

## 2.1 Phänomene

### 2.1.1 Genaue Zahlen – gibt's die überhaupt?

Die meisten Zahlen, die einem in der Praxis begegnen, sind *Näherungswerte*; genaue Zahlenwerte kommen eigentlich nur relativ selten vor.

- *Messwerte* von Größen wie Länge, Fläche, Volumen, Masse, Zeit, Temperatur usw. sind prinzipiell mit Messfehlern behaftet, dadurch ungenau. An diesem Beispiel wird besonders deutlich, dass man die Vorsilbe *un-* und den Begriff *Fehler* nicht mit der üblichen negativen Konnotation versehen darf: Die Ungenauigkeit ist ein integraler Bestandteil des Umgangs mit Größen!
- Eine Ausnahme bildet in gewisser Weise der Größenbereich *Geld*: Preise sind exakt auf zwei Nachkommastellen genau anzugeben, auch das Finanzamt will auf Cent genau wissen, wie viel man verdient hat. Aber schon die Preise pro Kilogramm, die bei der Warenauszeichnung im Supermarkt angegeben werden müssen, sind gerundet. Häufig genügen gerundete Angaben: Kann ich mir den Fernseher für ca. 500 € leisten? (Vgl. Abschn. 1.1.2 über Schwellenpreise!) In Schlagzeilen wie „Bank XY benötigt ca. 8 Mrd. € Staatshilfe“ ist der genaue Betrag uninteressant (es ist sogar nicht sicher, ob sich der normale Bürger unter diesem Näherungswert etwas vorstellen kann).
- Bei Definitionen von Größeneinheiten und bei Umrechnungsfaktoren findet man exakte Zahlen, die Festlegung ist mehr oder weniger willkürlich. Beispiele:

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}; \quad 1 \text{ Zoll} = 2,54 \text{ cm}; \quad 1 \text{ Tag} = 24 \text{ Std.}$$

Ein komplexeres Beispiel: 1 Meter ist definiert als die Strecke, die das Licht im Vakuum in  $\frac{1}{299.792.458}$  Sekunde zurücklegt. Die Zahl im Nenner stammt natürlich von der Licht-



**Abb. 2.1** Sand und Steine

geschwindigkeit, gemessen mit der ursprünglichen Definition des Meters, aber nach der heutigen Definition ist sie *exakt*. Die Längeneinheit ist somit an die Zeiteinheit gekoppelt, und 1 Sekunde ist definiert als das 9.192.631.770-Fache der Periodendauer einer gewissen elektromagnetischen Strahlung.

- Zum Thema *Anzahlen*: Bei relativ wenigen Objekten kann die Anzahl als Ergebnis eines Zählprozesses exakt bestimmt werden (z. B. Personen im Hörsaal), häufig hilft auch strukturiertes Zählen, etwa bei geometrisch regelmäßiger Anordnung der Objekte (figurierte Zahlen als Paradigma). Aber: Wie viele Kieselsteine sind im weißen Eimer, wie viele Sandkörner im schwarzen (siehe Abb. 2.1)? Wir fragen jetzt nicht, ob diese Information für irgendjemanden nützlich ist, es geht ums Prinzip.

Die Anzahl der Kieselsteine ließe sich mit etwas Mühe exakt feststellen; bei den Sandkörnern ginge es im Prinzip auch, aber niemand würde es ernsthaft versuchen.

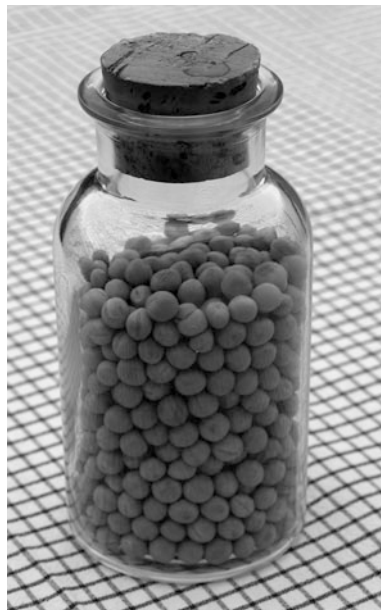
Wie viele Erbsen sind in der Flasche (Abb. 2.2)? Das ist eine beliebte Schätzaufgabe (!) in der Grundschule, man kann sie auch als Wettbewerb gestalten: Wer hat am besten geschätzt? Dazu muss sich zumindest der Schiedsrichter vorher als „Erbsenzähler“ betätigen, um die genaue Anzahl zu bestimmen.

- Weiteres zu *Anzahlen*: Bei demokratischen Wahlen muss genau festgehalten werden, wie viele Wähler jeweils für die Parteien gestimmt haben; bei einem knappen Ergebnis muss ggf. nachgezählt werden, um unvermeidliche Zählfehler auszuschließen. Für eine Prognose reicht jedoch eine repräsentative Auswahl von Wählerstimmen, die dann das Endergebnis mit einer gewissen Unschärfe voraussagt.

Eine Volkszählung (Zensus), die von allen Einwohnern eines Landes Daten erhebt, wird wegen des immensen Aufwandes nur sehr selten durchgeführt. Stattdessen werden oft die Daten ausgewählter Bürger in einem *Mikrozensus* erfasst. Aber auch beim Zensus muss mit erheblichen Fehlerquoten gerechnet werden.

- *Konstanten in Formeln*: Die Fläche eines Dreiecks mit Grundseitenlänge  $g$  und Höhe  $h$  ist  $F = \frac{1}{2}g \cdot h$ ; der Faktor  $\frac{1}{2}$  ist aus mathematischen Gründen exakt.

Die Fläche eines Kreises mit Radius  $r$  ist  $F = \pi r^2$ ; aber wie groß ist der Faktor  $\pi$ ? Zwar kennt man  $\pi$  viel besser als unbedingt notwendig (vgl. Abschn. 3.3.1), aber ganz

**Abb. 2.2** Flasche mit Erbsen

genau eben nicht. Es gibt zahlreiche andere Beispiele für Konstanten in mathematischen Formeln, deren Größe nur näherungsweise bekannt ist.

Das Gravitationsgesetz besagt: Die Anziehungskraft zweier Massen mit Abstand  $r$  ist proportional zu  $\frac{1}{r^2}$ . Die Konstante 2 im Exponenten des Nenners ist eine Modellannahme der Theorie; allerdings hat man experimentell keine Abweichungen feststellen können.

**Zwischenbemerkung** Wir haben einen großen Bereich von Zahlen ausgeklammert, der in der Praxis auch eine bedeutende Rolle spielt, aber nicht in diesen Kontext passt, nämlich die Codezahlen (Telefon-, Kontonummern, PIN usw.). Typisches Merkmal: Es gibt keine Stellenwerte, nur eine Reihe von gleichberechtigten Ziffern. Ob eine PIN vier oder fünf Stellen hat, ist im Prinzip völlig egal; für Geldbeträge trifft das eher nicht zu. Die PIN 1478 ist ähnlich zu 1487, aber eine von beiden ist falsch; das Attribut *ungenau* passt hier nicht.

**Zurück zum Thema** Exaktheit ist, wie die Beispiele zeigen, in den meisten Fällen unmöglich, überflüssig oder sinnwidrig; sie sollte nicht als oberstes Ziel einer Zahlenangabe angestrebt werden. Dagegen muss man sich ständig fragen: Welche Genauigkeit brauche ich, welche kann ich erreichen?

Gefährlicher noch als zu ungenaue Zahlen sind zu genaue Zahlen. Denn die Ungenauigkeit ist offensichtlich, während man einer scheinbar genauen Angabe nicht ansehen

kann, welche Dezimalstellen denn etwas aussagen und welche mehr oder weniger zufällig entstanden sind. Das gilt auch und besonders für die Ergebnisse von Berechnungen, die mit TR oder Computer ausgeführt wurden (vgl. auch Abschn. 2.1.2). Was der TR anzeigt (meistens zehn Stellen), ist in der Regel zu genau, und man muss eine Auswahl treffen. Man sollte vielleicht die TR-Ergebnisse nicht als *richtig* verstehen, sondern als *Angebot*: „Nimm dir so viele Stellen, wie du brauchst!“

C. F. Gauß hat einmal gesagt: „Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen“. Er hat mit diesem Zitat sicher so ähnliche Phänomene gemeint, und Gauß war eigentlich jemand, der in seinen Forschungen (u. a. Zahlentheorie) sehr exakt sein musste.

- Prinzip: Die mögliche, sinnvolle oder erforderliche Genauigkeit ist kontextabhängig.

Ein erstes Beispiel aus einem aktuellen Anlass: Bei der Auszählung von Wählerstimmen (Zählprozess, natürliche Zahlen) sollte wegen der wichtigen Konsequenzen eigentlich ein sehr hoher Genauigkeitsanspruch herrschen, aber:

Bei der Wahl zum deutschen Bundestag im September 2013 gab es im Wahlkreis 120 (Essen-West) ein sehr knappes Ergebnis bei den Erststimmen (Wahl des Direktkandidaten). Auszüge aus einer Meldung von „SPIEGEL ONLINE“ vom 30.09.:

„Hier fand das engste Rennen statt, der CDU-Kandidat gewann mit 3 Stimmen. Dann gab es Berichte über Unregelmäßigkeiten und nach einer teilweisen Neuauszählung lag plötzlich seine SPD-Konkurrentin vorn. Nun wurde der gesamte Wahlkreis neu ausgezählt, und der CDU-Mann ... hat tatsächlich gewonnen. Sein Vorsprung wuchs sogar von drei auf 93 Stimmen. Er erhielt 59.101 Erststimmen, auf [die SPD-Kandidatin] entfielen 59.008. ...

Die Abweichungen zum Auszählungsergebnis vom Wahlabend liegen nach Ansicht [des Wahlleiters] innerhalb der üblichen Fehlertoleranz. „Das ist menschlich, dass hier und da Fehler passieren.“ In Essen seien die Zählfehler nur deshalb zur Besonderheit geworden, weil das Ergebnis so knapp war, sagte er.“

Zur Illustration des o. g. Prinzips nun einige weitere Beispiele.

## Einwohnerzahlen

Wie viele Einwohner hat Wien?

Auf die Frage „Wien Einwohnerzahl“ antwortet Google „1,731 Millionen (2012)“ und gibt als Quelle die Vereinten Nationen an.

Im ersten Absatz der Wikipedia-Seite über Wien steht: „Mit über 1,7 Millionen Einwohnern ist Wien die bevölkerungsreichste Großstadt Österreichs.“ Weiterhin wird in einer Tabelle mit verschiedenen Daten zur Stadt angegeben: „Einwohner 1.741.246 (1. Januar 2012)“. Mit Sicherheit stimmte diese Zahl am 2. Januar aufgrund der ständigen Fluktuation nicht mehr (vermutlich hat sie auch am 1. Januar nicht exakt gestimmt), aber das würde niemanden stören; statistische Daten müssen wohl so „genau“ sein.

Interessant sind auch die Zahlen im folgenden kurzen Ausschnitt aus einem Artikel der Zeitung „Kurier“ unter der Überschrift „Wien ist zweitgrößte deutschsprachige Stadt“<sup>1</sup>:

„Es sind nur 7000 Menschen, die den Unterschied machen: Wien hat Hamburg als zweitgrößte deutschsprachige Metropole abgelöst. Mit 1.741.246 Einwohnern liegt Wien vor der Hansestadt und muss sich nur mehr der deutschen Hauptstadt Berlin geschlagen geben; dort wohnen knapp 3,5 Millionen Menschen. In Hamburg wurde die Bevölkerung zuletzt am 31. Dezember 2012 mit insgesamt 1.734.272 Bewohnern erfasst.“

Es sind nicht 7000 Menschen, die den Unterschied ausmachen, sondern nur 6974, aber das ist völlig unwichtig. Wichtiger scheinen uns hierbei die unterschiedlichen „Messzeitpunkte“ zu sein, die ja ein Jahr auseinanderliegen; in einem Jahr kann sich da einiges verändern! Zum anschließenden Vergleich mit Berlin genügen *zwei* Ziffern für die dortige Einwohnerzahl, um zu erkennen, dass Berlin etwa doppelt so viele Einwohner hat wie Wien oder Hamburg.

**Fazit** Die Anzahl mit vollen sieben Stellen ist zu genau. Änderungen von etwa  $\pm 50$  sind kurzfristig zu erwarten, sodass eine auf Hunderter gerundete Zahl ausreichend erscheint (also mit fünf aussagekräftigen Ziffern, die Endnullen betreffen ja „nur“ die Größenordnung); damit kann man sogar Tendenzen in der Bevölkerungsentwicklung beschreiben. Für Angaben, die längerfristig Bestand haben sollen, sind drei bis vier Ziffern angemessen, und für eine eher qualitative Beschreibung der Größe genügen ein bis zwei Ziffern, ggf. mit Präfixen wie *knapp* oder *mehr als* versehen.

## Längen

Wie lang ist die Diagonale  $d$  eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 und 2?

Hier heißt der Kontext *Geometrie*, es ist keine reale Situation gegeben. Nach dem Satz des Pythagoras ist  $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ; mit dem TR kann man bei Bedarf den Dezimalwert 10-stellig ausrechnen, mit einem CAS sogar noch genauer.

Wie lang ist die Diagonale  $d$  eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 m und 2 m?

Die Maßeinheiten deuten an, dass eine reale Situation gemeint sein könnte. Berechnet man mit dem TR  $\sqrt{5} = 2,236067977$ , so hat man  $d$  auf Nanometer genau angegeben, was sicher übertrieben ist. Eine sinnvolle Angabe wäre 2,236 m (auf Millimeter genau); damit wären wohl die meisten realen Probleme zu dieser Aufgabe lösbar.

Passt eine 2,20 m breite Platte durch einen  $1 \times 2$  m großen Türrahmen?

Für diese konkrete Frage reicht sogar der Überschlag (in m)  $2,20^2 = 4,84 < 5$ , also  $2,20 < d$ , um zu wissen, dass man einen Versuch wagen kann.

## Entfernung Erde–Mond

Eine Faustregel gibt an: 400.000 km. Bei Wikipedia findet man 384.400 km, jedoch ausdrücklich als *mittlere* Entfernung bezeichnet, denn die Bahn des Mondes um die Erde ist

<sup>1</sup> <http://kurier.at/chronik/wien/1-741-246-einwohner-wien-nun-zweitgroesste-deutschsprachige-stadt/19.895.417>

(grob gesagt) elliptisch: Die mögliche Abweichung beträgt *im Mittel* ca. 21.000 km, maximal bis zu 28.000 km. Selbst beim o. g. Mittelwert der Entfernung mit der auf Hunderter gerundeten Maßzahl muss man berücksichtigen, dass Erde und Mond keine Punkte sind, sondern eine Ausdehnung haben: Die Radien von Erde und Mond betragen ca. 6400 km bzw. 1700 km, daher stellt sich die Frage: Ist die Entfernung zweier Punkte auf den Oberflächen gemeint, die einander am nächsten liegen? Vermutlich nicht. Dann wohl eher die Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond? Das ist plausibler, aber eine genauere Recherche zeigt, dass auch das nicht stimmt. Es ist nämlich die Entfernung des Mond-Schwerpunktes vom *Baryzentrum* (= Schwerpunkt) des Systems Erde-Mond; dieser Punkt liegt wegen der relativ großen Erdmasse zwar noch innerhalb der Erdkugel, aber immerhin ca. 4700 km vom Erdmittelpunkt entfernt. Technisch ist heutzutage die Entfernung eines festen Mondpunktes von einem festen Erdpunkt zu einem festen Zeitpunkt sehr präzise bestimmbar, vielleicht auf  $\pm 1$  m genau. Man muss sich aber fragen: Was bedeutet diese Angabe?

### Energiesparen

Wenn jeder Einwohner von Deutschland täglich 1 kWh elektrische Energie einsparen würde (eine nicht unrealistische Vorstellung), dann würde das bei 80 Mio. Einwohnern eine Ersparnis von  $80 \cdot 10^6$  kWh pro Tag ausmachen. Das würde einer Kraftwerksleistung von  $\frac{80 \cdot 10^6 \text{ kWh}}{24 \text{ h}} \approx 3 \cdot 10^6$  kW entsprechen, also ca. 3000 MW. Das ist mehr als die Leistung des größten deutschen Kernkraftwerks. (Ob das viel oder wenig ist, hängt vom Standpunkt ab; man müsste wohl noch diese Zahl mit dem Gesamtverbrauch vergleichen.)

### Überschlagsrechnen

Nach den Ausführungen in Abschn. 1.2 ist wohl ein weiteres Beispiel an dieser Stelle unnötig. Zur Genauigkeit ist zu sagen: Hier sind *grobe Näherungen* mit einer, maximal zwei aussagekräftige Ziffern gefragt; häufig genügt sogar die *Größenordnung* mit Angabe der Zehnerpotenz. Dafür sind eigentlich weniger die Kontexte als vielmehr Mittel und Zweck der Berechnungen maßgebend, aber im weitesten Sinne kann man auch das dem obigen Prinzip unterordnen.

## 2.1.2 Merkwürdiges beim Rechnen mit ungenauen Zahlen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es manchmal nicht mit rechten Dingen zuzugehen scheint, wenn man mit ungenauen Zahlen rechnet. Genaueres folgt in den Abschn. 2.3 und 2.4.

**Brauchbarkeit von Ziffern** Multipliziert man zwei 3-stellige Zahlen, dann kommt eine 5- oder 6-stellige Zahl heraus.

$$\text{Beispiel: } 462 \cdot 326 = 150.612$$

**Abb. 2.3** Ungenauigkeit bei der Rechteckfläche



Soweit die Arithmetik. Wenn man jetzt die Länge  $L$  und die Breite  $B$  eines Zimmers ausgemessen hat und den Flächeninhalt  $F$  des Fußbodens berechnen möchte, dann ergibt sich aus  $L = 4,62$  m und  $B = 3,26$  m der Flächeninhalt  $F = 15,0612$  m<sup>2</sup>.

Ist das wirklich so? Wenn wir davon ausgehen, dass die Längenmaße auf Zentimeter gerundet sind, dann können die *genauen* Maße um 0,5 cm nach oben oder unten abweichen, dabei ändert sich die Fläche schlimmstenfalls um je einen Streifen der Breite 0,5 cm pro Wand (vgl. Abb. 2.3, die Größenverhältnisse sind übertrieben), das macht insgesamt ungefähr den Umfang des Zimmers mal 0,5 cm, also ca. 0,04 m<sup>2</sup>!

Mit dem TR kann man das überprüfen, indem man jeweils die maximalen bzw. minimalen Längenmaße miteinander multipliziert:

$$F_{\max} = 4,625 \text{ m} \cdot 3,265 \text{ m} = 15,100625 \text{ m}^2$$

$$F_{\min} = 4,615 \text{ m} \cdot 3,255 \text{ m} = 15,021825 \text{ m}^2$$

Der tatsächliche Flächeninhalt des Fußbodens liegt irgendwo dazwischen. Der arithmetisch korrekt berechnete Flächeninhalt ist mit seinen vier Nachkommastellen viel zu genau, selbst bei der 1. Nachkommastelle ist nicht sicher, ob es eine 0 oder eine 1 ist.

Für Praktiker ist die Angabe  $F = 15,06 \pm 0,04$  m<sup>2</sup> akzeptabel, denn sie ist einfach und relativ genau. Streng genommen stimmt das aber nicht, denn aufgrund dessen wäre der Maximalwert 15,10 m<sup>2</sup>; tatsächlich ist aber  $F_{\max} > 15,10$ . Korrekt ist  $F = 15,061 \pm 0,04$  m<sup>2</sup>.

Übrigens ist es berechtigt, die angegebenen Längenmaße als *3-stellige* Zahlen zu bezeichnen, denn die Position des Dezimalkommata ist für die Multiplikation unwesentlich (man könnte ja ebenso gut mit cm und cm<sup>2</sup> rechnen); in diesem Sinne ist das Produkt der Längen arithmetisch gleichwertig mit dem eingangs genannten Beispiel.

Allgemein kann man das angesprochene Problem so formulieren:

Wenn zwei positive ganze Zahlen  $a, b$  mit  $s$  bzw.  $t$  Stellen gegeben sind, dann hat das Produkt  $a \cdot b$  entweder  $s + t$  Stellen oder eine weniger. Wenn man nun annimmt, dass  $a$  und  $b$  auf ganze Zahlen gerundet worden sind, welche dieser Ziffern sind dann noch *signifikant*, d. h., auf welche Stellen kann man sich verlassen?

Gerundet wird nach der üblichen Regel: Ist die 1. Nachkommastelle kleiner als 5, dann wird abgerundet (der gebrochene Anteil abgeschnitten), andernfalls wird aufgerundet (der ganze Anteil um 1 erhöht). Ist also  $A$  der genaue Wert, der zur ganzen Zahl  $a$  gerundet

wurde, dann gilt:

$$a - 0,5 \leq A < a + 0,5$$

$A$  kann der oberen Grenze beliebig nahekommen, auch bei  $A = a,499 \dots$  wird abgeschnitten. Beispiel mit  $a = 123.456$  und  $b = 654$ :

$$a \cdot b = 80.740.224$$

$$\text{Größtmögliches Produkt:} \quad 123.456,5 \cdot 654,5 = 80.802.279,25$$

$$\text{Kleinstmögliches Produkt:} \quad 123.455,5 \cdot 653,5 = 80.678.169,25$$

Somit sind nur die ersten beiden Ziffern signifikant, schon die dritte ist unsicher! (Was der Begriff *signifikante Ziffer* genau bedeutet, wird im Abschn. 2.2.2 ausführlich diskutiert.)

Noch ein Beispiel mit den gleichen Stellenzahlen:

$$a = 654.123 \quad b = 789 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b = 516.103.047$$

$$\text{Größtmögliches Produkt:} \quad 654.123,5 \cdot 789,5 = 516.430.503,25$$

$$\text{Kleinstmögliches Produkt:} \quad 654.122,5 \cdot 788,5 = 515.775.591,25$$

Immerhin würde sich bei Rundung auf die drei höchsten Stellen immer 516.000.000 ergeben, deswegen kann man die ersten drei Ziffern von  $a \cdot b$  als signifikant bezeichnen; auf jeden Fall sind aber die restlichen sechs Ziffern des Produktes nicht zu gebrauchen.

Experimentieren Sie weiter, variieren Sie die Anzahlen der Stellen! Gibt es allgemeine Regeln, wie viele Ziffern des Produktes brauchbar sind?

**Rechengesetze** Das nächste Thema betrifft die Art und Weise, wie ein TR (oder auch ein Tabellenprogramm) rechnet. Die TR-Zahlen bestehen nämlich aus einer sogenannten *Mantisse* mit einer festen Anzahl von Dezimalstellen und einem Zehnerexponenten. I. Allg. hat die Mantisse maximal zwölf bis fünfzehn Stellen (abhängig vom Typ), wobei meistens nur bis zu zehn Stellen angezeigt werden. Die Ergebnisse werden *nach jeder Rechenoperation* gerundet. Für normale Verhältnisse reicht diese Genauigkeit vollkommen aus, um auch bei längeren Rechnungen keine großen Fehler zu erzeugen, sodass man sich in der Regel auf die Ergebnisse verlassen kann. Gleichwohl gibt es merkwürdige Phänomene, die man in kritischen Fällen beachten muss. Wir werden sie nicht mit den echten TR-Zahlen demonstrieren, sondern anhand eines virtuellen *Spielzeugrechners*, der nur mit 3-stelligen Mantissen rechnet. Im Prinzip gibt es diese Phänomene aber genauso beim realen TR.

Beispiele für 3-stellige Zahlen: 3,14; 23,7; 37; 0,00147; 58.800;  $7,77 \cdot 10^{18}$

Jede solche Zahl hat eine normierte Darstellung  $m \cdot 10^e$  mit  $1 \leq m < 10$  und  $e \in \mathbb{Z}$ , wobei  $m$  zwei Nachkommastellen hat, z. B.  $0,00147 = 1,47 \cdot 10^{-3}$  oder  $20 = 2,00 \cdot 10^1$ ; aber man muss sie nicht immer in dieser Form hinschreiben.



Die Rechenoperationen werden erst mit voller Genauigkeit ausgeführt, dann wird das Ergebnis auf drei Stellen gerundet, z. B.  $23,7 \cdot 3,44 = 81,528 \approx 81,5$ . Bei einer Verkettung von Operationen gilt das *für jedes Zwischenergebnis*. Puristen mögen bitte verzeihen, dass wir für die gerundeten Rechenergebnisse das Gleichheitszeichen verwenden. Das Zeichen „ $\approx$ “ ist hier nicht als Identität zu lesen, sondern als „... ergibt 3-stellig ...“.

Nun die Beispiele:

- a)  $23,4 + (4,78 + 2,16) = 23,4 + 6,94 = 30,3$   
 $(23,4 + 4,78) + 2,16 = 28,2 + 2,16 = 30,4$
- b)  $17,1^2 - 0,789^2 = 292 - 0,623 = 291$   
 $(17,1 + 0,789) \cdot (17,1 - 0,789) = 17,9 \cdot 16,3 = 292$
- c)  $(61,7 \cdot 19,1) \cdot 4,09 = 1180 \cdot 4,09 = 4830$   
 $61,7 \cdot (19,1 \cdot 4,09) = 61,7 \cdot 78,1 = 4820$
- d)  $(278 - 276) \cdot 4,88 = 2 \cdot 4,88 = 9,76$   
 $278 \cdot 4,88 - 276 \cdot 4,88 = 1360 - 1350 = 10$

Die beiden Terme in a) bis d) sind jeweils algebraisch äquivalent, aber die Resultate sind verschieden – gelten also die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz nicht mehr?

Zwar sind sie nicht ganz außer Kraft gesetzt, aber man muss Einschränkungen hinnehmen.

Welches der beiden Ergebnisse genauer ist, lässt sich ohne *exaktes* Berechnen nur selten entscheiden. So ist z. B. in a) zu vermuten, dass es vorteilhafter ist, zuerst die *kleinen* Summanden zu addieren wie in der 1. Version (vgl. Abschn. 2.3.2). Häufig sind jedoch die Rundungseffekte eher zufällig.

Suchen Sie ähnliche Beispiele! Vielleicht finden Sie welche, bei denen die Unterschiede in den Ergebnissen noch drastischer ausfallen? Andererseits: Bei algebraisch gleichwertigen Termen kommen oft genug auch gleiche Zahlen heraus – die obigen Beispiele sind natürlich ausgesucht.

**Die quadratische Gleichung**  $x^2 - 123x + 2 = 0$  lösen wir jetzt mit der  $p$ - $q$ -Formel, und zwar in zwei Versionen, deren Unterschied man oberflächlich wohl nicht sofort wahrnehmen würde:

$$(A) \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$(B) \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für die Berechnung nehmen wir einen Luxus-TR, der 4-stellig rechnet. Wegen der Wurzeln geht es nicht ohne einen normalen TR, aber wie immer sind die Ergebnisse *nach jedem Zwischenschritt* auf vier Stellen zu runden. Deshalb muss man, um den nächsten Schritt auszuführen, das gerundete Zwischenergebnis *neu eintippen*!

Mit Version (A):

$$\begin{aligned} p^2 = 15.130 &\Rightarrow \frac{p^2}{4} = 3783 \Rightarrow \frac{p^2}{4} - q = 3781 \Rightarrow \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 61,49 \\ -\frac{p}{2} = 61,5 &\Rightarrow x_1 = 61,5 + 61,49 = 123,0 \text{ und } x_2 = 61,5 - 61,49 = 0,01 \end{aligned}$$

Mit Version (B):

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} = -61,5 &\Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 3782 \Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 3780 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 61,48 \\ -\frac{p}{2} = 61,5 &\Rightarrow x_1 = 61,5 + 61,48 = 123,0 \text{ und } x_2 = 61,5 - 61,48 = 0,02 \end{aligned}$$

Die Werte für  $x_1$  stimmen in beiden Versionen überein, aber bei  $x_2$  ergibt sich ein eklatanter Unterschied.

Welches  $x_2$  ist denn jetzt richtig?

Eine sarkastische Antwort könnte lauten: Was auf jeden Fall falsch ist, das ist diese Frage. Denn beide Versionen berechnen  $x_2$  algebraisch korrekt, in diesem Sinne sind beide *richtig*. Das Dumme ist nur, dass sie sich stark unterscheiden. Aber beim Rechnen mit beschränkter Stellenzahl gelten nun mal die üblichen algebraischen Regeln nicht exakt, und das wirkt sich manchmal katastrophal aus. Wenn wir keine Möglichkeit haben, die Güte einer Rechnung zu beurteilen, dann müssen wir in diesem Fall den Worst Case annehmen und beide  $x_2$  auf den Müll werfen. Umgekehrt bedeutet das aber auch: Dass sich in beiden Versionen übereinstimmend  $x_1 = 123,0$  ergab, heißt nicht, dass dieser Wert richtig ist! (*Richtig* ist hier zu lesen als „exakter Wert auf vier Stellen gerundet“.) Ein besseres Gefühl haben wir trotzdem ...

**Fazit** Die für arithmetische und algebraische Rechnungen übliche zweiwertige Skala *richtig/falsch* gilt nicht für numerische Berechnungen; wir brauchen eine wesentlich differenziertere Werteskala von *so genau wie möglich* bis *unbrauchbar ungenau*. Es ist das Ziel der folgenden Abschnitte dieses Kapitels, zur Entwicklung einer solchen Skala beizutragen.

Im vorliegenden Fall können wir natürlich den normalen TR als Schiedsrichter heranziehen. Die Lösungen lauten 10-stellig:

$$x_1 = 122,9837377 \quad \text{und} \quad x_2 = 0,01626231271$$

Auf vier Stellen gerundet sind  $x_1 = 123,0$  und  $x_2 = 0,01626$ . Damit ist bestätigt, dass  $x_1$  auch mit der 4-stelligen Rechnung *so genau wie möglich* ermittelt worden ist, dagegen  $x_2$  in beiden Versionen *unbrauchbar ungenau*.

Es ist möglich, eine quadratische Gleichung so zu konstruieren, dass der normale TR beim Berechnen der Lösungen genau dieselben Probleme hat wie der 4-stellige Spielzeug-TR, wenn auch nicht so klar erkennbar. Wo bleibt dann der Schiedsrichter?

Elementare Numerik für die Sekundarstufe

Schuppar, B.; Humenberger, H.

2015, XII, 391 S. 143 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-43478-9