

Inhaltsverzeichnis

2.1	Algebra in der Schule	15
2.2	LGS in der Schule – ein Überblick	20
2.3	LGS in der Sekundarstufe I	24
2.4	LGS in der Sekundarstufe II	38
2.5	Verallgemeinerung des Gauß-Algorithmus und Struktur der Lösungsmenge	51
2.6	Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Computer	57
2.7	Beispiele aus dem Unterricht	69

Das Lösen von Gleichungen ist von alters her eine wichtige Aufgabe der Mathematik. Viele inner- und außermathematische Aufgaben führen auf Gleichungen und die Bestimmung der Lösungsmengen dieser Gleichungen. Ein Beispiel ist die Frage nach dem Effektivzins bei einem Kredit, die zu einer algebraischen Gleichung führt, für die i. Allg. nur numerische Lösungen angegeben werden können. Andere Beispiele sind Differentialgleichungen, wie die Newton'sche Gleichung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“, oder partielle Differentialgleichungen wie die Wärmeleitungsgleichung, die die Ausbreitung thermischer Veränderungen eines Körpers durch *Wärmeleitung* oder die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch *Diffusion* beschreibt.

Der berühmte, aus dem 16. Jahrhundert v. Chr. stammende Papyrus Rhind der alten Ägypter war ein Lehrbuch, in dem einfache lineare Gleichungen, nach wachsender Schwierigkeit geordnet, behandelt wurden. In den frühen Hochkulturen wurden auch quadratische und kubische Probleme und ebenfalls schon Gleichungssysteme behandelt. Aus dem China des 13. Jahrhunderts stammen die „Neun Bücher arithmetischer Technik“ (Alten et al., 2003, S. 118f.); im achten Buch werden lineare Gleichungssysteme (LGS) mit einem Lösungsalgorithmus behandelt, der ein Vorgänger des Gauß-Algorithmus ist.

In der Grundschule lernen die Schüler einfache lineare Gleichungen kennen. Von den linearen Gleichungen gelangt man zu quadratischen Gleichungen in der S I und zu li-

nearen Gleichungssystemen in der S I und S II. Es kommt sehr selten vor, dass es für einen Gleichungstyp eine Lösungsformel gibt, die zu den exakten Lösungen der Gleichung führt. Eines dieser seltenen Beispiele sind die quadratischen Gleichungen, deren Lösungsformel in manchen Bundesländern „Mitternachtsformel“¹ genannt wird. Diese Formel kann man „händisch“² ausführen, was zu einer maßlosen Überschätzung dieser Formel in der Schule geführt hat. Eine weitere Gleichungsart, für die es *stets* einen exakten Lösungsalgorithmus gibt, sind die in diesem Kapitel im Mittelpunkt stehenden linearen Gleichungssysteme (LGS). Sehr viele Probleme der Anwendungswissenschaften, von der Computertomographie in der Medizin bis zu vielfältigen Problemen in den Wirtschaftswissenschaften, lassen sich mithilfe von LGS modellieren; dies macht die Bedeutung der LGS aus. Allerdings führt die theoretische Existenz einer Lösungsformel, die durch den Gauß’schen Algorithmus gesichert ist, nur für „kleine“ LGS zur exakten Lösung; bei den in der Praxis auftretenden Systemen mit einer „großen“ Zahl von Gleichungen lässt sich die Lösungsformel nicht durchführen; hier sind numerische Methoden notwendig. Keine andere Wissenschaft kennt dieses für die Mathematik charakteristische Problem, dass man zwar beweisen kann, dass es eine Lösungsformel gibt, man aber diese – bis auf einfache Fälle – nicht anwenden kann, um direkt exakte Ergebnisse zu erhalten.

Eines der zentralen Ergebnisse der internationalen Schuluntersuchungen TIMSS³ und PISA⁴ war, dass der deutsche Mathematikunterricht bei insgesamt mäßigen Leistungen stark kalkülorientiert ist. Der unterrichtliche Schwerpunkt liegt zu einseitig auf Methoden und Verfahren, die zu exakten, formelmäßig darstellbaren Lösungen führen, und zu wenig auf der Durchdringung der zugrunde liegenden mathematischen Ideen. Um dem entgegenzuwirken, sollte nicht das routinierte Lösen von LGS mithilfe des Gauß-Algorithmus im Vordergrund stehen, sondern das Verständnis dieser Methode, das Erkennen der Struktur der Lösungsmenge und ein Überblick über die vielfältigen Anwendungen von LGS. Die Beschäftigung mit LGS im zwei- und dreidimensionalen Fall sollte die geometrische Anschauung aktivieren und zu der wichtigen Erkenntnis führen, dass ein LGS mit einer Gleichung und n Lösungsvariablen im Normalfall ein $(n-1)$ -dimensionales Objekt beschreibt, bei zwei Gleichungen mit n Lösungsvariablen ein $(n-2)$ -dimensionales usw. Da bei praktisch allen „ernsthaften“ Anwendungen Computerhilfe notwendig ist, ist in der Schule die Vermittlung der Einsicht dessen, was ein Computer beim Lösen eines LGS tut bzw. nicht tut, essenziell.

¹ Auch um Mitternacht geweckt muss man sofort diese Formel aufsagen können.

² Umformungen, die mit Bleistift und Papier gemacht werden, nennt man in Österreich „händische Rechnungen“ im Gegensatz zu Rechnungen, die der Computer ausführt. Der Begriff hat sich auch in Deutschland eingebürgert.

³ Third International Mathematics and Science Study
(vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/TIMSS>)

⁴ Programme for International Student Assessment
(vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/PISA-Studien>)

2.1 Algebra in der Schule

Algebra in der Schule bedeutet den sinnvollen Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen. Eine gute Leitvorstellung hierfür beschreibt Franziska Siebel:

„Elementare Algebra ist die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen, die zu ‚guten‘ Beschreibungen quantifizierbarer Zusammenhänge befähigt. Dafür haben sich Mathematisierungsmuster herausgebildet, die durch eine geeignete Fachsprache explizit gemacht werden können:

- *Mit Variablen werden allgemeine, Lösungsvariablen und veränderliche Zahlen dargestellt und handhabbar gemacht.*
- *Zahlen und Variablen werden durch Operationen zu Termen und Gleichungen als Denkeinheiten verbunden und durch verschiedene Begriffe von Gleichheit in Zusammenhang gebracht.*
- *Durch die symbolische Darstellung von Zahlen, Variablen und Zusammenhängen wird ein kontextunabhängiger und regelgeleiteter Zeichengebrauch ermöglicht.“* (Siebel, 2004, S. 19)

2.1.1 Variablen

Die Verwendung von Variablen macht die Algebra aus Sicht der Schüler so schwierig. Variablen und damit Terme und Formeln erlauben es, irgendwelche Sachverhalte allgemein darzustellen und zu bearbeiten. In der S I müssen Schüler lernen, wie man mit Variablen arbeitet, und stimmige Vorstellungen von Variablen entwickeln. In der Gleichungslehre der 70er Jahre des letzten Jahrhunderts wurden viele aus heutiger Sicht überflüssige, die Schüler verwirrende Bezeichnungen eingeführt (Vollrath/Weigand, 2006, S. 182f.). Die „Wiederentdeckung des Inhaltlichen“ führte zu verschiedenen Kontexten von und verschiedenen Kategoriensystemen für Variablen. Bewährt haben sich die drei Grundvorstellungen zu Variablen, wie sie Günther Malle beschreibt (Malle, 1993, S. 46):

Gegenstandsaspekt: Variable als Name einer Lösungsvariablen oder unbestimmten oder nicht näher bestimmbarer Zahl.

Einsetzaspekt: Variable als Platzhalter für gewisse Zahlen bzw. als Leerstelle, in die man Zahlen einsetzen darf.

Kalkülaspekt: Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach gewissen Regeln operiert werden darf.

Einige Beispiele sollen die drei Aspekte verdeutlichen.

Abb. 2.1 „Ohm’sches Dreieck“



Gegenstandsaspekt

- Beate stellt Andreas ein Zahlenrätsel: „Ich denke mir eine Zahl ...“ Für Andreas ist diese Zahl unbekannt, er nennt sie z. B. a .
- Es gilt $3-3=0$, $12-12=0$, also gilt für eine x -beliebige Zahl a ebenfalls $a-a=0$.
- Die Funktion f mit $f(x) = x^5 + 3x^3 + 1$ hat eine positive Nullstelle bei $\approx -0,66$, eine Lösungsformel gibt es aber nicht. Also nenne ich diese Zahl z. B. a . Analoges gilt für die wohldefinierten, aber nicht genau angebbaren Zahlen wie die Kreiszahl π oder die Euler’sche Zahl e .

Einsetzungsaspekt

- Betrachte die Gleichung $x + y = 5$ als Aussageform, in die du beliebige natürliche Zahlen einsetzen darfst; es entstehen wahre oder falsche Aussagen.
- $\sqrt{x^2} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ (x im Simultanaspekt für den Bereich \mathbb{R}^+ , d. h., x steht für beliebige Zahlen aus einem Bereich, die alle gleichzeitig repräsentiert werden).
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ (x im Veränderlichenaspekt für den Bereich \mathbb{R} , d. h., x wird als Veränderliche aufgefasst, die alle Zahlen aus einem Bereich „nacheinander durchläuft“).

Kalkülaspekt

- Äquivalenzumformungen bei Gleichungen, z. B. $2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$.
- Das folgende Beispiel zeigt die Gefahr beim Kalkülaspekt: Auszubildende im Elektri-kerhandwerk lernen oft das Ohm’sche Gesetz als „Ohm’sches Dreieck“ kennen (siehe Abb. 2.1): Halte einen Buchstaben zu, dann zeigt der sichtbare Rest die richtige Formel.

Diese Unterscheidung von Variablen nach drei Aspekten ist eine didaktische, keine mathematische „Fallunterscheidung“. Dies bedeutet, dass der „Anwender“ eine subjektive, normative Sicht auf eine Situation haben und damit Variablen unter unterschiedlichen Aspekten deuten kann. Wesentlich ist eine bewusste und sachgemäße Entscheidung.

2.1.2 Gleichungen

Aus Sicht der Schule sind Gleichungen Aussageformen mit Variablen im Einsetzungsaspekt. Werden für die Variablen Zahlen eingesetzt, so entsteht eine wahre oder eine falsche Aussage. Diejenigen Zahlen, die beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führen, heißen **Lösungen** der Gleichung.

Diejenigen Variablen, in die (aus einer vorher festzulegenden Zahlenmenge) eingesetzt werden darf, nennen wir **Lösungsvariablen**. Für die Gleichung

$$2x^2 + 3x = 1$$

ist klar, dass x die Lösungsvariable ist. Für die Gleichung

$$ax^2 + bx = c$$

muss aber zuerst festgelegt werden, was Lösungsvariable ist. Das kann z. B. die Variable x sein, die Variablen a , b und c kann man dann z. B. als feste, aber unbekannte Zahlen im Gegenstandsaspekt sehen; solche Variablen nennen wir in Zukunft **Koeffizienten**. Was macht eine Gleichung zu einer linearen Gleichung? Wikipedia definiert: „Eine lineare Gleichung ist eine *mathematische Bestimmungsgleichung*, in der ausschließlich *Linear-kombinationen* der *Lösungsvariablen* vorkommen.“ Für die Schule sind solche Definitionen weniger hilfreich; dort sollte man den Begriff durch die Betrachtung verschiedener Gleichungen herausarbeiten. „Linear“ heißt eine Gleichung, wenn die Variablen im Einsetzungsaspekt nur in der ersten Potenz und nicht als Produkte vorkommen. Die Gleichung

$$3x + 4y = 3$$

kann in diesem Sinne als lineare Gleichung mit den Lösungsvariablen x und y gesehen werden. Man könnte aber auch nur y als Lösungsvariable ansehen und x als Koeffizienten. Die Gleichung

$$3x \cdot 4y = 3$$

ist dagegen keine lineare Gleichung, wenn man x und y als Lösungsvariablen betrachtet. Betrachtet man dagegen wiederum nur y als Lösungsvariable, so hat man wieder eine lineare Gleichung. Das letzte Beispiel zeigt übrigens eine tückische Falle für Anfänger, die Lehrer oft nicht erkennen. Wir sind es gewohnt, anstelle $3 \cdot x$ verkürzend nur $3x$ (aber seltsamerweise niemals $x3$) zu schreiben. Zu Beginn sollte man alle Rechenzeichen schreiben, immer wieder auf die Vereinfachungen durch das Kommutativgesetz und die anderen Rechengesetze hinweisen, um nicht falsche Grundvorstellungen für den Umgang mit Zahlen und Variablen zu provozieren.

Zurück zu den linearen Gleichungen: Ein schon komplexeres Beispiel ist die Gleichung

$$a \cdot b \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 10,$$

die eine lineare Gleichung für die Lösungsvariablen x , y und z , jedoch keine lineare Gleichung für die Lösungsvariablen a , b und c ist. Bei der Ausgangsgleichung müssen also zuerst über die Rolle der Variablen a , b , c , x , y und z Festlegungen getroffen werden, wofür die oben stehenden Grundvorstellungen von Variablen nach Malle sehr hilfreich sind.

Wie oben festgelegt, bezeichnen wir hier und im Folgenden die im Einsetzungsaspekt gewählten Variablen als Lösungsvariablen. Die anderen vorkommenden Variablen gehören zu den Koeffizienten und können durchaus unterschiedlich gesehen werden. Ein Beispiel soll das verdeutlichen: Wir lösen der Reihe nach lineare Gleichungen wie

$$3x + 5y = 3 ; \quad 2x - 7y = 3 ; \quad \dots$$

mit konkreten Zahlen als Koeffizienten und jeweils x und y als Lösungsvariablen. Nun betrachten wir diesen Gleichungstyp anhand der Gleichung $ax + by = c$ mit den Lösungsvariablen x und y . Die Variablen a , b und c können wir nun als unbestimmte Zahlen, also im Gegenstandsaspekt betrachten. Wir können aber auch sagen, dass wir die konkreten Umformungen zuerst mit Zahlen als Koeffizienten und nun formal mit bedeutungslosen Zeichen a , b und c machen und damit a , b und c im Kalkülaspekt sehen. Schließlich könnte man bei der Aufgabe

„Löse die lineare Gleichung $ax + by = c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.“

die Variablen a , b und c ebenfalls im Einsetzungsaspekt, nicht aber als Lösungsvariablen sehen. Zusammenfassend kann man sagen, dass für das Lösen der Gleichung nur die Festlegung der Lösungsvariablen notwendig ist; die Sicht der eventuell bei den Koeffizienten vorkommenden Variablen ist nicht wesentlich. Das sieht man besonders deutlich, wenn man eine Gleichung mit dem Computer lösen lässt (siehe hierzu den Abschnitt 2.6). Der Befehl

$$\text{solve}([a*x+b*y=c])$$

(in der Syntax des Computeralgebrasystems Maxima) führt zur Nachfrage des Computers, nach welchen Variablen aufgelöst werden soll, also was die Lösungsvariablen sein sollen. Erst die Präzisierung

$$\text{solve}([a*x+b*y=c], [x, y]) \text{ oder } \text{solve}([a*x+b*y=c], [a]) \text{ oder } \dots$$

führt zu einer Aktion des Rechners. Etwas anders verhält sich das CAS-Modul der Software GeoGebra. Die Eingabe

$$\text{Löse}[a*x+b*y=c]$$

liefert hier das Ergebnis

$$\left\{ x = \frac{-y \cdot b + c}{a} \right\} ;$$

GeoGebra nimmt generell x als Lösungsvariable an, wenn keine Angaben gemacht werden. Soll eine andere Lösungsvariable gewählt oder sollen Gleichungen mit mehr als einer

Lösungsvariablen betrachtet werden, ist auch hier deren explizite Festlegung nötig, z. B. durch

Löse $[a \cdot x + b \cdot y = c, \{x, y\}]$ oder Löse $[a \cdot x + b \cdot y = c, a]$ oder ...

Nachdem geklärt ist, was eine „lineare Gleichung“ sein soll, ist der Begriff „lineares Gleichungssystem“, d. h. „System von linearen Gleichungen“ (kurz LGS genannt), evident: Ein LGS besteht aus beliebig vielen linearen Gleichungen mit denselben Lösungsvariablen; Lösungen sind diejenigen Zahlen, die beim Einsetzen in alle linearen Gleichungen zu wahren Aussagen führen.

Wie wir beweisen werden, sind lineare Gleichungen und Systeme von solchen (im Prinzip) stets exakt – in der Realität zumindest, wenn es nicht zu viele Gleichungen sind – sehr leicht lösbar. Dagegen sind nichtlineare Gleichungen praktisch immer extrem schwer oder gar nicht zu lösen.

Auch hier ist wieder auf eine beliebte Missdeutung hinzuweisen: Dass eine Gleichung nicht (durch eine Lösungsformel) lösbar ist, bedeutet nicht, dass sie keine Lösungen hat. Die Polynomgleichung $x^5 + 3x^3 + 1 = 0$ hat natürlich eine reelle Lösung a (und noch vier komplexe), für die wir z. B. dem Graphen die Näherung $a \approx -0,66$ entnehmen können. Die Zahl a selbst können wir aber nicht durch Wurzeln ausdrücken, wie wir seit Galois und Abel wissen.

Schon in der Grundschule kommen lineare Gleichungen in der anschaulichen Form $3 + \square = 7$, $3 \cdot \square + 1 = 10$ oder $3 \cdot \square = 12$ vor. Die Kinder suchen nach den Zahlen, die man in den „Platzhalter“ einsetzen darf, so dass eine wahre Aussage entsteht. Hierfür stehen in der Grundschule nur die natürlichen Zahlen zur Verfügung. Die Kinder entdecken selbst, dass diese Gleichungen nicht immer lösbar sind. Dieser „Mangel“ führt in der frühen Sekundarstufe I aus mathematischer Sicht zur Suche nach neuen Zahlen und damit zu Brüchen, negativen Zahlen und (zunächst) abschließend zu \mathbb{Q} – im Unterricht werden hierfür geeignete Fragestellungen thematisiert, damit zu den „neuen Zahlen“ adäquate Grundvorstellungen entwickelt werden. Mit Blick auf das Lösen von Gleichungen wird in der S I gemäß dem Spiralprinzip die Mathematisierung zu der allgemeinen linearen Gleichung $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$ vollzogen (die Verallgemeinerungen $c + x = d$ und $c \cdot x + e = f$ sind Fälle mit $a = 1$ und $b = d - c$ bzw. mit $a = c$ und $b = f - e$). Das adäquate Umgehen mit Variablen und die für die Bestimmung der Lösungsmenge notwendigen Fallunterscheidungen sind durchaus abstrakt und anspruchsvoll. Wesentlich ist der Aufbau stimmiger Grundvorstellungen zu Variablen und Formeln. Die obige Gleichung $a \cdot x = b$ ist eine „lineare Gleichung“ mit der Lösungsvariablen x und den beiden Koeffizienten a und b .

Die beiden ersten Aspekte von Variablen, der Gegenstandsaspekt und der Einsetzungsaspekt, sind für Anfänger besonders wichtig, der dritte Aspekt, der Kalkülaspekt, macht

zwar die Kraft der Mathematik aus, kann aber von Schülern nur sinnvoll benutzt werden, wenn sie über solide Grundvorstellungen zum Gegenstandsaspekt und zum Einsetzungsaspekt verfügen. Bei unserer obigen Gleichung $a \cdot x = b$ „verraten“ die Buchstaben, dass a und b zu den Koeffizienten gehören und x als Lösungsvariable im Einsetzungsaspekt gemeint ist; gesucht sind alle Zahlen x aus einer vorgeschriebenen Grundmenge, etwa $x \in \mathbb{N}$ oder $x \in \mathbb{Q}$, die beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führen. Die von der Kalkül-Grundvorstellung gesteuerte Umformung „Auflösen nach x “ liefert in diesem Fall die gesuchte Lösung $x = \frac{b}{a}$ (für $a \neq 0$). Die Bezeichnungen von x als „Lösungsvariable“ und von a und b als „Koeffizienten“ sind beim Umgang mit Gleichungen übliche, leicht verständliche Sprechweisen, die im Rahmen der Malle’schen Variablenaspekte angemessen sind. Die Bedeutung der Variablen hängt aber nicht davon ab, ob man die Namen a , b und x am Anfang oder am Ende des Alphabets wählt! Es muss den Schülern schon an dieser Stelle klar sein, dass die Auszeichnung von x als Lösungsvariable zwar durchaus üblich, aber willkürlich ist.⁵ Es ist eine normative Entscheidung des „Gleichungslösers“, welche Variablen er als „Lösungsvariablen“ im Sinne des Einsetzungsaspekts und welche er als „Koeffizienten“ betrachtet.

2.2 LGS in der Schule – ein Überblick

2.2.1 Überblick über die Sekundarstufe I

In der S I werden auch die Fundamente zur Funktionenlehre, zunächst in Form von proportionalen und antiproportionalen Funktionen, später von linearen⁶, quadratischen und weiteren Funktionen gelegt. Die linearen Funktionen

$$f : x \mapsto y = ax + b$$

gestatten es, die bisher im Sinne der „synthetischen Geometrie“⁷ betrachteten Punkte und Geraden der Euklidischen Ebene mit Zahlen zu beschreiben; der erste Schritt zur „Analytischen Geometrie“⁸ ist getan. Der eindeutig bestimmte Schnittpunkt zweier nicht-paralleler Geraden kann jetzt nicht nur konstruiert, sondern auch berechnet werden. Die Deutung der linearen Gleichung $ax + by = c$ zweier Lösungsvariablen x und y als Gleichung einer Geraden $y = \frac{1}{b}(-ax + c)$ für $b \neq 0$ ist jetzt naheliegend. Auch für

⁵ Die Wahl der ersten Buchstaben des Alphabets für Koeffizienten sowie der letzten Buchstaben für Lösungsvariablen geht auf Descartes zurück.

⁶ Aus fachlicher Sicht wäre der Begriff „affin lineare Funktionen“ angebracht, aus Sicht der Schule denkt man aber an Funktionen, deren Graph eine Gerade ist, so dass die „einfachere“ Sprechweise schulgemäß ist.

⁷ In der synthetischen Geometrie wird versucht, die Geometrie aus Axiomen herzuleiten. Es ist die Geometrie Euklids, bei der Punkte, Geraden und Ebenen Grundobjekte sind.

⁸ Die Analytische Geometrie (Koordinatengeometrie) beschreibt die geometrischen Objekte durch Zahlen und Gleichungen.

$b = 0$ erhält die Gleichung eine geometrische Deutung als Parallele zur y -Achse. Diese geometrische Verankerung liefert eine vollständige Übersicht über die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Lösungsvariablen und zwei Gleichungen. Viele Anwendungsprobleme führen zu solchen linearen Gleichungen mit zwei Lösungsvariablen, wobei die Lösungsvariablen unterschiedliche Bedeutungen tragen können. Aus konkreten Aufgabenstellungen entwickeln sich „fast von selbst“ gewisse Lösungsmethoden. Voraussetzung hierfür ist, dass in der frühen S I adäquate Grundvorstellungen zu linearen Gleichungen einer Lösungsvariablen und den hierfür angemessenen Lösungsmethoden angelegt werden, siehe auch [Stahl \(2001\)](#). Näheres hierzu wird in dem Abschnitt 2.3 ausgeführt.

2.2.2 Überblick über die Sekundarstufe II

Üblicherweise werden lineare Gleichungssysteme wieder in der Sekundarstufe II betrachtet. Hierbei sind drei Szenarien möglich:

- a) Man stößt auf LGS im Rahmen der Beschreibung des „Anschauungsraumes“ durch Vektoren. Man stößt wieder auf LGS bei der Koordinatendarstellung von Geraden und Ebenen. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit drei Lösungsvariablen kann jetzt als Ebene im Raum gedeutet werden. Die Erkundung der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten von LGS mit drei Lösungsvariablen und ein, zwei oder drei Gleichungen wird durch die geometrische Anschauung gestützt.
- b) In manchen Bundesländern, z. B. in Niedersachsen, wird auf Analytische Geometrie zugunsten von LGS und Matrizenrechnung mit rein algebraischem Zugang verzichtet. Ohne geometrische Vorarbeit kann aber nicht geschlossen werden, dass die Gleichung $ax + by + cz = d$ eine Ebene beschreibt. Zwar ist es einsichtig, dass zu jeder Wahl von x und y (i. Allg.) genau ein z existiert, das zu einer wahren Aussage führt, aber diese Erkenntnis liefert nur die geometrische Deutung, dass die Lösungsmenge eine Fläche ist. Man verzichtet also auf die Deutung der Lösungsmenge als Ebene und die wesentliche Visualisierung der möglichen Lösungsmengen von LGS mit drei Lösungsvariablen als Ebenenschnitte.
- c) Es kommt vor, dass der Lehrplan zwar Analytische Geometrie vorsieht, jedoch etwa aufgrund eines Beschlusses der Fachgruppe vor der Analytischen Geometrie in der Analysis „Steckbriefaufgaben“ behandelt werden müssen. Das sind Aufgaben vom Typ „Bestimme eine ganzrationale Funktion vom Grad 3, deren Graph durch vier vorgegebene Punkte verläuft“, siehe Abschnitt 2.7.2.⁹ Das Einsetzen der Punktkoordinaten führt zu einem LGS mit vier Lösungsvariablen a, b, c und d , dessen Lösung die

⁹ Vereinzelt treten derartige Aufgaben (Bestimmung der Koeffizienten quadratischer Funktionen) schon in der Klassenstufe 8 oder 9 auf.

fragliche Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ergibt. Damit hat man beim Zugang zu LGS dieselben Probleme wie bei b).

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass LGS im Rahmen der Analytischen Geometrie thematisiert wurden. Im Sinne des Spiralprinzips werden zunächst lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit zwei und drei Lösungsvariablen untersucht. Die in 2.3 diskutierten Lösungsmethoden für den Fall $n = 2$ lassen sich übertragen – zu einer sinnvollen Verallgemeinerung führt allerdings nur die Methode mit Zeilenoperationen (Additionsverfahren), die für die S I eher zu kompliziert erscheint. Dank der geometrischen Vorstellung der Lösungsmengen in den Fällen $n = 1, 2$ und 3 als Schnitte von Geraden bzw. Ebenen ist jetzt der Übergang zu Gleichungssystemen mit mehr als drei Lösungsvariablen „spiralg“ motiviert: Für $n = 1, 2$ und 3 weiß man, dass eine einzige Gleichung mit n Lösungsvariablen i. Allg. eine „ $(n-1)$ -dimensionale“ Lösungsmenge hat, dass ein LGS mit n Lösungsvariablen und n Gleichungen i. Allg. genau eine Lösung oder auch keine hat und für $1 < m < n$ Gleichungen i. Allg. eine $(n-m)$ -dimensionale Lösungsmenge oder auch keine Lösung.

Zu den ersten (bereits in der S I behandelten) Situationen, die auf lineare Gleichungen (mit $n = 2$) führen, gehören die linearen Funktionen und ihre Graphen. Der Graph einer Funktion ist in heutiger Sicht eine Menge von Punkten $(x|f(x))$. Insofern ist die 2-Tupel-Schreibweise $(3|4)$ oder $(x|ax + b)$ für Lösungen einer linearen Gleichung naheliegend; eine alternative 2-Tupel-Schreibweise ist $(3; 4)$. Manche Schulbücher verwenden die erste Schreibweise $(a|b)$ für „echte“ Punkte, die zweite $(a; b)$ für Lösungen von LGS; dies halten wir für übertrieben.

In der Sekundarstufe II kommt man (auch bei LGS mit $n > 2$) zunächst mit der aus der S I bekannten „Punkt“-Schreibweise aus. In leistungsstarken Kursen der S II erkundet man die Struktur der Lösungsmenge eines LGS genauer, macht die Unterscheidung zwischen dem Ausgangs-LGS, dem „inhomogenen System“, und dem zugehörigen „homogenen System“ und entdeckt z. B., wie man aus zwei Lösungen des homogenen Systems durch „Addition“ eine weitere Lösung erhält. Die Schüler kennen schon die Vektoraddition. Die Deutung der Addition der beiden Lösungen als Vektoraddition führt anstelle der Punktschreibweise

$$(a|b|c)$$

im Anschauungsraum zur Vektorschreibweise

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

für die Lösungen.

In einem weiteren Abstraktionsschritt wird die Matrizenmultiplikation eingeführt. Damit können geometrische Abbildungen klassifiziert, aber auch viele weitere Anwendungen von Matrizen erkundet werden. Diese Sichtweise in der Schule wird im Sinne des

Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen
Algebra

Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen
und anwenden

Henn, H.-W.; Filler, A.

2015, XI, 402 S. 287 Abb., 200 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-43434-5