

---

# Vorwort

*Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, kann man, etwas krass ausgedrückt, auch sagen, dass man eigentlich nur diese Disziplin „braucht“, während die Präzisionsmathematik bloß zum intellektuellen Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine wertvolle und wohl kaum entbehrliche Stütze abgibt.*

*Felix Klein (Vgl. [17], Bd. 1, S. 39)*

Dieses Buch handelt vom Umgang mit fehlerbehafteten Größen und gerundeten Zahlen, von Zahlen im Alltag, vom praktischen Rechnen (mit und ohne Werkzeug), von numerischen Lösungsverfahren für Gleichungen, von numerischer Integration und numerischen Aspekten bei linearen Gleichungssystemen. Wir haben elementare Inhalte der numerischen Mathematik zusammengestellt, die uns als fachlicher Hintergrund für Lehrkräfte besonders wichtig erscheinen: Da in der Praxis des (auch schulischen!) Rechnens *Näherungen* und *Fehler* unvermeidbar sind, sollten angehende Lehrkräfte unbedingt diesbezügliches Grundlagenwissen erwerben. Anschaulichkeit und Phänomene stehen dabei im Vordergrund. Zu Beginn der jeweiligen Kapitel werden oft einzelne Phänomene geschildert, die dann im Anschluss genauer analysiert werden (oft auch mittels Computereinsatz), d. h., auch die zugehörigen theoretischen Aspekte sollen nicht zu kurz kommen. Dem in der Praxis und im Unterricht so wichtigen Überschlagsrechnen und praktischen Faustregeln wird viel Raum gegeben (ohne Computer). Denn gerade in einer Zeit steigender „Computerisierung“ ist zwar das konkrete Rechnen mit vielstelligen Zahlen nicht mehr so wichtig, aber der Überblick über *Größenordnungen* wird dabei immer wichtiger.

Dieses Buch richtet sich primär an Lehrende und Studierende in Studiengängen für das Lehramt für die Sekundarstufe I bzw. an Haupt- und Realschulen, es kann die Basis für eine entsprechende Lehrveranstaltung zur *Elementaren Numerik* in einem solchen Studiengang sein. Aber auch für Studierende der Primarstufe kann eine solche Veranstaltung als vertiefter fachinhaltlicher Hintergrund dienen; die behandelten Themen sind zwar in der Regel nicht direkt in der Grundschule umsetzbar, aber die Idee des Schätzens und Überschlagens spielt auch dort eine große Rolle (vgl. [15], [21]). Zudem können (angehende und praktizierende) Lehrkräfte der Sekundarstufe II von diesem Buch profitieren, denn die genannten Themen sind ebenso für diese Stufe relevant; einige Kapitel beziehen

sich direkt auf den Stoff der Sekundarstufe II, auch um den Lehrkräften der Sekundarstufe I einen Ausblick zu geben, wie entsprechende Methoden später vertieft werden.

Zu jedem Abschnitt gibt es einen Anhang mit Aufgaben zum selbstständigen Weiterarbeiten (mit Ausnahme von Kap. 1, dort sind die Aufgaben in den Text integriert). Wir haben jedoch absichtlich zu den Aufgaben keine Lösungen aufgenommen, sodass Lehrende diese Aufgaben wirklich als eigenständig zu lösende Übungen für die Studierenden stellen können; dies wäre nur sehr eingeschränkt möglich, wenn Studierende Lösungen direkt im Buch oder auf der Verlagshomepage finden könnten.

Eine konzeptionelle Grundlage war das Buch *Elementare Numerische Mathematik* [27]. Wir haben allerdings aus diesem Buch nur wenige Textteile mit geringer Überarbeitung übernommen (so etwa Abschn. 3.3 und Teile von Kap. 6) und das meiste völlig neu gefasst (insbesondere Kap. 1) oder wesentlich überarbeitet.

Es gibt natürlich andere Lehrbücher zur Numerischen Mathematik, die jedoch schwerpunktmäßig für die Ausbildung von Mathematikern/-innen oder Ingenieuren/-innen konzipiert sind, so dass sie in der Lehrerbildung kaum einsetzbar sind.

Was ist nun „Elementare Numerik“? Was unterscheidet sie von dem Forschungs- und Anwendungsgebiet „Numerische Mathematik“ (kurz „Numerik“)?

Ganz generell kann man die Elementarmathematik nicht nur als Reduktion der „Höheren“ Mathematik verstehen, wie manchmal behauptet wird. Stattdessen bezieht sie ihre Ziele, Inhalte und fachdidaktischen Prinzipien aus ihrer Rolle als Hintergrund des Unterrichts. Aus dem allgemeinbildenden Anspruch der Schule ergibt sich nicht nur die Forderung nach Vereinfachung (ohne Verfälschung!), sondern vor allem nach einer breiteren Auswahl der Themen und Methoden, nach anderen Zugängen und anderen Rechenwerkzeugen.

Das Ziel der professionellen Numerik ist, grob gesagt, die Entwicklung und theoretische Analyse von Algorithmen zum Lösen von (Anwendungs-)Problemen mittels Computern. Demgegenüber werden wir zunächst einmal die Ungenauigkeit von Zahlen als *zentrale Idee* herausstellen und unter verschiedenen Aspekten hinterfragen. Wir nehmen auf elementare Weise (auf dem Niveau der Schulmathematik) Phänomene rund um ungenaue Zahlen zum Anlass, um die Bedeutung von *Näherungswerten*, *Näherungsverfahren* und *Fehlerfortpflanzung* deutlich zu machen.

Leider ist die Numerik (noch) nicht so explizit im Curriculum verankert wie z. B. Arithmetik, Geometrie und Analysis und zunehmend auch die Stochastik. Jedoch wird immer wieder gefordert, auch numerische Aspekte stärker im Unterricht zu berücksichtigen, einerseits wegen ihrer großen praktischen Bedeutung (für Handwerk, Technik, Wissenschaft), andererseits aus innermathematischen Erwägungen; das Zitat von Felix Klein über die komplementären Rollen der *Präzisions- und Approximationsmathematik*, die zusammen erst ein ausgewogenes Bild der Mathematik ergeben, ist wohl eines der bekanntesten Beispiele. Zudem erscheinen heute viele Probleme in einem neuen Licht, denn Taschenrechner und Computer sind in der Schule als mathematische Werkzeuge nicht mehr wegzudenken.

Das Einstiegskapitel 1 ist mit *Zahlen im Alltag* überschrieben. Hier werden in Abschn. 1.1 zunächst einige kurze Episoden geschildert, die zum Nachdenken anregen sollen. Dann folgen in den Abschn. 1.2 und 1.3 detaillierte Ausführungen zum oben schon als wichtig bezeichneten *Überschlagsrechnen* – eine oft sehr vernachlässigte Kulturtechnik – und zu bekannten Faustregeln. Spezielle Aspekte großer und kleiner Zahlen werden in Abschn. 1.4 behandelt. Das in letzter Zeit immer populärer werdende Benford-Gesetz (Schilderung der Phänomene, zugehöriger Anwendungen und eine ganz elementare Erklärung dafür) rundet das Kap. 1 ab. Dieses Gesetz beantwortet die Frage: Warum ist die 1 als führende Ziffer von Zahlen bevorzugt? Es ist ja in gewisser Weise ziemlich erstaunlich, dass das überhaupt so ist.

Im Kap. 2 geht es um *Mathematische Aspekte ungenauer Zahlen*, es werden viele in Kap. 1 angerissene Phänomene wieder aufgegriffen und exaktifiziert. Hierbei geht es primär um dazu nötige Grundbegriffe wie Fehlerarten, Fehlerschranken, signifikante Ziffern etc. und um mögliche Prinzipien der Fehlerfortpflanzung beim Rechnen mit fehlerbehafteten Größen.

Den Themen *Potenzen, Wurzeln, Pi-Berechnung, trigonometrische Funktionen* (hier wird u. a. ein antiker und ein moderner Algorithmus besprochen) ist das Kap. 3 gewidmet. Einerseits fragt man sich doch manchmal, was eigentlich passiert, wenn man auf dem Taschenrechner die Wurzel- oder Sinus-Taste drückt; wir werden auf elementarem Niveau zeigen, wie es gehen *könnte* (die Realität ist zumeist nicht so einfach). Andererseits ergeben sich zahlreiche reizvolle mathematische Probleme, wenn man auf die Werkzeuge ganz oder teilweise verzichtet. Auch historische Aspekte kommen nicht zu kurz, etwa bei der Berechnung von  $\pi$ .

Das Kap. 4 behandelt das *näherungsweise Lösen von nichtlinearen Gleichungen*; im Kap. 5 finden sich einige ausgewählte *Verfahren zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale*. Lineare Gleichungssysteme sind ein wichtiges Thema im Schulunterricht, sowohl in der späten Sekundarstufe 1 als auch in der Sekundarstufe 2; das Kap. 6 beschäftigt sich mit zugehörigen numerischen Phänomenen. Ein wichtiger Aspekt in diesen drei Kapiteln ist wiederum, die Werkzeuge ein wenig zu „entzaubern“, denn viele Taschenrechner und Computer-Algebra-Systeme (diese sind zunehmend in Taschenrechnern vorhanden oder als Apps für Tablets und Smartphones zu haben) können auf Tastendruck u. a. Lösungen von Gleichungen und Integrale von Funktionen berechnen. Wir werden zwar nicht die tatsächlich implementierten Verfahren darstellen können (sie sind teils komplizierter, teils geheim), aber wir werden zeigen, wie es prinzipiell möglich ist, solche Berechnungen auszuführen.

Es gibt sicher noch weitere interessante Themen, auch in einem elementaren Kontext, etwa Differentialgleichungen oder Interpolation. Wir haben jedoch keine Vollständigkeit im Sinne einer umfassenden Einführung in die Numerische Mathematik angestrebt, wie man sie in der einschlägigen Literatur findet (diese setzen in aller Regel deutlich mehr mathematische Kenntnisse voraus).

Zu den Werkzeugen, die wir benutzen, gehören in erster Linie Taschenrechner (im Text mit TR abgekürzt), weil sie ständig verfügbar sind. Beim Computereinsatz haben

sich in den letzten zwanzig Jahren einige Programme fest etabliert: Tabellenprogramme, Computer-Algebra-Systeme (CAS) inklusive Funktionenplotter sowie Dynamische-Geometrie-Software (DGS). Dem Thema entsprechend setzen wir vorrangig Tabellenprogramme und CAS ein; viele Zeichnungen sind zwar mit DGS erstellt, der Umgang damit ist jedoch nicht intendiert. Wir gehen davon aus, dass sich in naher Zukunft *inhaltlich* an diesen Werkzeugen wenig ändern wird. Wir können nicht antizipieren, in welcher Form sie in Zukunft technisch allgemein verfügbar sind; schon heute gibt es sie als grafische TR, als Tablet-Apps oder auf Smartboards. Im Prinzip ist das für unsere Zwecke zwar relativ belanglos, für den realen Mathematikunterricht können technische Weiterentwicklungen aber natürlich weitreichende Auswirkungen haben.

Abschließend sei noch einmal betont: Der elementare Charakter der im vorliegenden Buch behandelten Numerik zeigt sich auch und besonders in dem Verhältnis von Theorie zu Beispielen. Wir sind der Meinung, dass sich das eigentliche Verständnis für die Probleme und Verfahren erst mit der Analyse von typischen Beispielen entwickelt; somit ist die Interpretation von Tabellen und Grafiken eine höchst wichtige Aktivität. Die Beispiele sind nicht nur illustrierendes Beiwerk für die Theorie, sondern geradezu eine notwendige Bedingung für einen aktiven und forschenden Umgang mit der Materie.

Dortmund und Wien, im Herbst 2014

Berthold Schuppar und  
Hans Humenberger

Elementare Numerik für die Sekundarstufe

Schuppar, B.; Humenberger, H.

2015, XII, 391 S. 143 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-43478-9