wobei ihr Drehwinkel φ proportional der Entfernung von der Einspannstelle ist.

Eine etwa vor der Verformung markierte Mantellinie hat dann nach der Verformung die aus der Abbildung ersichtliche Lage. Wir stellen uns vor, neben dieser Mantellinie sei parallel im Abstand $R \cdot d\varphi$ eine zweite Mantellinie markiert worden (nicht eingezeichnet). Betrachtung eines herausgeschnittenen kleinen Stabelementes von der Länge dx zeigt dann, dass das ursprünglich rechteckige so entstandene Oberflächenstück (Kantenlängen dx und $R \cdot d\varphi$) bei der Verformung in ein Parallelogramm

übergegangen ist. Eine solche Verformung haben wir schon früher beobachtet: Sie heißt Gleitung und wird durch Schubspannungen hervorgerufen. Damit ist ein Anfang gemacht: $\tau = G \cdot \gamma$

Die Gleitung γ lässt sich nun leicht in Beziehung setzen zur gegenseitigen Verdrehung zweier Querschnitte im Abstand dx :

$$\gamma \cdot dx = d\varphi \cdot R, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dx} \cdot R$$

Damit ergibt sich $\tau = G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot R$. Der Quotient $\frac{d\varphi}{dx}$ erinnert sehr an den uns bekannten Quotienten $\frac{d\delta}{dx}$, den wir Dehnung genannt und mit ϵ bezeichnet haben. Wir

führen deshalb auch für $\frac{d\varphi}{dx}$ ein neues Symbol ein, nämlich ϑ und nennen es Einheitsverdrehung oder (auf die Stablänge) bezogene Verdrehung (der Endquerschnitte): $\tau = G \cdot \vartheta \cdot R$.

Wie können wir nun von dieser Randspannung auf die Spannungen im Inneren des Stabes schließen? Auch hier hilft die Beobachtung der Verformung des Stabes: Markieren wir nämlich auf dem freien Endquerschnitt einen Radius, so bleibt diese Linie bei der Verformung gerade, wenn das äußere Moment geeignet eingeleitet wird. Wir treffen deshalb eine Annahme, dass allgemein Radien bei der Verdrehung gerade bleiben.³⁶⁾ Damit ist klar, dass „Mantelflächen“ im Inneren des Stabes Gleitungen erleiden, die proportional ihrem Abstand r von der Stabachse sind, was unmittelbar liefert $\tau(r) = G \cdot \vartheta \cdot r$. Die Verknüpfung dieser Schubspannungen mit ihrer Resultierenden, dem Torsionsmoment M_T ist nun denkbar einfach. Wenn die auf einem gedachten Ring von der Dicke dr und dem mittleren Radius r (er hat die Querschnittsfläche $2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$) wirkenden Schubspannungen $\tau = G \cdot \vartheta \cdot r$ um die x -Achse das Moment $dM_T = r \cdot \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ ausüben, dann liefert die entsprechende Äquivalenzbedingung unmittelbar

$$M_T = \int_0^R \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr = \int_0^R G \cdot \vartheta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot dr = G \cdot \vartheta \cdot \pi \cdot \frac{R^4}{2}$$

oder, wenn wir im letzten Integral $2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = dA$ setzen

$$M_T = G \cdot \vartheta \cdot \int_{(A)} r^2 \cdot dA = G \cdot \vartheta \cdot I_p.$$

³⁶⁾ Dies entspricht der Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte beim Biegeproblem.

Das Integral $\int r^2 \cdot dA = I_p$ nennt man polares Trägheitsmoment. Es ist im Gegensatz zu den axialen Trägheitsmomenten in Profiltafeln nicht tabelliert, kann aber aus ihnen unschwer errechnet werden, wie wir in Kapitel 3 zeigen werden. Damit ergibt sich

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_p} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \frac{M_T}{G \cdot \frac{\pi \cdot R^4}{2}}$$

Verarbeitung der Beziehung $\vartheta = \frac{\tau}{G \cdot r}$ liefert

$$\tau(r) = \frac{M_T}{I_p} \cdot r \quad \text{bzw.} \quad \max \tau = \frac{M_T}{\frac{\pi \cdot R^4}{2}} \cdot R$$

Die größte im Querschnitt auftretende Spannung ergibt sich mit $r = R$ am Rand. Die Einführung eines polaren Widerstandsmomentes $W_p = I_p/R$ ergibt dann:

$$\max \tau = \frac{M_T}{W_p} \quad \text{bzw.} \quad \max \tau = \frac{M_T}{\frac{\pi \cdot R^3}{2}}$$

Das zulässige Torsionsmoment ergibt sich zu $\text{zul } M_T = \text{zul } \tau \cdot \frac{\pi \cdot R^3}{2}$, wächst also proportional der dritten Potenz von R . Durch Änderung der Integrationsgrenzen in der o.a. Äquivalenzbedingung können wir die Spannungsverteilung in einem Kreisringquerschnitt (Bild 62) berechnen:

$$M_T = \int_{R_i}^{R_a} \tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr = G \cdot \vartheta \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (R_a^4 - R_i^4) = G \cdot \vartheta \cdot I_p$$

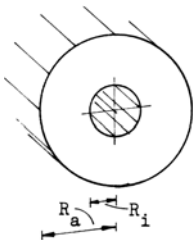


Bild 62
Dickwandiges Rohr

und also

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (R_a^4 - R_i^4)} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_p}.$$

Die Verwendung der Beziehung $\tau = G \cdot \vartheta \cdot r$ liefert wieder

$$\tau(r) = \frac{M_T}{\frac{\pi}{2} \cdot (R_a^4 - R_i^4)} \cdot r \quad \text{bzw.} \quad \tau(r) = \frac{M_T}{I_p} \cdot r.$$

Die Randspannung ergibt sich dann in der Form

$$\max \tau = \tau(R_a) = \frac{M_T}{\frac{\pi}{2} \cdot (R_a^4 - R_i^4)} \cdot R_a \quad \text{bzw.} \quad \max \tau = \frac{M_T}{W_T}.$$

Diese Formeln lassen sich noch vereinfachen, wenn das Rohr dünnwandig ist (Bild 63). Dann nämlich können wir annehmen, dass sich die Schubspannung über die Wandstärke nicht ändert und dementsprechend mit einer mittleren Schubspannung rechnen. Es ergibt sich unmittelbar $M_T = 2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot \tau \cdot t \cdot r_m = 2 \cdot A_m \cdot \tau \cdot t$, wenn man mit A_m die durch die Profilmittellinie eingeschlossene Fläche $\pi \cdot r_m^2$ bezeichnet. Wir erhalten also für die mittlere Schubspannung in der Querschnittsebene

$$\tau_m = \frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t}, \quad \text{also} \quad W_T = 2 \cdot A_m \cdot t$$

und für die bezogene Verdrehung $\vartheta = \frac{\tau}{G \cdot r_m}$ den Wert

$$\vartheta = \frac{M_T}{2 \cdot G \cdot A_m \cdot r_m \cdot t} \quad \text{also} \quad I_p = 2 \cdot A_m \cdot r_m \cdot t.$$

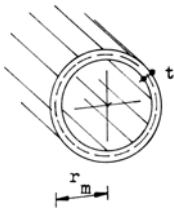


Bild 63
Dünnwandiges Rohr

Die Ähnlichkeit der oben abgeleiteten Ausdrücke mit den entsprechenden Ausdrücken, wie sie bei der Verteilung eines Biegemomentes gefunden wurden, ist offensichtlich. Auch hier ist ein Widerstandsmoment maßgebend für die größte im Querschnitt auftretende Spannung, die Randspannung, und ein Trägheitsmoment zusammen mit dem Gleitmodul G maßgebend für die Verformung. Das polare Trägheitsmoment kennzeichnet den Einfluss von Form und Größe des Querschnitts, der Gleitmodul G denjenigen des Materials.

Zahlenbeispiel:

Für ein dünnwandiges Rohr mit den Abmessungen $r_m = 10$ cm und $t = 1$ cm aus Stahl S235 soll das zulässige Torsionsmoment bestimmt werden mit $\tau = 9$ kN/cm². Welcher bezogene Drehwinkel ergibt sich dabei?

Mit $I_p = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 1 = 6283$ cm⁴, $W_T = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 1 = 628,3$ cm³ und $G = 8100$ kN/cm² ergibt sich:

$$\text{zul } M_T = \text{zul } \tau \cdot W_T = 9 \cdot 628,3 = 5655 \text{ kNcm} = 56,55 \text{ kNm}.$$

Dabei stellt sich ein der bezogene Drehwinkel

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_p} = \frac{5655}{8100 \cdot 6283} = 1,11 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{cm}}.$$

Das bedeutet, dass sich zwei Querschnitte A und B im gegenseitigen Abstand von einem Zentimeter um den Winkel $1,11 \cdot 10^{-4}$ (gemessen im Bogenmaß) gegeneinander verdrehen; ein Punkt des Querschnitts A im Abstand $r_1 = 1$ cm vom Drehpunkt durchläuft dann bei der Verdrehung einen Bogen von $b_1 = 1,11 \cdot 10^{-4}$ cm, wenn Querschnitt B unverdrehbar gehalten wird: ein anderer Punkt – etwa im Abstand $r_2 = 10$ cm – durchläuft entsprechend $b_2 = 11,1 \cdot 10^{-4}$ cm.

Als Nebenprodukt dieser Betrachtung fällt an die Bestätigung, dass auch bei der Torsion tatsächlich nur sehr kleine Verformungen auftreten, sodass die im Laufe der Untersuchung des Torsionsproblems gemachten Annahmen und Linearisierungen berechtigt sind. Schon bei der Biegung haben wir gesehen, dass die Wirtschaftlichkeit eines Querschnitts abhängt davon, welcher Anteil seiner Fläche im Bereich großer Spannungen liegt. Das ist auch so bei der Torsion. Wir wollen das an dem soeben gerechneten Beispiel zeigen. Wählen wir anstelle des dünnwandigen Rohres eine massive Welle mit $R = 10$ cm, so ergibt sich $\text{zul } M_T = 141$ kNm. Das zulässige Torsionsmoment der massiven Welle ist also 2,5-mal so groß wie diejenige des Rohres. Da die Querschnittsfläche dieser Welle 5-mal so groß ist wie diejenige des Rohres, ist die massive Welle wesentlich unwirtschaftlich als das dünnwandige Rohr.

2.5.1 Torsionsspannungen in einem dünnwandigen (einzelligen) Hohlquerschnitt beliebiger Form

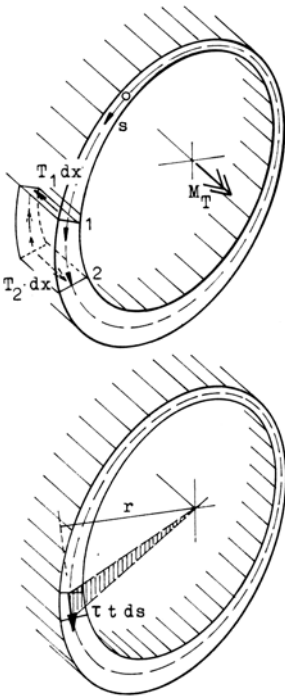


Bild 64

Dünnwandiger Hohlquerschnitt beliebiger Form

Es taucht nun die Frage auf: Können die oben gewonnenen Ergebnisse in gleicher oder ähnlicher Form auch für andere Querschnitte verwendet werden? Für drei Typen von Querschnitten wird diese Frage zu beantworten sein:

- 1) für nicht – kreisrunde dünnwandige Hohlquerschnitte wie zum Beispiel : Kastenquerschnitte;
- 2) für nicht – kreisförmige Vollquerschnitte wie zum Beispiel Rechteckquerschnitte;
- 3) für sogenannte dünnwandige offene Profile wie zum Beispiel Walzprofile.

Wir wollen in diesem Abschnitt dünnwandige geschlossene Profile untersuchen, die nicht mehr zentralsymmetrisch sind.

Die Beobachtung des Verformungsverhaltens solcher Stäbe zeigt, dass deren Querschnitte bei Torsion nicht mehr eben bleiben, sondern sich bei der Verdrehung auch noch verwölben. Diese Verwölbung führt, wenn sie behindert wird, natürlich zu Normalspannungen in Längsrichtung, die ihrerseits sogenannte sekundäre

Schubspannungen hervorrufen. Eine Behinderung der Verwölbung tritt ein im Wesentlichen in zwei Fällen:

- 1) wenn irgendein Querschnitt, etwa der Endquerschnitt, mit einer in Richtung der Stabachse biegesteifen oder gar starren Platte verbunden ist;
- 2) wenn sich das Torsionsmoment entlang der Stabachse ändert, insbesondere, wenn es sich sprunghaft ändert.³⁷⁾ Wir wollen annehmen, dass die Querschnitte der im Folgenden untersuchten Stäbe sich frei und unbehindert verwölben können, sodass keine Normalspannungen in Querschnittsflächen entstehen. Man spricht in diesem Fall von Saint-Venantscher Torsion, während man bei behinderter Verwölbung von Wölbkrafttorsion spricht.

Wir gehen nun an die Berechnung der im Querschnitt wirkenden Schubspannungen (Bild 64). Die auf einem kleinen Teilquerschnitt $t \cdot ds$ wirkende Schubspannung τ liefert zum Torsionsmoment M_T , den Beitrag $dM_T = \tau \cdot t \cdot ds \cdot r$. Summierung aller entsprechenden Beiträge liefert

$$M_T = \int_{(U)} r \cdot \tau \cdot t \cdot ds .$$

Da sich voraussetzungsgemäß weder das Torsionsmoment noch der Querschnitt des Stabes mit x ändert, ändert sich die Schubspannung nicht mit x . Da auf Grund der eben genannten Voraussetzungen nirgends im Querschnitt Normalspannungen wirken, muss, wie eine Gleichgewichtsbetrachtung eines durch zwei parallele Längsschnitte herausgeschnittenen Teiles des Stabelementes zeigt, der Schubfluss $T = \tau \cdot t$ über s konstant sein. Das Produkt $\tau \cdot t$ kann damit vor das Integral gezogen werden, sodass sich ergibt $M_T = \tau \cdot t \cdot \int r \cdot ds$. Wie man Bild 64 entnimmt, stellt das Produkt $r \cdot ds$ den doppelten Inhalt des schraffierten Dreiecks dar ($r \cdot ds = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = 2 \cdot A_{\text{Dreieck}}$), sodass das entsprechende Integral die doppelte von der Profilmittellinie eingeschlossene Fläche darstellt: $M_T = \tau \cdot t \cdot 2 \cdot A_m$. Damit ergibt sich für die im Querschnitt vorhandene Schubspannung hier die gleiche Formel wie beim dünnwandigen Kreisrohr:

$$\tau = \frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t} \quad \text{1. Formel von Bredt}$$

³⁷⁾ Ganz ähnlich lagen ja die Dinge bei der Biegung. Auch dort bleiben ebene Querschnitte nur in einem Sonderfall eben, nämlich bei der querkraftfreien Biegung prismatischer Stäbe mit Rechteckquerschnitt. Eine Verwölbung tritt stets auf bei Querkraftbiegung, führt jedoch im Falle einer über x konstanten Querkraft zu keinen zusätzlichen Normalspannungen, wenn sie nicht an den in Stabenden behindert wird.

Wie nun kommen wir zu einer Aussage über die zugehörige Verformung, die bezogene Verdrehung? Die beim Kreisring gültige Beziehung $\vartheta = \frac{\tau}{G \cdot r}$ kann hier nicht

verwendet werden, was man schon erkennt an einem Versuch zur Beantwortung der Frage: Welches r und welches τ soll gelten? Ein Vergleich verschiedener Möglichkeiten zeigt, dass man hier am elegantesten und einfachsten zum Ziel kommt mit einer kleinen Arbeitsbetrachtung. Die von den äußeren Kräften bei der Verformung geleistete (Formänderungs-) Arbeit beträgt, wie wir wissen,

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot \varphi,$$

wenn sich die beiden durch M_T beanspruchten Endquerschnitte gegeneinander um den Winkel φ gedreht haben. Da bei dem Verformungsvorgang keine Energie dissipiert wird (er soll ja reversibel sein), muss die gleiche Arbeit im Stab gespeichert sein und von den inneren Kräften bei der Entlastung geleistet werden. Die in einer Volumeneinheit gespeicherte Arbeit (siehe etwa Kapitel 1) beträgt nun, wenn dort die Spannung τ herrscht

$$a_i = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}.$$

In einem Element von der Größe $ds \cdot t \cdot dx$ ist also die Arbeit

$$a_i \cdot ds \cdot t \cdot dx = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot ds \cdot t \cdot dx$$

gespeichert. Da in den entsprechenden Elementen aller anderen Stabquerschnitte die gleiche Spannung herrscht, ist in dem Prisma $t \cdot ds \cdot l$ die Arbeit

$$dA_i = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot ds \cdot t \cdot l$$

gespeichert. Wir setzen hier für τ den oben errechneten Ausdruck und erhalten:

$$dA_i = \left(\frac{M_T}{2 \cdot A_m \cdot t} \right)^2 \cdot \frac{ds \cdot t \cdot l}{2 \cdot G} = \frac{M_T^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A_m^2 \cdot t} \cdot ds.$$

Summation der in allen Prismen gespeicherten Arbeit liefert die im ganzen Stab gespeicherte Arbeit

$$A_i = \int_{(U)} \frac{M_T^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A_m^2 \cdot t} \cdot ds = \frac{M_T^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A_m^2} \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

wobei wir die über s konstanten Werte vor das Integral gezogen haben. Diese im Stab gespeicherte Arbeit muss nun gleich der oben angegebenen bei der Verformung von den äußeren Kräften geleisteten Arbeit A_a sein, sodass sich ergibt

$$\frac{1}{2} \cdot M_T \cdot \varphi = \frac{M_T^2 \cdot l}{8 \cdot G \cdot A_m^2} \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

und mit $\frac{\varphi}{l} = \vartheta$ schließlich $\vartheta = \frac{M_T}{4 \cdot G \cdot A_m^2} \cdot \oint \frac{ds}{t}$

die gesuchte Beziehung $\vartheta = \vartheta(M_T)$.

Abkürzend führen wir nun neu ein das Torsionsträgheitsmoment

$$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \text{2. Formel von Bredt}^{38)}$$

und schreiben damit allgemein $\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t}$.

Für den bereits behandelten Sonderfall des Kreisringes ergibt sich mit

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_m}{t} \quad \text{natürlich der o. a. Wert}$$

$$I_t = 2 \cdot \pi \cdot r_m^3 \cdot t = 2 \cdot A_m \cdot r_m \cdot t = I_p.$$

Wir stellen deshalb fest: Die für das dünnwandige Kreisrohr gefundene Lösung lässt sich ohne weiteres auf beliebig geformte dünnwandige Hohlquerschnitte anwenden, wenn man anstelle des polaren Trägheitsmomentes das Torsionsträgheitsmoment

$$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad \text{einführt.}$$

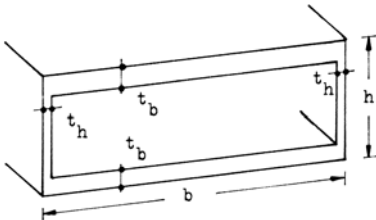


Bild 65

Hohlkasten mit Rechteckquerschnitt

³⁸⁾ Rudolf Bredt, 1842–1900

Die Bestimmung des numerischen Wertes des o.a. Ringintegrals für regelmäßige Querschnitte, wie sie in der Technik vorkommen, ist recht einfach. So hat dies Integral z.B. für einen rechteckförmigen Hohlkasten (Bild 65) den unmittelbar angebaren Wert

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2 \cdot b}{t_b} + \frac{2 \cdot h}{t_h} = 2 \cdot \frac{b \cdot t_h + h \cdot t_b}{t_b \cdot t_h}$$

Hier ein kleines Zahlenbeispiel:

Der in Bild 66 dargestellte Hohlkasten wird durch $M_T = 10000 \text{ kNm}$ beansprucht. Es soll der auftretende Schubfluss, die größte Schubspannung und die zugehörige bezogene Verdrehung bestimmt werden.

Lösung:

1) Querschnittswerte:

$$\text{vorh } A_m = 268 \cdot 940 = 25,2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

$$\text{vorh } I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \cdot (25,2 \cdot 10^4)^2}{2 \cdot \left(\frac{268}{1,5} + \frac{940}{1,6} + \frac{940}{2,0} \right)} = 1,80 \cdot 10^8 \text{ cm}^4.$$

2) Nachweis der Spannungen und Verformung:

$$\text{vorh } T = \frac{M_T}{2 \cdot A_m} = \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot 25,2 \cdot 10^4} = 1,98 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}.$$

In den dünnen Seitenwänden wirkt damit $\max \tau = 1,98/1,5 = 1,32 \text{ kN/cm}^2$.

Die bezogene Verdrehung ergibt sich mit $G = 8100 \text{ kN/cm}^2$ zu

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t} = \frac{10^6}{8100 \cdot 1,80 \cdot 10^8} = 0,69 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}.$$

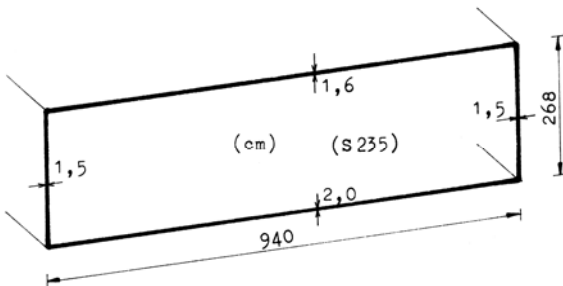


Bild 66
Hohlkasten ohne
Zwischenstege

Zur Veranschaulichung dieses Wertes die folgende kleine Rechnung: Wird der Hohlkasten etwa über seine Länge von 20 m durch das konstante Torsionsmoment $M_T = 10000 \text{ kNm}$ beansprucht, so verdrehen sich die Endquerschnitte gegenseitig um den Winkel $\varphi = 20 \cdot 100 \cdot 0,69 \cdot 10^{-6} = 1,38 \cdot 10^{-3}$. Ein von der Drehachse ³⁹⁾ $r = 5 \text{ m}$ entfernter Punkt eines Endquerschnittes durchläuft also einen Bogen von der Länge $b = 500 \cdot 1,38 \cdot 10^{-3} = 0,69 \text{ cm}$, wenn der andere Endquerschnitt unverdrehbar gehalten wird.

Es muss in diesem Zusammenhang erwähnt werden, dass wir bei der Ableitung der oben verwendeten Beziehungen stillschweigend vorausgesetzt haben, dass die Querschnittsform bei der Beanspruchung erhalten bleibt.⁴⁰⁾ Damit der hier untersuchte Hohlkasten diese Voraussetzung erfüllt, muss er ausgesteift werden. Das kann durch Anordnung von Querschotts oder Längsschotts geschehen, die entweder als (vollwandiges) Blech oder als Fachwerk ausgebildet werden. Bei Anordnung von Längsschotts (Stegen) wird das Problem des mehrzelligen Hohlquerschnitts aktuell, siehe Absatz 2.5.4.

2.5.2 Torsionsspannungen in nicht-kreisförmigen Vollquerschnitten

Die Beobachtung des Formänderungsverhaltens von tordierten Stäben mit nicht – kreisförmigem, sagen wir etwa mit rechteckigem Vollquerschnitt zeigt, dass hier ebene Querschnitte bei der Verdrehung nicht eben bleiben sondern sich verwölben, wie wir das schon bei nicht zentralsymmetrischen (dünnwandigen) Hohlquerschnitten gesehen haben. Während wir jedoch bei jenen Querschnitten wegen ihrer Dünnwandigkeit eine Annahme wenigstens über die Richtung der Schubspannungen im Querschnitt machen konnten, ist das hier nun nicht mehr möglich. Außerdem bleiben bei einer Verdrehung radiale Linien nicht mehr gerade, sodass auch die Proportionalität zwischen τ und r nicht mehr besteht.⁴¹⁾ Dementsprechend gestaltet sich selbst für die Saint-Venantsche Torsion, bei der sich die Querschnitte ungehindert und frei verwölben können und also keine Zusatzspannungen entstehen, die Untersuchung des Problems nicht mehr ganz einfach. Wir wollen deshalb im Rahmen dieser Betrachtungen ohne weitere Berechnungen sofort das Ergebnis dieser

³⁹⁾ Über die Lage der Drehachse haben wir weder hier noch bei den anderen Problemen der Saint-Venantschen Torsion irgendwelche Angaben gemacht. Tatsächlich sind Schubspannungsverlauf und bezogene Verdrehung von ihr unabhängig. Abhängig von ihr ist jedoch die Verwölbung. Die dabei auftretenden Verschiebungen der einzelnen Querschnittspunkte in Längsrichtung haben wir im Rahmen dieser Einführung nicht berechnet.

⁴⁰⁾ Bei der Behandlung eines Bauteils als Stab wird das stets vorausgesetzt. Bei der Behandlung als Flächentragwerk (hier Fachwerk) nie.

⁴¹⁾ Diese Proportionalität besteht nur beim Kreis und Kreisring.

Untersuchungen zur Kenntnis nehmen. Ein wesentliches Ergebnis ist, dass auch für Stäbe mit beliebig geformtem Vollquerschnitt sich die Verdrehung in der für den Kreisquerschnitt ermittelten Form

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t}$$

angeben lässt, wobei – wie schon bei den Hohlquerschnitten – I_p durch I_t ersetzt wird. Für viele verschiedene Querschnittsformen hat C. Weber den Wert von I_t in einer 1921 vom VDI herausgegebenen Schrift (Die Lehre der Drehungsfestigkeit) angegeben. Uns interessiert vor allem der Rechteckquerschnitt (Bild 67), für den sich $I_t = \beta \cdot b^3 \cdot h$ ergibt ($h/b > 1$).

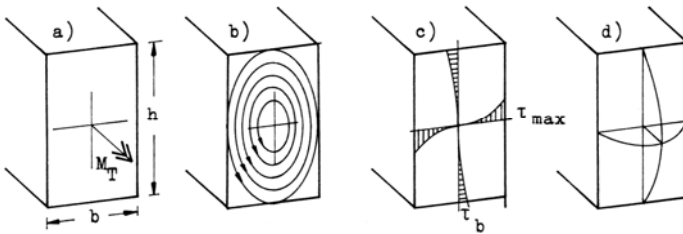


Bild 67
Torsionsspannungen in rechteckigen Vollquerschnitten

Der vom Seitenverhältnis abhängige Korrekturfaktor β ist für einige Werte von h/b in der Tafel 4 angegeben. Was die Spannungen in nicht kreisförmigen Querschnitten betrifft, so hat ebenfalls C. Weber für viele Querschnittsformen Größe und Ort der maximalen Schubspannung angegeben. Für den uns interessierenden Rechteckquerschnitt ergibt sich die größte Schubspannung in der Mitte der längeren Seite, und zwar in der uns bekannten Form $\max \tau = M_T/W_t$ mit $W_t = \alpha \cdot b^2 \cdot h$. Der Korrekturfaktor α ist wieder vom Seitenverhältnis des Rechtecks abhängig und für einige Werte von h/b ebenfalls in der Tafel 4 angegeben. Die Spannung in der Mitte der kurzen Seite ergibt sich dabei zu $\tau = \gamma \cdot \max \tau$, wobei γ ebenfalls der Tafel 4 zu entnehmen ist. Was die Spannungsverteilung angeht, so kann man sich von ihr ein recht gutes Bild machen mit Hilfe von zwei allgemein gültigen Analogien: Dem Strömungsgleichnis und dem Seifenhautgleichnis.

Tafel 4

h/b	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,140	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

Das Strömungsgleichnis⁴²⁾ besagt folgendes: Zirkuliert in einem zylindrischen Gefäß, das den gleichen Querschnitt hat wie der tordierte Stab, eine reibungslose und inkompressible Flüssigkeit mit konstantem Wirbel, so stimmen die sich dabei einstellenden Strömungslinien mit den Schubspannungslinien im Querschnitt des tordierten Stabes (Bild 67b) überein, während die Strömungsgeschwindigkeit der Intensität der Schubspannung proportional ist.

Das Seifenhautgleichnis besagt dieses: Wird aus einem Blech ein Loch ausgeschnitten, dessen Form mit dem Querschnitt des tordierten Stabes übereinstimmt, so gibt die Form einer elastischen Haut, die über dieses Loch gespannt und von einer Seite her einem kleinen Überdruck ausgesetzt wird (Bild 67d) Aufschluss über die Schubspannungen in dem Querschnitt: Die Höhenschichtlinien stimmen mit den Schubspannungslinien überein und das Gefälle des Hügels, also die Dichte der Höhenschichtlinien, ist der Intensität der örtlichen Schubspannung proportional. Das Volumen des durch die gewölbte Haut gebildeten Hügels bezogen auf den dabei herrschenden Überdruck ist dem Torsionsträgheitsmoment des Querschnitts proportional.

Eine Auswertung dieser Gleichnisse für den Rechteckquerschnitt zeigt unmittelbar, dass die Schubspannungen nicht mehr geradlinig über die Querschnittsbreite oder -höhe verteilt sind (Bild 67c) und in den vier Ecken verschwinden.

Hierzu ein kleines Zahlenbeispiel:

Ein prismatischer Stab mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge $a = 10 \text{ cm}$ aus Baustahl S235 wird durch das Torsionsmoment $M_T = 10 \text{ kNm}$ beansprucht. Wie groß sind die maximal auftretende Schubspannung und die bezogene Verdrehung?

Lösung:

1) Querschnittswerte:

$$\text{vorh } I_t = \beta \cdot b^3 \cdot h = 0,140 \cdot 10000 = 1400 \text{ cm}^4$$

$$\text{vorh } W_t = \alpha \cdot b^2 \cdot h = 0,208 \cdot 1000 = 208 \text{ cm}^3$$

2) Nachweis der Spannung und Verformung

$$\max \tau = M_T / W_t = 10 \cdot 100 / 208 = 4,82 \text{ kN/cm}^2$$

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t} = \frac{10 \cdot 100}{8100 \cdot 1400} = 0,88 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{cm}} .$$

⁴²⁾ nach Ludwig Prandtl, 1875–1953

Hat der Stab einen rechteckigen Querschnitt gleichen Flächeninhalts, also etwa mit den Kantenlängen $h/b = 20/5$ (cm), so ergibt sich:

$$1) \text{ vorh } I_t = \beta \cdot b^3 \cdot h = 0,281 \cdot 125 \cdot 20 = 702,5 \text{ cm}^4$$

$$\text{vorh } W_t = \alpha \cdot b^2 \cdot h = 0,282 \cdot 25 \cdot 20 = 141 \text{ cm}^3$$

$$2) \text{ max } \tau = M_T / W_t = 10 \cdot 100 / 141 = 7,09 \text{ kN/cm}^2$$

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t} = \frac{10 \cdot 100}{8100 \cdot 702,5} = 1,76 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{cm}}$$

Hat der Stab einen Kreisquerschnitt gleichen Flächeninhalts, also mit dem Durchmesser $D = 11,25$ cm, so ergibt sich:

$$1) \text{ vorh } I_t = \pi \cdot R^4 / 2 = 1573 \text{ cm}^4 \text{ und } \text{vorh } W_t = \pi \cdot R^3 / 2 = 280 \text{ cm}^3$$

$$\text{max } \tau = M_T / W_t = 10 \cdot 100 / 280 = 3,57 \text{ kN/cm}^2$$

$$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t} = \frac{10 \cdot 100}{8100 \cdot 1573} = 0,78 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{cm}}$$

2.5.3 Torsionsspannungen in Walzprofilen und anderen schlanken offenen Querschnitten

Für die Praxis sehr wichtig ist die Kenntnis der Spannungen in tordierten Walzprofilen. Die genaue Lösung hierfür hat A. Föppl 1917 angegeben, auf den auch die im Folgenden wiedergegebenen Näherungsausdrücke zurückgehen. Man kann sich die Walzprofile zusammengesetzt denken aus verschiedenen schmalen Rechtecken, für deren Torsionsträgheitsmoment nach Tafel 4 der Korrekturfaktor $\beta = 0,333 = 1/3$ gilt. Damit ergibt sich unter Zuhilfenahme eines Beiwertes η , der die spezielle Konfiguration der einzelnen Profile berücksichtigt, das Torsionsträgheitsmoment in der Form

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum b_i^3 \cdot h_i \quad h_i > b_i$$

Tafel 5

	L	U	T	I	IPB
η	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29

Der Wert von η ist für einige Profile in Tafel 5 angegeben. In ähnlicher Weise lässt sich auch die Schubspannung berechnen. In der Mitte der Längsseite des k-ten Rechtecks ergibt sich

$$\tau_k = \frac{M_T \cdot b_k}{\frac{\eta}{3} \cdot \sum b_i^3 \cdot h_i}$$

Die größte im Querschnitt auftretende Schubspannung beträgt damit

$$\max \tau = \frac{M_T}{I_t} \cdot b_{\max},$$

so dass das Torsionswiderstandsmoment solcher Querschnitte angegeben werden kann in der Form

$$W_t = \frac{I_t}{b_{\max}}$$

Genauere Werte für das Torsionsträgheitsmoment erhält man auf Grund der Untersuchungen von *Trayer & March* (NACA – Report 334, 1930), für ein IPB – Profil (HE-B-Profil) etwa in der Form

$$I_t = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot b \cdot t^3 \left(1 - 0,630 \cdot \frac{t}{b} \right) \right] + \frac{1}{3} (h - 2 \cdot t) \cdot s^3 + 2 \cdot \alpha \cdot D^4$$

wobei D der Durchmesser des im Übergangsbereich von Steg und Flansch eingeschriebenen Kreises ist und α von den Profilstärken und vom Ausrundungsradius beim Übergang Steg/Flansch abhängt. Die übrigen Symbole stimmen überein mit den in Profiltafeln gegebenen. *Bornscheuer* hat für etliche Profile das Torsionsträgheitsmoment nach solchen Formeln berechnet und im „Stahlbau“ 3/1961 bzw. 12/1963 veröffentlicht.

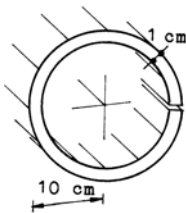


Bild 68

Solche offenen Profile sind für die Übertragung von Torsionsmomenten nicht geeignet; sie können im Vergleich zu geschlossenen Profilen etwa gleicher Außenabmessungen nur kleine Torsionsmomente übertragen und zeigen dabei vergleichsweise große Verformungen. Um dies zu zeigen, berechnen wir für ein geschlitztes Stahlrohr (Bild 68) das (größte) zulässige Torsionsmoment und die zugehörige bezogene Verdrehung. Mit

$$I_t = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 1^3 / 3 = 20,9 \text{ cm}^4, \quad W_t = 20,9 / 1 = 20,9 \text{ cm}^3$$

$$G = 8100 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{und} \quad \text{zul } \tau = 9 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{ergibt sich} \quad \text{zul } M_T = 9 \cdot 20,9 = 188 \text{ kNcm} = 1,88 \text{ kNm}$$

$$\text{und} \quad \vartheta = \frac{188}{8100 \cdot 20,9} = 1,11 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}.$$

Das in Abschnitt 2.5 untersuchte ungeschlitzte Rohr weist bei gleichgroßem Torsionsmoment folgende Verdrillung und Spannung auf:

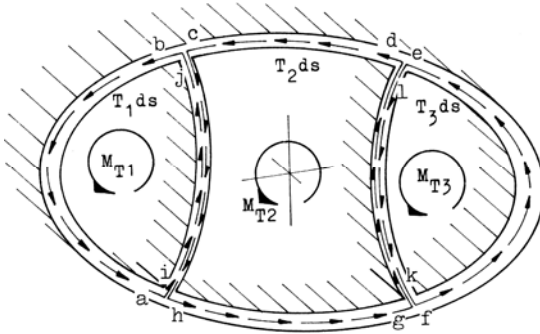
$$\vartheta = \frac{188}{8100 \cdot 6283} = 0,00369 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{188}{628,3} = 0,30 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Man sieht: Wirken auf ein geschlitztes und ein ungeschlitztes Rohr Torsionsmomente gleicher Größe, so sind die im geschlitzten Rohr entstehenden Spannungen etwa 30 mal so groß wie die im ungeschlitzten Rohr entstehenden Spannungen, während die bezogene Verdrehung, die Verdrillung, des geschlitzten Rohres etwa 300 mal so groß ist wie diejenige des ungeschlitzten Rohres.

2.5.4 Torsionsspannungen in mehrzelligen dünnwandigen Hohlquerschnitten

In Abschnitt 2.5.1 haben wir die Schubspannungen in einzelligen Hohlquerschnitten bei Saint-Venantscher Torsion untersucht. Wenn nun solche Hohlquerschnitte sehr groß werden, wie etwa bei großen Brückenbauwerken, dann kann es aus verschiedenen Gründen zweckmäßig oder gar erforderlich werden, Zwischenstege vorzusehen, wobei dann mehrzellige Hohlquerschnitte entstehen. Wir wollen deshalb nun die Frage beantworten, wie die Schubspannungen sich in einem solchen mehrzelligen dünnwandigen Hohlquerschnitt bei Torsion verteilen. Dazu wählen wir den in Bild 69 dargestellten dreizelligen Hohlquerschnitt und nehmen zunächst an, jede Einzelzelle sei für sich allein und unabhängig von den Nachbarzellen frei drehbar.⁴³⁾ Dann nimmt jede Zelle einen (zurzeit noch unbekannten) Anteil M_{Ti} des Torsionsmomentes M_T auf, zu dem nach Abschnitt 2.5.1 ein ebenfalls noch unbekannter Schubfluss $T_i = M_{Ti} / (2 \cdot A_i)$ gehört. Unbekannt sind damit (in unserem Fall) die drei Torsionsmomente M_{T1} , M_{T2} , M_{T3} sowie die drei Schubflüsse T_1 , T_2 und T_3 , also sechs Größen, zu deren Berechnung nur die 3 Bestimmungsgleichungen

⁴³⁾ Bei der Realisation dieses Gedankenmodells gibt es gewisse Schwierigkeiten. Wir wollen nämlich nicht etwa die Stege entlang ihrer Mittellinie auftrennen, sondern sie sowohl zur einen als auch zur anderen benachbarten Zelle rechnen; dann wirken in ihnen Schubflüsse aus der Beanspruchung beider Zellen, wie wir noch sehen werden.

**Bild 69**

Torsionsspannungen in mehr-
zelligen Hohlquerschnitten

$$T_1 = M_{T1}/(2 \cdot A_1) \quad , \quad T_2 = M_{T2}/(2 \cdot A_2) \quad \text{und} \quad T_3 = M_{T3}/(2 \cdot A_3)$$

zur Verfügung stehen. Eine weitere Bestimmungsgleichung liefert die Bedingung, dass die Summe der drei Einzelmomente gleich sein muss dem gegebenen Moment:

$$M_T = M_{T1} + M_{T2} + M_{T3} \quad .$$

Für die eindeutige Lösung dieses Systems fehlen 2 Gleichungen. Diese liefert eine Betrachtung des Verformungsverhaltens des tordierten Trägers. Zu den drei Torsionsmomenten M_{Ti} gehören nämlich drei bezogene Drehwinkel ϑ_i die sich nun allerdings wegen des in der letzten Fußnote erläuterten Umstandes nicht in der für einzellige Hohlquerschnitte gültigen Form

$$\vartheta_i = \frac{M_{Ti}}{4 \cdot G \cdot A_i^2} \oint \frac{ds}{t}$$

ergeben, da bei deren Herleitung ein über den Umfang konstanter Schubfluss vorausgesetzt wurde. Sie ergeben sich, wenn wir an die in Abschnitt 2.5.1 gemachten Ausführungen unmittelbar anknüpfen, hier in dieser Form:

Einerseits ist

$$dA_i = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot ds \cdot t \cdot l = \frac{(\tau \cdot t)^2}{2 \cdot G} \cdot l \cdot \frac{ds}{t} = \frac{T^2}{2 \cdot G} \cdot l \cdot \frac{ds}{t} \rightarrow A_i = \frac{l}{2 \cdot G} \cdot \int_{(U)} \frac{T^2}{t} \cdot ds$$

Andererseits ist

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \int_{(U)} T \cdot r \cdot ds = \varphi \cdot \int_{(U)} T \cdot dA_m \quad ,$$

sodass sich wegen $A_i = A_a$ ergibt

$$\frac{\varphi}{l} = \vartheta = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_m} \cdot \oint \frac{T}{t} ds$$

Damit erhalten wir

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_1} \cdot \oint_{(1)} \frac{T_1}{t} ds, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_2} \cdot \oint_{(2)} \frac{T_2}{t} ds \quad \text{und}$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{2 \cdot G \cdot A_3} \cdot \oint_{(3)} \frac{T_3}{t} ds$$

Durch das Auftreten dieser Drehwinkel hat sich einerseits die Zahl der Unbekannten um drei erhöht, andererseits haben sich gleichzeitig drei weitere Gleichungen ergeben: 9 Unbekannten stehen nun 7 Bestimmungsgleichungen gegenüber. Der „Ausgleich“ wird hergestellt durch Einführung einer zehnten Unbekannten, der Verdrehung des Gesamtquerschnitts ϑ . Die drei Drehwinkel ϑ_1 , ϑ_2 und ϑ_3 müssen nämlich miteinander übereinstimmen und alle gleich sein dem Drehwinkel des Gesamtquerschnitts ϑ , was die drei nun noch fehlenden Bestimmungsgleichungen liefert:

$$\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$$

Damit ist das Problem eindeutig lösbar, es ist im Prinzip gelöst. Bevor wir den Gang der Rechnung an einem Beispiel zeigen, überlegen wir noch, welche der o.a. Größen für eine evtl. sich anschließende Bemessung gebraucht werden und welche nicht. Gebraucht werden mit Sicherheit die drei Schubflüsse T_1 bis T_3 und der bezogene Drehwinkel des Gesamtquerschnitts ϑ . Dementsprechend eliminieren wir die übrigen Größen und erhalten für die vier o.a. Unbekannten die vier Bestimmungsgleichungen

$$2 \cdot A_1 \cdot T_1 + 2 \cdot A_2 \cdot T_2 + 2 \cdot A_3 \cdot T_3 = M_T \quad (\text{I})$$

$$\frac{1}{2 \cdot G \cdot A_1} \cdot \left[T_1 \cdot \int_a^b \frac{ds}{t} + (T_1 - T_2) \cdot \int_j^i \frac{ds}{t} \right] = \vartheta \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{2 \cdot G \cdot A_2} \cdot \left[T_2 \cdot \int_c^d \frac{ds}{t} + (T_2 - T_3) \cdot \int_k^l \frac{ds}{t} + T_2 \cdot \int_h^g \frac{ds}{t} + (T_2 - T_1) \cdot \int_j^i \frac{ds}{t} \right] = \vartheta \quad (\text{III})$$

$$\frac{1}{2 \cdot G \cdot A_3} \cdot \left[T_3 \cdot \int_f^e \frac{ds}{t} + (T_3 - T_2) \cdot \int_l^k \frac{ds}{t} \right] = \vartheta \quad (\text{IV})$$

Wie man sieht, handelt es sich dabei um vier lineare Gleichungen, deren Koeffizienten, wie wir gleich sehen werden, sich für Querschnitte, wie sie in der Bautechnik vorkommen, sehr einfach berechnen lassen. Hier nun die Berechnung des in Bild 70 dargestellten Querschnitts.

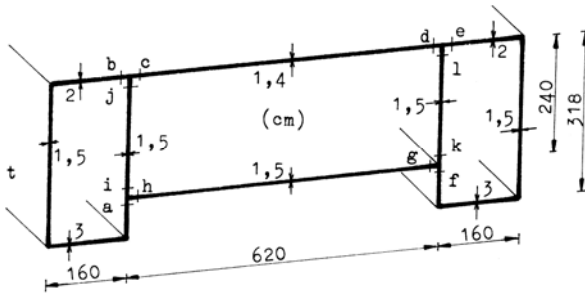


Bild 70
Mehrzelliger Hohlquerschnitt

Mit $G = 8100 \text{ kN/cm}^2$ und

$$A_1 = 160 \cdot 318 = 509 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

$$2 \cdot G \cdot A_1 = 824 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

$$A_2 = 620 \cdot 240 = 1488 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

ergibt sich $2 \cdot G \cdot A_2 = 2410 \cdot 10^6 \text{ kN}$

$$A_3 = A_1 = 509 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$$

$$2 \cdot G \cdot A_3 = 824 \cdot 10^6 \text{ kN}$$

Die Integrale ergeben sich zu

$$\int_a^b \frac{ds}{t} = \frac{78}{1,5} + \frac{160}{3} + \frac{318}{1,5} + \frac{160}{2} = 397,3$$

$$\int_j^i \frac{ds}{t} = \frac{240}{1,5} = 160 \quad \int_i^j \frac{ds}{t} = \frac{240}{1,5} = 160$$

$$\int_c^d \frac{ds}{t} = \frac{620}{1,4} = 443 \quad \int_e^f \frac{ds}{t} = \int_a^b \frac{ds}{t} = 397,3$$

$$\int_l^k \frac{ds}{t} = \frac{240}{1,4} = 160 \quad \int_k^l \frac{ds}{t} = \int_j^i \frac{ds}{t} = 160$$

$$\int_g^h \frac{ds}{t} = \frac{620}{1,5} = 413$$

Damit ergibt sich mit $M_T = 10000 \text{ kNm} = 10^6 \text{ kNcm}$

$$1018 \cdot T_1 + 2976 \cdot T_2 + 1018 \cdot T_3 = 1 \cdot 10^4$$

$$397,3 \cdot T_1 + 160 \cdot (T_1 - T_2) = 824 \cdot 10^6 \cdot \vartheta$$

$$160 \cdot (T_2 - T_1) + 413 \cdot T_2 + 443 \cdot T_2 + 160 \cdot (T_2 - T_3) = 2410 \cdot 10^6 \cdot \vartheta$$

$$397,3 \cdot T_3 + (T_3 - T_2) \cdot 160 = 824 \cdot 10^6 \cdot \vartheta$$

Wir ordnen das System nach den Unbekannten und erhalten

$$+ 1018 \cdot T_1 + 2976 \cdot T_2 + 1018 \cdot T_3 = 10^4$$

$$+ 557,3 \cdot T_1 - 160 \cdot T_2 - 824 \cdot 10^6 \cdot \vartheta = 0$$

$$- 160 \cdot T_1 + 1176 \cdot T_2 - 160 \cdot T_3 - 2410 \cdot 10^6 \cdot \vartheta = 0$$

$$- 160 \cdot T_2 + 557,3 \cdot T_3 - 824 \cdot 10^6 \cdot \vartheta = 0$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung

$$T_1 = 1,80 \text{ kN/cm}, \quad T_2 = 213 \text{ kN/cm}, \quad T_3 = 180 \text{ kN/cm}, \quad \vartheta = 0,80 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$$

Damit können die (Saint-Venantschen) Schubspannungen an jeder Stelle des Querschnitts unmittelbar angegeben werden.

Aus der Gleichung $\vartheta = M_T / (G \cdot I_t)$ kann man nun das Torsionsträgheitsmoment dieses Querschnitts ermitteln.

Es ergibt sich zu

$$I_t = \frac{10^6}{8100 \cdot 0,80 \cdot 10^{-6}} = 1,54 \cdot 10^8 \text{ cm}^4.$$

Ein Vergleich mit den Ergebnissen des einzelligen Hohlkastens von Bild 66 zeigt, dass eine Unterteilung des Hohlquerschnitts von der Torsion her gesehen nicht zu merklich größeren Ergebnissen führt.

Schließlich wieder die Frage: Welche Belastung erzeugt in einem Stab ausschließlich den in diesem Abschnitt 2.5 dargestellten Spannungs- und Verformungszustand?

Antwort: Ein in den Endquerschnitten des Stabes angreifendes und in Ebenen senkrecht zur Stabachse wirkendes Momentenpaar.

Es muss in diesem Zusammenhang daran erinnert werden, dass bei Stäben mit nicht kreis- oder kreisringförmigen Querschnitt zusätzlich Verschiebungen von Querschnittspunkten in Richtung der Stabachse auftreten, die nicht behindert werden dürfen, wenn die o.a. Formeln allein die in einem Stabquerschnitt wirkenden Spannungen erschöpfend beschreiben sollen.

2.6 Spannungen infolge von Scherkräften

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir für Schnittgrößen, die in Stabquerschnitten wirken bzw. übertragen werden, die zugehörige Spannungsverteilung angegeben. Bei der Berechnung dieser Spannungsverteilungen mussten wir verschiedene Annahmen machen. Insbesondere setzten wir voraus, dass der betrachtete

Querschnitt sich in einiger Entfernung von einer Lasteinleitungsstelle befindet und dass sich dieser Querschnitt nicht oder jedenfalls nicht sprunghaft ändert.

Dem Leser wird nun unmittelbar klar sein, dass der entwerfende Ingenieur auch an solchen Stellen eines Tragwerks, wo diese Voraussetzungen nicht gelten, Kenntnis von der Beanspruchung haben muss, um wirtschaftlich konstruieren und bestimmte Sicherheiten garantieren zu können. In diesem Zusammenhang sind zwei Gebiete zu nennen

- 1) Die Berechnung der Spannungen in Verbindungsmitteln und an Stellen konzentrierter Krafteinleitung.
- 2) Die Berechnung von Spannungen an Stellen mit einer sprunghaften Querschnittsveränderung.

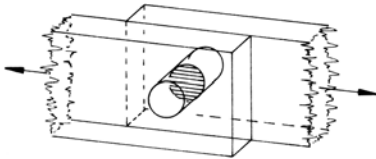


Bild 71

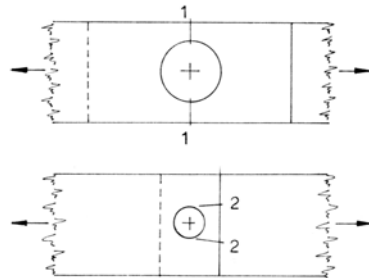


Bild 72

Wir wollen hier kurz den unter 1) genannten Fragenkreis erörtern und betrachten dazu etwa die in Bild 71 angedeutete Nietverbindung (Nietköpfe nicht dargestellt). Wie kann eine solche Nietverbindung zerstört werden? Im Wesentlichen auf vier verschiedene Arten:

1. Der Restquerschnitt des Stabes, also der um das Nietloch verringerte Normalquerschnitt, kann überbeansprucht werden und nachgeben. Bruch erfolgt dabei entlang der Linie 1 – 1 (Bild 72). Die Ursache hierfür: Der Stab wurde durch das Nietloch zu stark geschwächt.
2. Das Stabmaterial zwischen Nietloch und Stabende kann sozusagen herausgedrückt werden. Bruch erfolgt dabei entlang der Linie 2 – 2 (Bild 72). Die Ursache hierfür: Der Randabstand des Nietes (in Kraftrichtung gemessen) war zu gering.
3. Der Niet kann abscheren. Bruch (Materialtrennung) erfolgt in den Ebenen zwischen den einzelnen Stäben (Bild 71; schraffierte Fläche). Die Ursache hierfür: Die Querschnittsfläche des Nietes war zu klein.

4. Das Stabmaterial im gedrückten Bereich des Lochrandes kann plastifizieren, wodurch die Verbindung unbrauchbar wird. Die Ursache hierfür: Die „Auflagerfläche“ des Nietes, i. A. die Dicke des Stabes, war zu gering.

Wir wenden uns hier dem in Punkt 3 erwähnten Versagen zu. Für das Abscheren des Nietes werden hauptsächlich Tangentialspannungen verantwortlich sein, deren Verteilung auf dem kleinen Nietquerschnitt uns natürlich völlig unbekannt ist. Es lohnt sich jedoch nicht, in die Ermittlung dieser Spannungsverteilung viel Fleiß und Mühe zu investieren, da die Forderung nach Wirtschaftlichkeit und Sicherheit viel einfacher erfüllt werden kann: Wir bestätigen experimentell, dass die Schertragkraft

eines Nietes proportional der Scherfläche ist. Der Quotient $\frac{\text{Schertragkraft}}{\text{Scherfläche}}$ hat dann

für alle Niete einen festen Wert, den wir als Scherbruchspannung definieren. Zu dieser Scherbruchspannung wählen wir einen Sicherheitsabstand und erhalten so eine zulässige Scherspannung, die für die Bemessung maßgebend ist. Diese mittlere Scherspannung sagt über die tatsächliche Spannungsverteilung im Niet nichts aus; sie ist eine Rechengröße.

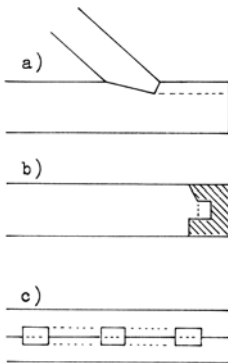


Bild 73
Scherflächen der
a) Versatz
b) Vorlochpfette
c) Dübeln

Ähnlich geht man vor, wenn etwa im Holzbau bei einem Versatz die Vorholzlänge bestimmt werden soll, siehe Bild 73. Auch hier wird mit einer Rechengröße, der über die Scherfläche gleichmäßig verteilten Scherkraft gerechnet: $\tau_s = \frac{S}{A}$. Diese

mittlere Scherspannung sagt gleichfalls nichts aus über die in einem bestimmten Punkt der Scherfläche vorhandene Beanspruchung. Weitere Situationen, in denen mit solchen Rechengrößen gearbeitet wird, sind etwa im Holzbau Holzdübel bei verdübelten Balken und Vorlochpfetten, im Stahlbetonbau Verankerungslängen von Bewehrungsstäben im Beton. Vielleicht wird der eine oder der andere Leser fragen: Warum geht man bei der Bestimmung der zu einer Schnittgröße gehörenden Spannungsverteilung nicht ebenso vor? Die Antwort lautet: Anders als bei Verbindungs-

mitteln umfasst die Untersuchung von ganzen Tragwerken die Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes. Eine korrekte Ermittlung des Verformungszustandes ist aber nur möglich in Verbindung mit einer genauen und wirklichkeitsnahen Ermittlung des Spannungszustandes.

Als Beispiel zeigen wir die Berechnung eines Versatzes. Der unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ schräg ankommende Stab eines Sprengwerks (Bild 74) gibt über einen Stirnversatz die Stabkraft $D = -30,0 \text{ kN}$ an den Untergurt ab. Versatztiefe und Vorholzlänge sind zu bestimmen für den Fall, dass alle Stäbe $b = 14 \text{ cm}$ breit sind.

Lösung: Da in den Kontaktflächen A_1 und A_2 nur Normalspannungen (genauer: Druckspannungen) übertragen werden können, kann die ankommende Stabkraft D eindeutig in die Komponenten D_1 und D_2 zerlegt werden, sobald die Lage der Flächen A_1 und A_2 entschieden ist: D_1 muss senkrecht auf A_1 wirken und D_2 senkrecht auf A_2 . Damit D_1 stets eine Druckkraft bleibt, hat man vereinbart $\beta = (180^\circ - \alpha)/2$. Damit liegt die Neigung von A_1 fest. Die Neigung von A_2 ergibt sich, wenn die Versatztiefe t festgelegt wird. Wir schätzen $t = 4 \text{ cm}$ und überprüfen diesen Wert später. Nun liegen die Neigungen von A_1 und A_2 fest: Die Stabkraft D kann zerlegt werden. Das geschieht hier zeichnerisch und liefert $D_1 = 7,5 \text{ kN}$ und $D_2 = 28,5 \text{ kN}$ (siehe Bild 74). Nun wird überprüft, ob die gewählte Tiefe $t = 4 \text{ cm}$ ausreichend ist: Die in der Fläche A_2 entstehenden Druckspannungen (wir sollten eigentlich sagen: Pressungen) dürfen den zulässigen Wert nicht überschreiten. Das ist hier der Fall. Die Länge des Vorholzes ergibt sich aus der Forderung, dass die Scherspannung in der Scherfläche $A_S = b \cdot l_v$ den zulässigen Wert von $\text{zul } \tau = 0,09 \text{ kN/cm}^2$ nicht überschreitet:

$$\text{erf } l_v = \frac{D_{2h}}{b \cdot \text{zul } \tau} = \frac{28,5 \cdot \cos 15^\circ}{14 \cdot 0,09} = 21,8 \text{ cm} .$$

Gewählt wird $l_v = 24 \text{ cm}$. Die in der Scherfläche wegen D_{2v} auftretenden kleinen Druckspannungen brauchen nicht nachgewiesen zu werden, auch nicht die in A_1 wegen D_1 auftretenden kleinen Druckspannungen.

Abschließend wieder die Frage: Gibt es Systeme, bei denen ein solcher homogener Schubspannungszustand – jedenfalls bereichsweise – auftritt? Ein solches System haben wir bereits kennengelernt: Das tordierte dünnwandige Rohr. Ein zweites System ist das in Bild 75 dargestellte Schubfeld: Ein rechteckiges Gelenkviereck aus starken Stäben, zwischen die ein dünnes Blech gespannt ist.

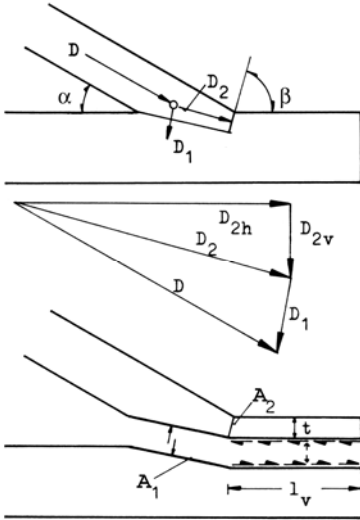


Bild 74
Zur Berechnung eines Versatzes

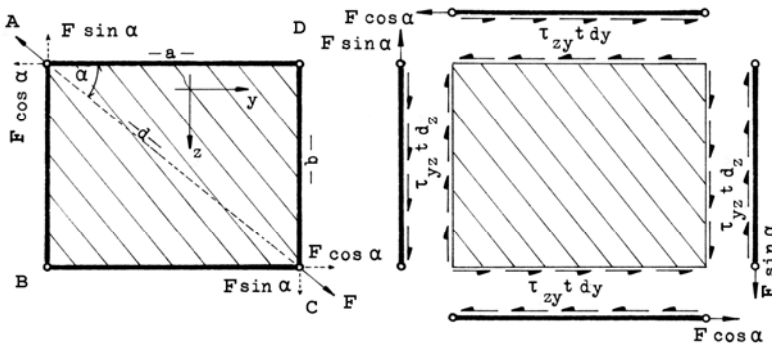


Bild 75 Homogener Schubspannungszustand im Schubfeld (Blechstärke t)

Wenn wir diesen Rahmen in Richtung der Diagonalen AC ziehen, so wird die in A angreifende Kraft von den Stäben AB und AD aufgenommen wie angegeben. Entsprechendes geschieht in Punkt C. Da alle Stäbe an den Punkten B und D spannungslos sein müssen, verlangt das Gleichgewicht eines jeden Stabes, dass zwischen ihm und dem Blechrand tangentielle Kräfte übertragen werden. Nehmen wir an, dass sich diese Kräfte gleichmäßig über die Länge der Stäbe verteilen, so ergeben sich

$$\tau_{yz} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{b \cdot t} \quad \text{und} \quad \tau_{zy} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{a \cdot t}$$

Mit $a/\cos\alpha = b/\sin\alpha = d$ erhält man $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$.

Legen wir nun einen lotrechten Schnitt durch das Blech und betrachten z.B. den linken Teil, so liefert die Gleichgewichtsbedingung, dass auch in diesem Schnitt dieselbe Spannung τ_{yz} auftritt. Ein waagerechter Schnitt zeigt ebenso, dass in jedem waagerechten Schnitt die Spannung τ_{zy} wirkt. Trennen wir durch zwei benachbarte lotrechte und zwei benachbarte waagerechte Schnitte ein Element aus dem Blechfeld heraus, so wirken an den Seiten dieses Elements die Spannungen τ_{yz} bzw. τ_{zy} . Wir haben also einen gleichförmigen Spannungszustand vor uns.

2.7 Schiefe Biegung und Biegung mit Längskraft

In den Abschnitten 2.3 bis 2.5 haben wir ermittelt, welche Spannungen und Verformungen zu den verschiedenen Schnittgrößen gehören. Wir haben dabei auch jedes Mal festgestellt, durch welche besondere Belastung eines Stabes die verschiedenen Schnittgrößen speziell geweckt werden. So führen z.B. Querlasten, die auf den Schubmittelpunkt gerichtet sind und in einer Hauptebene oder in einer Ebene parallel dazu wirken, zur sogenannten geraden Biegung,⁴⁴⁾ während etwa mittige Längskräfte zu einer reinen Längenänderung des beanspruchten Stabes führen. Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, was passiert, wenn

- 1) die Lastebene von Querlasten mit einer Hauptebene des beanspruchten Stabes einen von Null verschiedenen Winkel bildet,
- 2) eine Längskraft nicht mittig, sondern außerhalb der Schwerlinie wirkt.

Die unter 1) genannte Belastung kommt regelmäßig vor, z. B. bei der Berechnung von Dachpfetten, die unter 2) genannte Belastung u. a. bei der Untersuchung von Stützen. Für einen Stab mit Rechteckquerschnitt haben wir die zugehörigen Normalspannungen schon in Abschnitt 2.2 angegeben. Hier sollen sie für Stäbe mit beliebigem Querschnitt ermittelt werden.

2.7.1 Schiefe Biegung

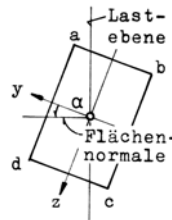
Wir gehen aus von der Betrachtung einer Pfette, die auf dem geneigten Obergurt eines Dachbinders liegt und durch senkrecht wirkende Lasten beansprucht wird (Bild 76). Die Schnittgrößenberechnung liefert unabhängig von der Anordnung oder Form des Balkenquerschnitts ein Biegemoment M und eine Querkraft V . Dieses Biegemoment dreht um eine Achse, die senkrecht auf der Lastebene steht; die Querkraft wirkt in der Lastebene. Wir legen fest die Querschnittsform des Balkens und dessen Orientierung: Der Querschnitt soll rechteckig sein, wobei die Seiten parallel

⁴⁴⁾ Dabei krümmt sich der Balken in der Lastebene.

bzw. senkrecht zum Obergurt des Dachbinders verlaufen. Damit liegen die Richtungen der Schwerpunkthauptachsen fest. Da wir für Schnittgrößen in Richtung dieser Schwerpunkthauptachsen (und nur für solche) die zugehörige Spannungsverteilung kennen, zerlegen wir die Schnittgrößen M und V in Komponenten in Richtung dieser Hauptachsen (Bild 77). Es ergeben sich die Größen

$M_y = M \cdot \cos \alpha$ und $M_z = M \cdot \sin \alpha$, sowie $V_y = -V \cdot \sin \alpha$ und $V_z = V \cdot \cos \alpha$.

Mit V_y und V_z werden die entsprechenden Schubspannungen errechnet, die zu resultierenden Schubspannungen zusammengesetzt werden können. Wir zeigen das hier nicht. Mit M_y und M_z ergibt sich die Normalspannung



Biegemomenten-Ebene

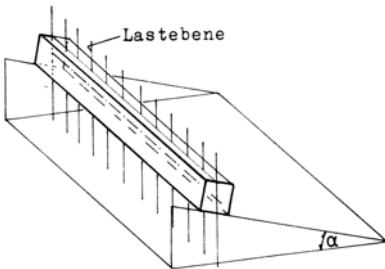
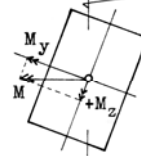


Bild 76 Zur schiefen Biegung

Biege-Ebene

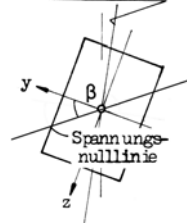


Bild 77

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = f(y, z)$$

Im Hinblick auf das Ziel unserer Bemühungen, den beanspruchten Balken zu bemessen, also die Abmessungen des Querschnitts zu bestimmen, sind wir versucht, anzuschreiben

$$|\max \sigma| = \left| \frac{M_y}{W_y} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right|.$$

Zweifel an der generellen Zulässigkeit dieses Schrittes führen zu der Frage: Gibt es eine solche Spannung im Querschnitt und wenn ja, in welchem Querschnittspunkt? Auf diese Frage gibt es zunächst eine allgemeine Antwort: Die größte Spannung in einem Balkenquerschnitt tritt auf in dem am weitesten von der Spannungsnulllinie entfernten Querschnittspunkt. Zur Konkretisierung dieser Antwort ist also die Kenntnis der Lage der Spannungsnulllinie nötig. Sie ergibt sich definitionsgemäß aus

$$0 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad z = \frac{M_z \cdot I_y}{M_y \cdot I_z} \cdot y.$$

Mit $\frac{M_z}{M_y} = \tan \alpha$ erhält man $z = \tan \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z} \cdot y = \tan \beta \cdot y$

Dies ist die Gleichung der Spannungsnulllinie, welche also stets durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Der Richtungsfaktor der Gleichung ist $m = \tan \beta = \frac{\tan \alpha}{I_z} \cdot I_y$. Der Winkel β , den die Spannungsnulllinie mit der positiven y-Achse

bildet, ist also i.A. nicht mehr gleich dem Winkel α , den die Normale der Lastebene mit der y-Achse bildet: Die Spannungs- Nulllinie steht bei der zweiachsigen Biegung i.A. nicht senkrecht auf der Lastebene. Sonderfälle sind Querschnitte mit $I_y/I_z = 1 \rightarrow I_y = I_z$: Bei solchen Querschnitten steht die Spannungsnulllinie stets senkrecht auf der Lastebene. Zu diesen Querschnitten gehören Kreis ⁴⁵⁾ und Quadrat.

Nachdem wir nun die Lage der Spannungsnulllinie kennen, können wir auch den Punkt mit der größten Normalspannung im Querschnitt und damit diese selbst angeben. Wie oben schon gesagt, tritt die größte Normalspannung auf in dem am weitesten von der Spannungsnulllinie entfernten Querschnittspunkt, in unserem Fall eines Rechteckquerschnitts also (unabhängig von der Lage der Lastebene und den Querschnittsverhältnissen in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten. Bei Rechteckquerschnitten, allgemein bei Querschnitten mit Rechteckumhüllung kann deshalb die Formel

⁴⁵⁾ Da beim Kreis jede Schwerpunktachse eine Hauptachse ist, tritt das Problem „schiefe Biegung“ bei einem Stab mit Kreisquerschnitt oder Kreisringquerschnitt nicht auf.

$$|\max \sigma| = \left| \frac{M_y}{W_y} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right| \leq \text{zul } \sigma$$

tatsächlich als Bemessungsformel benutzt werden. Bei anderen Querschnitten allerdings kann so nicht vorgefahren werden. Hier müssen die Koordinaten des am weitesten von der Spannungsnulllinie entfernten Punktes P_w in die Gleichung

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_w - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_w \leq \text{zul } \sigma \quad .$$

eingesetzt und diese ausgewertet werden. Damit ist die Bemessungsfrage gelöst. Unabhängig davon, ob ein Rechteckquerschnitt oder ein anders geformter Querschnitt vorliegt, kann bei Doppelbiegung eine Bemessungsformel der Form $\text{erf } W = \dots$ natürlich nicht angegeben werden. Die Bemessung läuft hier stets darauf hinaus, dass man Querschnittsabmessungen schätzt und dann prüft, ob die größte vorhandene Spannung nicht größer als die zulässige Spannung ist.

Zu fragen wäre noch, wie der Verformungszustand aussieht. Abgesehen davon, dass die zu M_y und M_z gehörenden Krümmungen selbstverständlich unabhängig voneinander einzeln berechnet werden können, stellen wir allgemein fest: Da die Spannungsnulllinie, die bekanntlich senkrecht auf der Biegeebene steht, bei der zweiachsig-igen Biegung i.A. nicht senkrecht auf der Lastebene steht, fallen Biegeebene und Lastebene (Biegemomenten – Ebene) i.A. nicht zusammen. Anders ausgedrückt: Bildet die Lastebene mit einer Hauptebene des beanspruchten Stabes einen von Null verschiedenen Winkel α , dann bildet die zugehörige Biege – Ebene mit dieser Hauptebene i.A. einen von Null verschiedenen Winkel β ($\beta \neq \alpha$). Daher auch der Name „schiefe Biegung“.

Hierzu ein Zahlenbeispiel:

Die in Bild 76 dargestellte Holzpfeile habe eine Spannweite von $l = 4,00 \text{ m}$ und sei durch $q_v = 6 \text{ kN/m}$ beansprucht. Sie sei um $\alpha = 20^\circ$ gegen die Horizontale geneigt. Im Rahmen der Bemessung mit $\text{zul } \sigma = 1,0 \text{ kN/cm}^2$ sollen die Spannungen in den vier Querschnittsecken ermittelt und die Lage der Biegeebene angegeben werden (Bild 77).

Lösung:

1) Schnittgrößen:

$$\max M = 6 \cdot 4,00^2 / 8 = 12 \text{ kNm}$$

$$M_y = 12 \cdot \cos 20^\circ = 11,3 \text{ kNm} \qquad M_z = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,1 \text{ kNm}$$

2) Spannungsnachweis: Nach Schätzung wird ein Kantholz $\frac{18}{24}$ gewählt:

$$W_y = 1728 \text{ cm}^2;$$

$$I_y = 20736 \text{ cm}^4;$$

$$W_z = 1296 \text{ cm}^2;$$

$$I_z = 11664 \text{ cm}^4.$$

Die größte im untersuchten Querschnitt vorhandene Spannung beträgt

$$|\max \sigma| = \left| \frac{M_y}{W_y} \right| + \left| \frac{M_z}{W_z} \right| = \left| \frac{1130}{1728} \right| + \left| \frac{410}{1296} \right| = 0,654 + 0,316 = 0,970 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \text{zul } \sigma$$

In den vier Eckpunkten beträgt die Spannung

$$\sigma_a = + \frac{M_y}{W_{y0}} - \frac{M_z}{W_{z1}} = + \frac{1130}{-1728} - \frac{410}{1296} = -0,97 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_b = + \frac{M_y}{W_{y0}} - \frac{M_z}{W_{zr}} = + \frac{1130}{-1728} - \frac{410}{-1296} = -0,38 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_c = + \frac{M_y}{W_{yu}} - \frac{M_z}{W_r} = + \frac{1130}{1728} - \frac{410}{-1296} = +0,97 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_d = + \frac{M_y}{W_{yu}} - \frac{M_z}{W_{z1}} = + \frac{1130}{1728} - \frac{410}{1296} = +0,38 \text{ kN/cm}^2$$

Die Spannungsnulllinie hat die Gleichung

$$z = \tan \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z} \cdot y = 0,364 \cdot \frac{20736}{11664} \cdot y = 0,647 \cdot y.$$

Also ist

$$\tan \beta = 0,647 \rightarrow \beta = 32,9^\circ.$$

der Winkel zwischen Lastebene und Biegebene beträgt also

$$\gamma = 90^\circ - 20^\circ + 32,9^\circ = 102,9^\circ.$$

Wir erwähnen in diesem Zusammenhang, dass man sich bei der Berechnung der Normalspannungen nicht unbedingt auf Schwerpunkthauptachsen zu beziehen braucht: Man kann auch mit beliebigen orthogonalen Achsen arbeiten. Wir bezeichnen sie als \bar{y} - und \bar{z} -Achse und zeigen hier die Herleitung der entsprechenden Beziehung (Bild 78). Da die ebene Verteilung der Normalspannungen unabhängig ist von der Wahl des Bezugssystems, gilt

$$\sigma = m \cdot \bar{y} + n \cdot \bar{z} + \sigma_0.$$

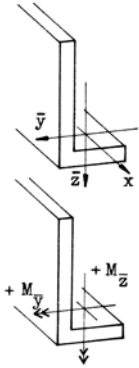


Bild 78 Rechnen mit beliebigen Schwerpunktsachsen

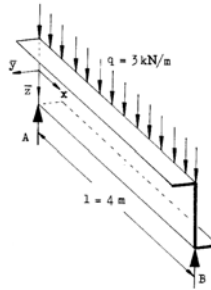


Bild 79 Zu Verwendung beliebiger Schwerpunktsachsen

Die Äquivalenzbedingungen lauten dann:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int_{(A)} \sigma \cdot dA = \int_{(A)} (m \cdot \bar{y} + n \cdot \bar{z} + \sigma_0) dA = N \\
 2) \quad & \int_{(A)} \sigma \cdot \bar{z} \cdot dA = \int_{(A)} (m \cdot \bar{y} + n \cdot \bar{z} + \sigma_0) \cdot \bar{z} \cdot dA = M_{\bar{y}} \\
 3) \quad & \int_{(A)} \sigma \cdot \bar{y} \cdot dA = \int_{(A)} (m \cdot \bar{y} + n \cdot \bar{z} + \sigma_0) \cdot \bar{y} \cdot dA = -M_{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

Sie stellen die Bestimmungsgleichungen für die drei Unbekannten m , n und σ_0 dar:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \int_{(A)} \bar{y} \cdot dA + n \cdot \int_{(A)} \bar{z} \cdot dA + \sigma_0 \cdot \int_{(A)} dA &= N \\
 m \cdot \int_{(A)} \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot dA + n \cdot \int_{(A)} \bar{z}^2 \cdot dA + \sigma_0 \cdot \int_{(A)} \bar{z} \cdot dA &= M_{\bar{y}} \\
 m \cdot \int_{(A)} \bar{y}^2 \cdot dA + n \cdot \int_{(A)} \bar{z} \cdot \bar{y} \cdot dA + \sigma_0 \cdot \int_{(A)} \bar{y} \cdot dA &= -M_{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun auf Schwerpunktsachsen mit den Bezeichnungen y und z beschränken, dann gilt

$$S_y = \int_{(A)} z \cdot dA = 0 \quad \text{und} \quad S_z = \int_{(A)} y \cdot dA = 0$$

Die noch verbleibenden Integrale sind Flächenmomente 2. Grades bzw. die Fläche. Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\sigma_0 \cdot A = N$$

$$m \cdot I_{yz} + n \cdot I_y = M_y$$

$$m \cdot I_z + n \cdot I_{y\bar{z}} = -M_z$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$m = \frac{M_y \cdot I_{yz}}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)} + \frac{M_z \cdot I_y}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)}$$

$$n = -\frac{M_y \cdot I_z}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)} - \frac{M_z \cdot I_{yz}}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)}$$

$$\sigma_0 = \frac{N}{A}$$

Verarbeitung dieser Ausdrücke in der Beziehung $\sigma = m \cdot y + n \cdot z + \sigma_0$ liefert die gesuchte Formel

$$\sigma(y,z) = \frac{(I_{yz} \cdot y - I_z \cdot z) \cdot M_y}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)} + \frac{(I_y \cdot y - I_{yz} \cdot z) \cdot M_z}{(I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z)} + \frac{N}{A}$$

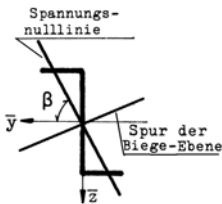


Bild 80 Spannungs-Nulllinie

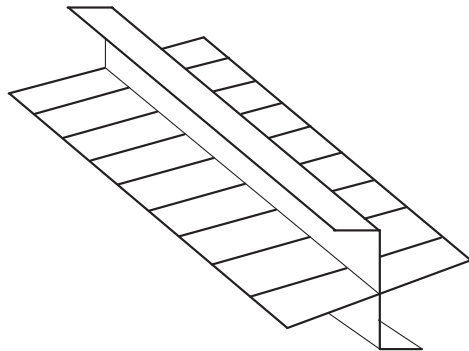


Bild 81 Lage der Biege-Ebene bei senkrechter Belastung

In dieser für beliebige Schwerpunktsachsen gültigen Formel ist natürlich der Sonderfall enthalten, dass die y - und z -Achse Schwerpunktsachsen sind. Dann nämlich gilt $I_{yz} = 0$, womit die o. a. Formel in die uns altbekannte Form

$$\sigma(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{N}{A} \quad \text{übergeht.}$$

Wir zeigen die Anwendung der oben abgeleiteten Formel an einem kleinen Beispiel, und zwar wollen wir den in Bild 79 dargestellten Stahlträger (S235) in Form eines Z-Profiles bemessen.

Lösung:

- 1) In Bezug auf das eingezeichnete Koordinatensystem ergibt sich unmittelbar

$$M_y = 6 \text{ kNm} = 600 \text{ kNcm} \quad M_z = 0.$$

- 2) Bemessung bzw. Spannungsnachweis. Aufgrund des Ergebnisses einer (hier nicht gezeigten) Überschlagsrechnung schätzen wir ein Z-200 als ausreichend. Einer Profil – Tafel entnehmen wir die Werte

$$I_y = 2300 \text{ cm}^4,$$

$$I_z = 357 \text{ cm}^4 \text{ und}$$

$$I_{yz} = 674 \text{ cm}^4.$$

Weil in der Profiltafel der obere Flansch nach rechts und der untere Flansch nach links zeigt, also genau anders herum als bei unserem Beispiel, muss das Vorzeichen von I_{yz} vertauscht werden. Wir müssen also mit $I_{yz} = -674 \text{ cm}^4$ rechnen!

Mit $I_{yz}^2 - I_y \cdot I_z = 674^2 - 2300 \cdot 357 = -366800 \text{ cm}^8$ ergibt sich

$$\sigma(y,z) = \frac{1}{-366800} \cdot (-674 \cdot y - 357 \cdot z) \cdot 6 \cdot 100 = +1,103 \cdot y + 0,584 \cdot z.$$

Die Spannungsnulllinie hat also die Gleichung $z = -1,888 \cdot y$, ist also um $\beta = 62,1^\circ$ gegen die y -Achse geneigt (Bild 80). Damit ist auch die Lage der Biegeebene bekannt (Bild 81); sie ist um $62,1^\circ$ gegen die Lastebene geneigt. Am weitesten von der Nulllinie entfernt sind die Punkte A $(-0,5; -10)$ und B $(+0,5; +10)$. Damit ergibt sich

$$\sigma_A = +1,103 \cdot (-0,5) + 0,584 \cdot (-10) = -6,39 \text{ kN / cm}^2 \quad \text{und}$$

$$\sigma_B = +1,103 \cdot 0,5 + 0,584 \cdot 10 = +6,39 \text{ kN / cm}^2.$$

Wir brauchen nicht zu erwähnen, dass sich die gleichen Spannungen und die gleiche Lage der Nulllinie (nicht der gleiche arithmetische Ausdruck) ergeben, wenn man sich bei der Berechnung auf Schwerpunktsachsen bezieht.

Zahlenbeispiel. Ein 8 m hoher, unten eingespannter Mast erhält an der Spitze die in der Abbildung angegebenen Belastungen. Für den dargestellten Querschnitt mit $I_y = 23350 \text{ cm}^4$ und $I_z = 11070 \text{ cm}^4$ sind die Eckspannungen zu ermitteln.

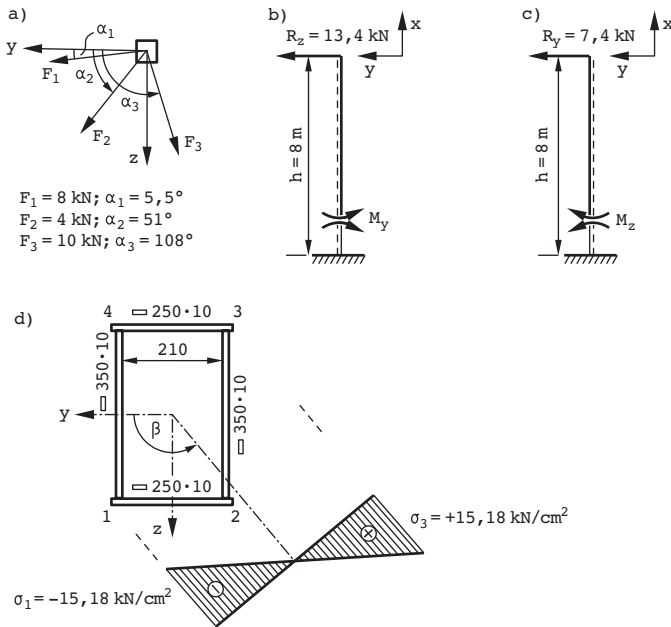


Bild 82

Komponenten der Resultierenden:

$$R_y = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i = 8 \cdot \cos 5,5^\circ + 4 \cdot \cos 51^\circ + 10 \cdot \cos 108^\circ = 7,4 \text{ kN}$$

$$R_z = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i = 8 \cdot \sin 5,5^\circ + 4 \cdot \sin 51^\circ + 10 \cdot \sin 108^\circ = 13,4 \text{ kN}$$

Biegemomente an der Einspannstelle:

$$z, x \text{-Ebene: } M_y = -R_z \cdot h = -13,4 \cdot 8,00 = -107,2 \text{ kNm}$$

$$y, x \text{-Ebene: } M_z = +R_y \cdot h = +7,4 \cdot 8,00 = +59,2 \text{ kNm}$$

Damit ergibt sich die Neigung der Spannungsnulllinie zu:

$$\tan \beta = \frac{59,2}{-107,2} \cdot \frac{23350}{11070} = -1,165 ; \quad \beta = 130,6^\circ$$

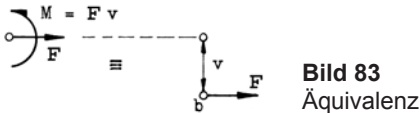
Unschwer ist zu erkennen, dass die größten Spannungen in den Eckpunkten 1 und 3 auftreten. Diese Eckspannungen sind

$$\sigma_1 = \frac{-107,2 \cdot 100}{23350} \cdot 18,5 - \frac{59,2 \cdot 100}{11070} \cdot 12,5 = -15,18 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = -\sigma_1 = +15,18 \text{ kN/cm}^2$$

2.7.2 Biegung mit Längskraft

Als nächstes wollen wir einen geraden Träger untersuchen, der an seinen Enden durch zwei gleichgroße und entgegengesetzt gerichtete Längskräfte beansprucht wird, die nicht in der Schwerlinie wirken. Dabei können zwei Fälle unterschieden werden:



- 1) Die Wirkungslinie der Längskräfte liegt in einer Hauptebene des Trägers
- 2) Diese Wirkungslinie liegt nicht in einer Hauptebene.

Bevor wir uns einem dieser Fälle zuwenden, rufen wir uns einen allgemein gültigen Sachverhalt aus der Statik (TM 1, Abschnitt 1.3.1.2) ins Gedächtnis zurück. Dort reduzierten wir ein Moment und eine Einzelkraft auf eine versetzt angreifende

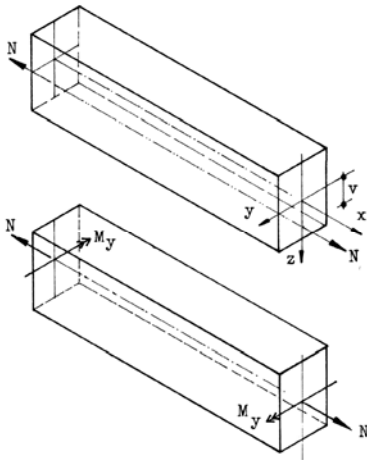


Bild 84 Zur einachsigen Ausmittigkeit

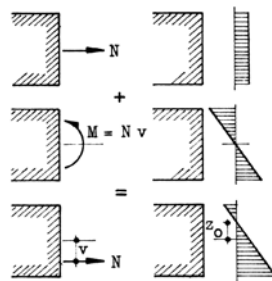


Bild 85 Lage der Sp.-Nulllinie

Einzelkraft. Natürlich ist dieser Vorgang reversibel (umkehrbar): Man kann also eine in Punkt b (Bild 83) angreifende Einzelkraft F um den Betrag v parallel zu ihrer Wirkungslinie verschieben, wenn man gleichzeitig das (Versetzungs-)Moment $M = F \cdot v$ hinzufügt.

Wir wenden uns nun dem oben unter 1) aufgeführten Fall zu und betrachten etwa das in Bild 84 dargestellte System. Indem wir wie soeben dargestellt die beiden Längskräfte parallel zu ihrer Wirkungslinie in die Stabachse verschieben und das entsprechende Versetzungsmoment $M = F \cdot v$ hinzufügen, führen wir diesen Lastfall auf zwei bekannte Lastfälle zurück; nämlich auf die in Abschnitt 2.3.1 und 2.3.2 behandelten Fälle. Dementsprechend wirken in allen Stabquerschnitten die Schnittgrößen $N = F$ und $M_y = N \cdot v$. Für die zugehörige Spannungsverteilung gilt also

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot v}{I_y} \cdot z = \\ &= \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot z}{I_y/A} \right] = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot z}{i_y^2} \right]\end{aligned}$$

Wir haben dabei für den Quotienten I_y/A (dessen Dimension Länge² ist) das Symbol i_y^2 eingeführt. Die entsprechende Größe $i_y = \sqrt{I_y/A}$ nennt man Trägheitsradius. Um den hier untersuchten Träger bemessen zu können, braucht man die größte im Querschnitt wirkende Spannung. Sie tritt auf (wie immer) in dem am weitesten von der Spannungsnulllinie entfernten Punkt. Deshalb die Frage: Wo liegt die Spannungsnulllinie? Die Bestimmungsgleichung

$$0 = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot z_0}{i_y^2} \right] \text{ liefert unmittelbar, da } N \neq 0, \text{ die Beziehung}$$

$$z_0 = -i_y^2/v.$$

Wir sehen, dass die Spannungsnulllinie senkrecht auf der Lastebene steht (also Biegeebene = Lastebene) und dass ihre Lage nicht von der Größe von N sondern nur von der Größe von v abhängt. Ihr Abstand z_0 von der y -Achse ist dem Wert v umgekehrt proportional. Das Vorzeichen von z_0 ist von demjenigen von v grundsätzlich verschieden, da i_y^2 stets positiv ist: Spannungsnulllinie und Lastangriffspunkt liegen, also nie auf derselben Querschnittsseite, vom Schwerpunkt bzw. hier von der y -Achse aus gesehen (Bild 85). Bei einem zur y -Achse symmetrischen Querschnitt bedeutet das, dass der höchstbeanspruchte Querschnittspunkt auf derjenigen Seite liegt, auf der auch die Längskraft wirkt. Bei einem zur y -Achse unsymmetrischen Querschnitt kann man das nicht allgemein sagen. Hier muss entweder tatsächlich die Lage der Spannungsnulllinie zahlenmäßig ausgerechnet werden, oder

man rechnet beide Randspannungen aus und findet so die für die Bemessung maßgebende. Diese beiden Randspannungen ergeben sich mit den entsprechenden Randabständen e_o und e_u in der Form

$$\sigma_{xo} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot e_o = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_{yo}} = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{A}{W_{yo}} \cdot v \right]$$

$$\sigma_{xu} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot e_u = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_{yu}} = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{A}{W_{yu}} \cdot v \right]$$

Die obigen Randabstände müssen mit ihren Vorzeichen eingesetzt werden! Damit ist die Frage der Bemessung geklärt. Eine „direkte Bemessung“ in der Form $\text{erf } W_y = \dots$ oder $\text{erf } A = \dots$ gibt es hier ebenso wie bei der Doppelbiegung nicht. Man wählt einen passend erscheinenden Querschnitt und weist für ihn nach, dass die zulässigen Spannungen nirgends überschritten werden („Spannungsnachweis“).

Dazu ein kleines Zahlenbeispiel.

Ein Stab (S235) in Form eines U 200 werde wie in Bild 86 angedeutet durch eine Längskraft F_x beansprucht. Wo liegt die Spannungsnulllinie und wie groß darf die Längskraft höchstens sein für $\text{zul } \sigma = 16 \text{ kN/cm}^2$?

Lösung:

$\text{vorh } A = 32,2 \text{ cm}^2$, $\text{vorh } I_z = 148 \text{ cm}^4$, $\text{vorh } i_z = 2,14 \text{ cm}$ mit $e_z = 2,01 \text{ cm}$ ergibt sich

$$W_{zl} = \frac{I_z}{e_z} = \frac{148}{2,01} = +73,6 \text{ cm}^3; \quad W_{zr} = \frac{I_z}{-(b - e_z)} = \frac{148}{-7,5 + 2,01} = -27,0 \text{ cm}^3$$

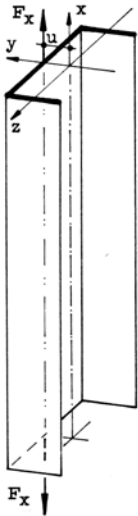
Die Ausmitte der Längskraft beträgt $u = e_z - \frac{s}{2} = 1,585 \text{ cm}$. Damit ergibt sich für die Lage der Spannungsnulllinie der Wert

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{u} = \frac{-2,14^2}{1,585} = -2,89 \text{ cm}.$$

Er ist, wie wir wissen, unabhängig von der Größe der Längskraft. Die größte Spannung, tritt wie erwartet, am linken Querschnittsrand auf. Das liefert die Bestimmungsgleichung für $\text{zul } N$:

$$\text{zul } \sigma = \frac{\text{zul } N}{A} \cdot \left(1 + \frac{A \cdot u}{W_{zl}} \right) \quad \text{in unserem Fall}$$

$$16,0 = \frac{\text{zul } N}{32,2} \cdot \left(1 + \frac{32,2 \cdot 1,585}{73,6} \right) = \frac{\text{zul } N}{32,2} \cdot 1,69.$$



Daraus ergibt sich $\text{zul } N = \frac{16,0 \cdot 32,2}{1,69} = 305 \text{ kN}.$

Man sieht übrigens, dass die Zahl 1,69 – also der Wert des Klammerausdrucks – angibt, um wie viel die Tragkraft des Profils durch Ausmittigkeit abnimmt (gegenüber einer mittigen Belastung). Der Quotient A/W stellt als Faktor von u sozusagen die Empfindlichkeit des Querschnitts gegenüber Ausmittigkeit dar. Uns interessiert nun aber noch folgendes. Wir wollen sehen, wie sich die Spannungsverteilung, die (für einen bestimmten Querschnitt) eine Funktion von N und v ist, ändert, wenn wir

- 1) v konstant halten und N ändern,
- 2) N konstant halten und v ändern.

Eine Änderung von N (bei konstantem v) bedeutet, da die Lage der Spannungsnulllinie von N unabhängig ist, eine Drehung der Spannungsebene um die Spannungsnulllinie. Eine Änderung von v (bei konstantem N) bedeutet, da die Spannung im Schwerpunkt

Bild 86

(bzw. in den Fasern entlang der y -Achse) $\sigma_x(0) = \frac{N}{A}$ unabhängig

von v ist, eine Drehung der Spannungsebene um diese „Schwerpunktsspannung“. Dabei werden i.A. drei Zustände durchlaufen:

- a) die beiden Randspannungen haben verschiedene Vorzeichen
- b) eine der beiden Randspannungen hat den Wert Null
- c) die beiden Randspannungen haben gleiches Vorzeichen.

Bei welchem Wert von v geht Zustand a) in Zustand c) über, wann also tritt Zustand b) ein? Nun, es gibt freilich zwei Werte von v , bei denen dieses eintritt: Einen, bei dem die Spannungen am oberen Rand verschwinden und einen, bei dem die Spannungen am unteren Rand verschwinden. Wir wollen sie zunächst v_o und v_u nennen und bestimmen sie aus den Gleichungen

$$\sigma_{x_o} = 0 = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{A}{W_{y_o}} \cdot v_o \right] \rightarrow v_o = -\frac{W_{y_o}}{A}$$

$$\sigma_{x_u} = 0 = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{A}{W_{y_u}} \cdot v_u \right] \rightarrow v_u = -\frac{W_{y_u}}{A}$$

Durch diese Punkte werden auf der z -Achse drei Abschnitte gebildet:

- 1) der Abschnitt unterhalb von v_o
- 2) der Abschnitt zwischen v_u und v_o
- 3) der Abschnitt oberhalb von v_u .

Solange die Längskraft unterhalb von v_o wirkt, treten im Querschnitt Spannungen zweierlei Vorzeichens auf. Wirkt die Längskraft im Bereich zwischen den Punkten v_o und v_u , so treten im Querschnitt nur Spannungen eines Vorzeichens auf. Wandert

die Längskraft schließlich in den Bereich oberhalb von v_u , so treten im Querschnitt wieder Spannungen zweierlei Vorzeichens auf. Bei Bauteilen, die z.B. nur Druckspannungen aufnehmen können, wie etwa unbewehrte Betonteile oder Mauerwerk, ist der zwischen v_o und v_u liegende Bereich besonders aktuell. Er wird deshalb als Kernbereich bezeichnet. Man nennt die zu v_o und v_u gehörenden Achsabschnitte entsprechend Kernweiten⁴⁶⁾ und bezeichnet sie mit k_{zo} und k_{zu} .⁴⁷⁾

$$k_{zo} = -\frac{W_{yo}}{A}, \quad k_{zu} = -\frac{W_{yu}}{A}.$$

Die entsprechenden Punkte heißen Kernpunkte. Wir haben unsere Untersuchung durchgeführt für den Fall, dass der Angriffspunkt von N auf der z -Achse liegt. Natürlich gilt entsprechendes, wenn er auf der y -Achse liegt. Mit den Widerstandsmomenten W_{zl} und W_{zr} ergibt sich dann⁴⁸⁾

$$k_{yl} = -\frac{W_{zl}}{A}, \quad k_{yr} = -\frac{W_{zr}}{A}.$$

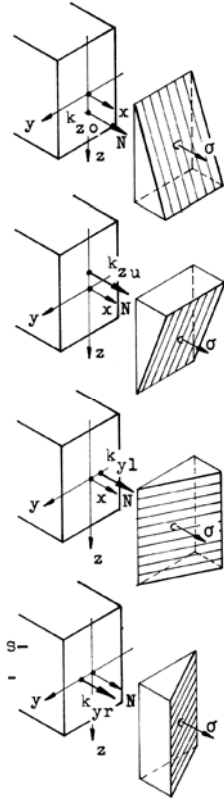
In beiden Fällen haben wir es mit einachsiger Ausmittigkeit zu tun (Bild 87). Als Beispiel berechnen wir die vier Kernpunkte des zuvor untersuchten U 200 (Bild 88).

Mit

$$\begin{aligned} W_{zl} &= 73,6 \text{ cm}^3, & W_{zr} &= -27,0 \text{ cm}^3 \\ W_{yu} &= +191,0 \text{ cm}^3, & W_{yo} &= -191,0 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

ergibt sich

Bild 87
Kernweiten



⁴⁶⁾ Wie man sieht, sagen sie über die hier betonte Bedeutung hinaus allgemein etwas aus über den Wirkungsgrad eines Querschnitts.

⁴⁷⁾ Ein Wort zur Systematik der Bezeichnungsweise: Ein tiefgestelltes z bedeutet i.A. „in Bezug auf die z -Achse“. Dementsprechend wird k_z (ebenso wie etwa i_z) auf der z -Achse abgetragen.

⁴⁸⁾ Das in allen 4 Formeln auftretende negative Vorzeichen ist mathematisch das Zeichen dafür, dass der zu einem Querschnittsrand gehörende Kernpunkt stets auf der diesem Rand gegenüber liegenden Seite liegt.

$$k_{yI} = -\frac{73,6}{32,2} = -2,29 \text{ cm}$$

$$k_{yR} = -\frac{-27,0}{32,2} = +0,84 \text{ cm}$$

$$k_{zu} = -\frac{+191}{32,2} = -5,93 \text{ cm}$$

$$k_{zo} = -\frac{-191}{32,2} = +5,93 \text{ cm}$$

Wir wenden uns nun der oben unter 2) aufgeführten zweiachsigen Ausmittigkeit zu, also der Beanspruchung durch eine Längskraft, die nicht mehr auf einer der beiden Schwerpunkthauptachsen liegt (Bild 89). Wenn wir die Koordinaten des Lastangriffspunktes mit u und v bezeichnen, ergibt sich die äquivalente Lastgruppe unmittelbar zu

$$N, M_y = N \cdot v \quad \text{und} \quad M_z = -N \cdot u.$$

Durch Überlagerung der zu diesen drei Schnittgrößen gehörenden Spannungsverteilungen erhalten wir

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot z}{i_y^2} + \frac{u \cdot y}{i_z^2} \right]$$

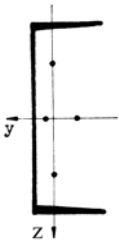


Bild 88

Diese Gleichung beschreibt (für einen gegebenen Querschnitt) die Spannungsebene im σ -y-z-Raum. Wie vorher erhalten wir die Gleichung der Spannungsnulllinie in der Form

$$0 = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot z}{i_y^2} + \frac{u \cdot y}{i_z^2} \right] \quad \text{oder, da } N \neq 0, \quad z = -\frac{i_y^2 \cdot u}{i_z^2 \cdot v} \cdot y - \frac{i_y^2}{v}.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, $z = m \cdot y + b$. Sie geht nicht durch den Schwerpunkt ($i_y^2/v = 0$ ist nur für $v = \infty$ möglich) und steht nur für $i_y = i_z$ senkrecht auf der Lastebene (als Lastebene bezeichnen wir die durch Stabachse und

Wirkungslinie der Längskraft gebildete Ebene). Sie schneidet die z-Achse im Punkt $z_0 = -i_y^2/v$ und die y-Achse im Punkt $y_0 = -i_z^2/u$. Nachdem wir die Lage der Spannungsnulllinie kennen, kann auch der am weitesten von ihr entfernt liegende Querschnittspunkt und damit die (betragsmäßig) größte im Querschnitt auftretende Normalspannung bestimmt werden. Wie schon in Abschnitt 2.7.1 erwähnt, liefert die Gleichung

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}$$

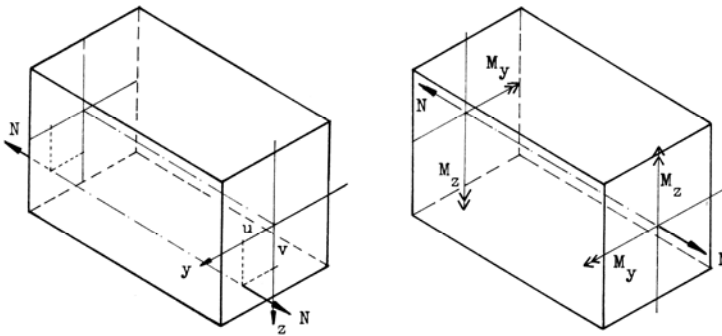


Bild 89 Zweiachsig e Ausmittigkeit

nur für Querschnitte mit Rechteckumhüllung brauchbare Werte. Eine Formel wie erf $W_y = \dots$, erf $W_z = \dots$ oder erf $A = \dots$ gibt es auch hier nicht; wie zuvor geschildert, muss auch hier ein ausreichend erscheinender Querschnitt gewählt und dann der Spannungsnachweis geführt werden. Als letztes interessiert auch hier wieder die Frage, in welchem Querschnittsteil die Last angreifen darf, wenn nur Spannungen eines Vorzeichens auftreten sollen, oder genauer: Wo die Last angreifen muss, damit die Spannungsnulllinie den Querschnitt gerade tangiert. Wir beantworten diese Frage für den Rechteckquerschnitt und verallgemeinern dann. Wenn die Spannungsnulllinie den Querschnitt in der oberen rechten Ecke berührt, gilt

$$0 = \frac{N}{A} \cdot \left[1 + \frac{v \cdot (-h/2)}{i_y^2} + \frac{u \cdot (-b/2)}{i_z^2} \right]$$

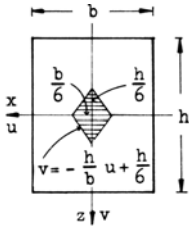


Bild 90
Kern

oder, wenn man $i_y^2 = I_y/A = h^2/12$ und entsprechend $i_z^2 = b^2/12$ einführt und nach v auflöst

$$v = -\frac{h}{b} \cdot u + \frac{h}{6}.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden in der u - v -Ebene (Bild 90). Auf dieser Geraden liegen im ersten Quadranten alle Angriffspunkte von N , für die die Spannungsnulllinie durch den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt geht.

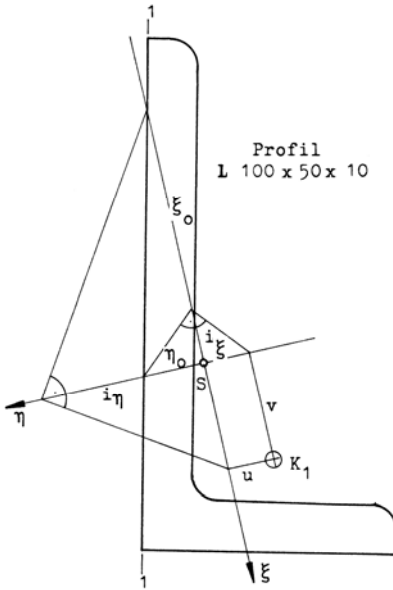
Während die Längskraft im ersten Quadranten auf dieser Geraden wandert, dreht sich die Nulllinie um den Eckpunkt im dritten Quadranten. Die Gerade schneidet die z -Achse ($u = 0$) im Kernpunkt $k_z = +h/6$. Greift die Last in diesen Punkten an (einachsige Ausmittigkeit), so deckt sich die Nulllinie mit dem oberen bzw. rechten Rand.

Für die übrigen drei Eckpunkte finden wir entsprechende Geraden in den anderen Quadranten. Zusammen trennen sie die Kernfläche der Querschnitts, den Kern, von der übrigen Querschnittsebene. Solange die Längskraft innerhalb des Kerns angreift, treten im Querschnitt nur Spannungen eines Vorzeichens auf. Wirkt sie auf der Begrenzungslinie des Kerns, so tangiert die Spannungsnulllinie den Querschnitt an irgendeiner Stelle.⁴⁹⁾ Allgemein besteht zwischen der Querschnittsberandung und der Kernberandung folgender Zusammenhang:

Zu jeder Tangente an den Querschnitt, die diesen in mindestens zwei Punkten berührt, gehört ein Knickpunkt in der Kernberandung. Zu jedem Eckpunkt des Querschnitts gehört ein geradliniger Abschnitt in der Kernberandung.

Dieser Zusammenhang lässt sich nun vorteilhaft ausnützen bei der Berechnung von Kernen für andere Querschnitte. Man wählt dabei für jede Tangente an den Querschnitt zwei hervorragende Punkte, wobei jeder Punkt mit seinem Wertepaar (y, z) – bezogen auf Schwerpunktsachsen – eine Bestimmungsgleichung für die beiden Unbekannten u und v liefert, die dann den zugehörigen Kernpunkt liefern.

⁴⁹⁾ An welcher Stelle das geschieht, lässt sich durch Einsetzen der entsprechenden Werte für u und v berechnen.

**Bild 91**

Zeichnerische Ermittlung des zur Tangente 1-1 gehörenden Kernpunktes K_1

Für unsymmetrische Querschnitte wird die Bestimmung der Wertepaare (y, z) mühsam. In solchen Fällen empfiehlt sich die Anwendung des zeichnerischen Verfahrens, das hier deshalb wiedergegeben wird (Bild 91). Dieses zeichnerische Verfahren geht davon aus, dass als ausgezeichnete Punkte der Tangente (= Spannungsnulllinie) deren Schnittpunkte mit den beiden Schwerpunkthauptachsen gewählt werden.⁵⁰⁾ Dann ergibt sich nämlich $z_0 \cdot v = -i_y^2$ und $y_0 \cdot u = -i_z^2$. Diese beiden Beziehungen erinnern an den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck: Das Produkt der Hypotenusenabschnitte ist gleich, dem Quadrat der Höhe. In unserem Fall ist jeweils ein Hypotenusenabschnitt und die Höhe bekannt; unmittelbar gefunden wird daher der zweite Hypotenusenabschnitt. Dieses Verfahren ist – umgekehrt – auch gut zu verwenden zur zeichnerischen Bestimmung der Spannungsnulllinie für einen gegebenen Lastangriffspunkt.

⁵⁰⁾ Auch bei der rechnerischen Behandlung des Problems empfiehlt es sich, als ausgezeichnete Punkte auf der Tangente deren Schnittpunkte mit den Hauptachsen zu wählen, obwohl die dazu gehörenden Koordinaten häufig mühsamer zu bestimmen sind als diejenigen zweier anderer Punkte (etwa zweier Eckpunkte des Querschnitts). Für diese Schnittpunkte nämlich entkoppeln sich – wie man oben gesehen hat – die Bestimmungsgleichungen: Es sind nicht mehr zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen sondern zweimal eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Bisher haben wir den Kern kennengelernt in seiner primären Bedeutung: Der Kern ist derjenige Teil der Querschnittsebene (nicht der Querschnittsfläche: er kann nämlich über die Berandung des Querschnitts hinausragen), in dem der Angriffspunkt einer mittig oder außermittig angreifenden Normalkraft liegt, wenn nur Spannungen eines Vorzeichens im Querschnitt auftreten.

Nun wollen wir abschließend den Kern besprechen in seiner Eigenschaft als leistungsfähiges Hilfsmittel bei der Berechnung von Randspannungen, wenn als Schnittgröße eine ausmittig angreifende Normalkraft wirkt. Wir setzen bei der folgenden Betrachtung einachsige Ausmittigkeit voraus; das Verfahren lässt sich jedoch, ohne Schwierigkeit auf zweiachsige Ausmittigkeit ausdehnen. Betrachtet wird ein dreieckförmiger Querschnitt, auf dessen z-Achse die Normalkraft N im Abstand v vom Schwerpunkt wirkt (Bild 92). Die Randspannungen ergeben sich, dann zu

$$\sigma_u = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot v}{W_{yu}} \quad \text{und} \quad \sigma_o = \frac{N}{A} - \frac{N \cdot v}{W_{yo}}$$

wenn W_{yu} und W_{yo} die Absolutbeträge der entsprechenden Widerstandsmomente sind. Diese Widerstandsmomente hängen – wie wir wissen – mit den Kernweiten zusammen, und zwar (nach A aufgelöst) in der Form

$$A = \frac{W_{yo}}{k_{zo}} = \frac{W_{yu}}{k_{zu}} \left[\begin{array}{l} \text{Entweder setzen wir in diese} \\ \text{Formel } W \text{ und } k \text{ mit ihren} \\ \text{Vorzeichen ein oder nur} \\ \text{deren Beträge.} \end{array} \right]$$

Diese Beziehung setzen wir in die o.a. Formeln ein und erhalten

$$\sigma_u = \frac{N \cdot (k_{zu} + v)}{W_{yu}} \quad \text{und} \quad \sigma_o = \frac{N \cdot (k_{zo} - v)}{W_{yo}}$$

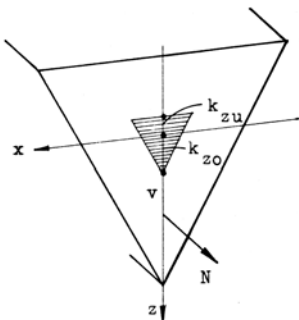


Bild 92
Kernpunktsmomente

Nun ist $k_{zu} + v$ der Abstand des Lastangriffspunktes vom Kernpunkt K_{zu} und der Abstand $k_{zo} - v = -(v - k_{zo})$ dessen Abstand vom Kernpunkt K_{zo} . Wir können daher sagen $M_{ku} = N \cdot (k_{zu} + v)$ und $M_{ko} = N \cdot (k_{zo} - v) = -N \cdot (v - k_{zo})$. Diese auf die Kernpunkte K_{zu} und K_{zo} bezogenen Momente nennt man Kernpunktsmomente. Mit ihnen ergeben sich die Randspannungen in der Form

$$\sigma_u = \frac{M_{ku}}{W_{zu}} \quad \text{und} \quad \sigma_o = \frac{M_{ko}}{W_{zo}} .$$

Man darf bei Anwendung dieser Formel nicht vergessen, dass zum unteren Querschnittsrand der obere Kernpunkt gehört und umgekehrt. Setzt man N und v mit ihrem Vorzeichen ein und nimmt für W und k nur deren Beträge, dann ergeben sich die Randspannungen vorzeichenrichtig. Diese Art der Spannungsermittlung erlaubt, in Bauteilen, in denen N und M gleichzeitig wirken, ihre Maximalwerte jedoch an verschiedenen Stellen erreichen, den maximal beanspruchten Querschnitt sofort zu finden: Der Querschnitt mit dem größten Kernpunktsmoment ist maximal beansprucht.

Hierzu ein kleines Beispiel:

Bei dem in Bild 93 dargestellten Stahlträger soll der meist beanspruchte Querschnitt ermittelt werden.

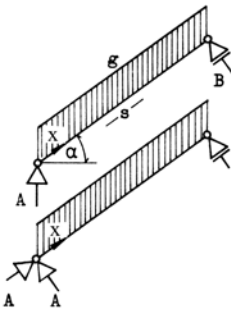


Bild 93

Zur Ermittlung des meistbeanspruchten Querschnitts

Lösung:

Streckenlasten:

$$g_{\perp} = g \cdot \cos \alpha \quad g_{\parallel} = g \cdot \sin \alpha$$

Auflagerkräfte:

$$A_{\perp} = B_{\perp} = \frac{s \cdot g \cdot \cos \alpha}{2} \quad A_{\parallel} = s \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Schnittgrößen:

$$M_y(x) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (s \cdot x - x^2)$$

$$N(x) = -g \cdot \sin \alpha \cdot (s - x)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der ausmittigen Längskraft:

$$v(x) = \frac{M_y(x)}{N(x)} = \frac{0,5 \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (s \cdot x - x^2)}{-g \cdot \sin \alpha \cdot (s - x)} = -\frac{1}{2} \cdot \cot \alpha \cdot x$$

und für das Kernpunktsmoment:

$$M_{ko}(x) = -N \cdot (v(x) - k_{zo}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (s \cdot x - x^2) - g \cdot \sin \alpha \cdot (s - x) \cdot k_{zo}$$

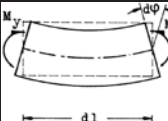
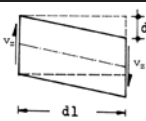
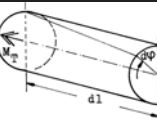
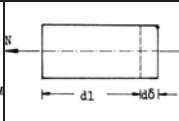
$$\frac{dM_{ko}}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (s - 2 \cdot x) + g \cdot \sin \alpha \cdot k_{zo}; \quad \frac{dM_{ko}}{dx} = 0 \quad \text{liefert}$$

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (s - 2 \cdot x_0) = g \cdot \sin \alpha \cdot k_{zo} \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{s}{2} - k_{zo} \cdot \tan \alpha.$$

Für $\alpha = 45^\circ$ etwa rutscht der meist beanspruchte Querschnitt also um k_{zo} aus der Feldmitte heraus. Für in der Praxis vorkommende Fälle (Dachsparren) kann der Spannungsnachweis also in Feldmitte geführt werden, ohne dass dabei ein großer Fehler gemacht wird. Allerdings sollte für sehr steile Dachsparren, also für große Winkel α , der Nachweis an der oben ermittelten Stelle x_0 geführt werden!

Das Bemessen mit so ermittelten Kernpunktsmomenten ist (ohne Modifikation) allerdings nur möglich, solange die zulässigen Spannungen des jeweiligen Baustoffes für Biegung und Zug/Druck gleich groß sind. Bei Holz z.B. ist dieses nicht der Fall.

Tafel 6: Beziehungen zwischen Schnittgrößen, Spannungen und Verformungen

Beanspruchung	Querkraftbiegung ⁵¹⁾		Saint-Venantsche Torsion	Zug und Druck
Schnittgröße Symbol Name	M_y Biegemoment	V_z Querkraft	M_T Torsionsmoment	N Normalkraft
Spannungen im Stabquerschnitt	$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$	$\tau = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$ Die Richtung der Spannungen in der Querschnittsebene hängt ab von der Querschnittsform	$\tau = \frac{M_T}{I_t} \cdot r$	$\sigma = \frac{N}{A}$
Verformung eines Stabelementes Symbol Name	$\chi_{xz} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$ Krümmung	$\gamma_{xz} = \frac{V_z}{G \cdot A} \cdot \chi_V$ Gleitung	$\vartheta = \frac{M_T}{G \cdot I_t}$ Verdrehung	$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}$ Dehnung
Gegenseitige Lageänderung der Endquerschnitte eines Stabelementes	 $d\varphi = \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot dl$	 $dw_s = \frac{V_z \cdot dl}{G \cdot A} \cdot \chi_V$	 $d\varphi = \frac{M_T}{G \cdot I_t} \cdot dl$	 $d\delta = \frac{N}{E \cdot A} \cdot dl$
Angaben über die gegenseitige Lage von Schnittgröße, Querschnitt und Bezugssystem	y-Achse = Schwerpunkthauptachse	1. -Achse = Schwerpunkthauptachse 2. V_z ist auf den Schubmittelpunkt gerichtet	Koordinaten – Ursprung liegt im Schwerpunkt	Die Normalkraft wirkt entlang der Schwerlinie

Zusammenfassung von Kapitel 2

In diesem Kapitel haben wir die im Band 1 eingeführten Schnittgrößen ersetzt durch flächenmäßig verteilte Querschnittsbelastungen, die Spannungen. Bei der Angabe der entsprechenden arithmetischen Ausdrücke haben wir uns bezogen auf ein orthogonales Koordinatensystem, das schon bei der Ermittlung der Schnittgrößen benutzt wurde. Wir haben auch ermittelt, wie sich ein Stabelement bei Beanspruchung durch die verschiedenen Schnittgrößen verformt. Die angegebenen Werte können in allen Fällen über die Stablänge aufaddiert – integriert werden. Bei allen Beanspruchungen außer Biegung führt das auf die wesentlichen Verformungen. Bei der Biegung muss die wesentliche Verformung, die Durchbiegung, in einer eigenen kleinen Untersuchung erst noch ermittelt werden. In einer Übersicht (Tafel 6) sind wesentliche Ergebnisse unserer Untersuchung zusammengestellt. Es zeigt sich, dass bei Anwendung der ermittelten Formeln die Berechnung von Querschnittsspannungen und

⁵¹⁾ Die Formeln sind angegeben für eine auf die Schubmittelpunktlinie gerichtete Querbelastrung parallel zur x-z-Ebene. Entsprechende Formeln gelten für eine Querbelastrung parallel zur x-y-Ebene.

Stabelementverformungen i. A. reduziert wird auf die Bestimmung von Querschnittswerten. Eine Ausnahme bildet die Berechnung von Spannungen und Verformungen eines tordierten Trägers mit mehrzelligem Hohlquerschnitt: Dabei muss stets ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Überhaupt muss im Hinblick auf das Torsionsproblem gesagt werden, dass dessen Behandlung im Rahmen dieses Kapitels unvollständig ist. Es wurde nur die Saint-Venantsche Torsion untersucht, während in der Praxis in den meisten Fällen Wölbkraft – Torsion auftritt.

Wir haben gesehen, dass in einem Zugstab ein reiner Normalspannungszustand herrscht und in einer tordierten Welle ein reiner Schubspannungszustand. Das bedeutet jedoch nicht, dass in keiner Schnittfläche eines Zugstabes Schubspannungen auftreten; auch nicht, dass in keiner Schnittfläche einer tordierten Welle Normalspannungen auftreten. Es ist vielmehr so, dass wir nur über Spannungen in Querschnitten bisher eine Aussage gemacht haben. Welche Spannungen in anderen Schnittebenen wirken, muss noch untersucht werden.

In den beiden letzten Abschnitten haben wir untersucht, was passiert, wenn Schnittgröße und Querschnittsfläche nicht so zueinander liegen, wie in den Abschnitten 2.3 bis 2.5 vorausgesetzt. Was passiert z. B., wenn eine Längskraft nicht im Schwerpunkt der Querschnittsfläche wirkt? Oder wenn die Biegemomentenebene nicht mit einer Hauptebene des Stabelementes zusammenfällt? Im letzten Fall gibt es, so haben wir gesehen, zwei Möglichkeiten für die rechnerische Untersuchung: Entweder man bezieht sich nach wie vor auf die Hauptachsen und zerlegt das Biegemoment entsprechend, oder man arbeitet mit beliebigen Bezugsachsen und verwendet die etwas komplizierter gebauten Formeln. Schließlich haben wir, besonders in Abschnitt 2.6 gesehen, dass nicht bei allen Spannungen die errechneten Werte an der entsprechenden Stelle eines Bauteils wirklich auftreten. Bei manchen Spannungen handelt es sich um Rechengrößen, die mit dem physikalischen Sachverhalt im Bauteil nur wenig zu tun haben.

Abschließend noch ein Wort zur Bezeichnungsweise. Den Anfänger wird gewiss irritieren, dass durchweg einerseits von Normalspannungen und andererseits von Schubspannungen gesprochen wird. Tatsächlich sollte für die Schnittflächenbelastung konsequent entweder auf die Art der Spannung (Richtung relativ zur Schnittfläche) oder auf deren Ursache hingewiesen werden. Dementsprechend wäre sinnvoll, entweder von Normalspannungen und Tangentialspannungen zu sprechen oder von Normalkraftspannungen, Biegespannungen, Schubspannungen, Scherspannungen und Torsionsspannungen. Nun, solche kleinen Inkonssequenzen müssen in Kauf genommen werden bei allen Wissenschaften, die ihre Impulse aus dem praktischen Schaffen empfangen und in engem Kontakt zur Praxis organisch wachsen. Bei allen Untersuchungen dieses Kapitels haben wir eine lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen und homogene Bauteile mit gerader Stabachse vorausgesetzt.

Festigkeitslehre

Technische Mechanik für Bauingenieure 2

Wetzell, O.; Krings, W.

2015, VIII, 213 S. 172 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-11467-1