

Zusammenfassung

Ein Maß ist eine Funktion $\mu : A \mapsto \mu(A)$, wobei $A \subset \Omega$ jeweils eine (Teil-)Menge ist. Dieses Kapitel befasst sich mit dem Definitionsbereich \mathcal{A} der Funktion μ . Der Definitionsbereich \mathcal{A} besteht nur aus den Teilmengen $A \subset \Omega$, denen eine Masse $\mu(A)$ zugeordnet werden kann. Da \mathcal{A} häufig nicht alle Teilmengen $A \subset \Omega$ enthält, benötigt man für den Definitionsbereich von μ den Begriff der σ -Algebra.

2.1 Definition und Beispiele

Sei Ω eine Menge, und es sollen wieder Teilmengen A von Ω gemessen werden. Das heißt, wir wollen Teilmengen $A \subset \Omega$ einen gemessenen Wert, eine Masse, $\mu(A)$ zuordnen. Bevor wir im Kap. 3 die Funktion

$$\mu : A \mapsto \mu(A)$$

genauer betrachten (und den Begriff des Maßes exakt definieren), müssen wir uns zunächst fragen: Was genau soll eigentlich der Definitionsbereich der Funktion μ sein? Hierzu betrachten wir zunächst die sogenannte Potenzmenge

$$\mathcal{P}_\Omega = \{A \mid A \subset \Omega\}.$$

Die Potenzmenge \mathcal{P}_Ω enthält also alle Teilmengen von Ω . Es ist natürlich naheliegend, in Kap. 3 ein Maß μ als eine Funktion

$$\mu : \mathcal{P}_\Omega \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu(A)$$

zu definieren, sodass also \mathcal{P}_Ω der Definitionsbereich der Funktion μ ist. Dies würde aber in konkreten Anwendungen bedeuten, dass wir prinzipiell jeder Teilmenge $A \subset \Omega$ eine

Masse $\mu(A)$ zuordnen können. Diese Forderung ist aus zwei Gründen zu stark. Der eine Grund ist höchst irritierend und der andere ist unmittelbar einleuchtend. Den irritierenden Grund müssen wir bis Abschn. 3.4 zurückstellen, aber der einleuchtende Grund wird in folgendem Beispiel deutlich:

Sei Ω wieder die Fläche von Deutschland, und für $A \subset \Omega$ soll $\mu(A)$ der Flächeninhalt von A (in km^2) sein. Stellen wir uns vor, dass wir als Information lediglich eine Tabelle mit den Flächen aller Gemeinden in Deutschland hätten. Dann könnten wir hieraus keine Funktion μ auf ganz \mathcal{P}_Ω angeben. Für zwei verschiedene Gemeinden A_1 und A_2 könnten wir zwar die Flächeninhalte $\mu(A_1)$, $\mu(A_2)$ und $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ bestimmen, nicht aber z. B. die Fläche eines Naturschutzgebietes $B \subsetneq A_1 \cup A_2$, an dem beide Gemeinden einen Anteil haben (aber das diese nicht ganz ausfüllt). In einem solchen Fall würden wir also μ nicht als eine Funktion auf ganz \mathcal{P}_Ω definieren, sondern nur auf einem kleineren Definitionsbereich $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$. Hierbei besteht also dann \mathcal{A} aus denjenigen Teilmengen $A \subset \Omega$, für die wir eine Masse $\mu(A)$ bzgl. unseres gerade verwendeten Maßes μ angeben können oder wollen. Die Funktion

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu(A)$$

ist somit nur für bestimmte und nicht für alle $A \subset \Omega$ definiert. Entsprechend bezeichnen wir auch die Mengen $A \subset \Omega$, die in \mathcal{A} enthalten sind, als messbar:

$$A \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ heißt messbar.}$$

Aus der Motivation heraus, dass \mathcal{A} die Mengen $A \subset \Omega$ enthält, die wir messen können, ist aber auch klar, dass nicht jede Ansammlung \mathcal{A} von Teilmengen $A \subset \Omega$ sinnvoll ist. Zunächst einmal sollte natürlich die Gesamtmenge Ω messbar sein:

$$\Omega \in \mathcal{A}.$$

Wenn wir die Flächeninhalte von Ω und $A \subset \Omega$ kennen, dann können wir auch den Flächeninhalt des Komplements $\complement A = \Omega \setminus A$ berechnen. Wenn also A messbar ist, dann sollte auch $\complement A$ messbar sein:

$$A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \complement A \in \mathcal{A}.$$

Außerdem ist noch plausibel, dass, wenn zwei Teilmengen A_1 und A_2 von Ω messbar sind, dann auch die Vereinigung $A_1 \cup A_2$ messbar ist:

$$A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}. \quad (2.1)$$

Diese Überlegungen führen uns zur Definition der σ -Algebra. Als Definitionsbereich von Maßen μ werden wir in Kap. 3 nur solche $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ verwenden, die die Eigenschaften einer σ -Algebra erfüllen.

Definition 2.1 Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$. Falls \mathcal{A} folgende drei Eigenschaften erfüllt, dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω :

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) Falls $A \in \mathcal{A}$, dann ist auch $\complement A \in \mathcal{A}$.
- (iii) Falls $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Um die Notation etwas abzukürzen, schreibt man oft anstelle von

„Sei Ω eine Menge und sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω .“

einfach nur kurz

„Sei (Ω, \mathcal{A}) ein **Messraum**.“

Bevor wir Beispiele für σ -Algebren betrachten, noch ein paar einfache, aber wichtige Bemerkungen:

Bemerkung 2.2

- (a) Es gilt stets $\emptyset \subset \Omega$ und daher auch $\emptyset \in \mathcal{P}_\Omega$.
- (b) Sei $A \subset \Omega$. Das Komplement $\complement A$ lässt sich auch schreiben als

$$\complement A = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}.$$

Sei I irgendeine Indexmenge (z. B. $I = \{1, \dots, n\}$, $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{R}$ oder sonst irgendeine Menge). Für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset \Omega$. Dann ist

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i_0 \in I, \text{ sodass } \omega \in A_{i_0}\}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \forall i \in I\}.$$

- (c) Mittels Induktion folgt aus (2.1) bereits:

$$\text{Falls } A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_k \in \mathcal{A}, \text{ dann gilt auch } \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathcal{A}. \quad (2.2)$$

Die Bedingung (iii) in Definition 2.1 ist aber etwas stärker als (2.2). (Abzählbar unendlich viele Teilmengen statt nur endlich viele!)

Nun betrachten wir erste Beispiele für σ -Algebren:

Beispiel 2.3 Für jede Menge Ω ist die Potenzmenge \mathcal{P}_Ω stets eine σ -Algebra, und zwar die größtmögliche. Außerdem ist auch $\{\emptyset, \Omega\}$ stets eine σ -Algebra, und zwar die kleinstmögliche. Die σ -Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$ wird auch häufig die triviale σ -Algebra genannt. Für jede weitere σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω gilt

$$\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega.$$

Sei z. B. $A \subset \Omega$ mit $A \neq \emptyset$ und $A \neq \Omega$. Dann ist

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \complement A, \Omega\}$$

eine σ -Algebra auf Ω mit $\{\emptyset, \Omega\} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}_\Omega$. ◀

Beispiel 2.4 Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$. Dann ist

$$\mathcal{A}_0 = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}; \{3; 4\}; \{1; 2; 3; 4\}\}$$

noch keine σ -Algebra, denn:

$$\{1\} \in \mathcal{A}_0, \{3; 4\} \in \mathcal{A}_0, \text{ aber } \{1\} \cup \{3; 4\} = \{1; 3; 4\} \notin \mathcal{A}_0$$

und

$$\{2\} \in \mathcal{A}_0, \{3; 4\} \in \mathcal{A}_0, \text{ aber } \{2\} \cup \{3; 4\} = \{2; 3; 4\} \notin \mathcal{A}_0.$$

Wie man leicht nachprüft, ist aber

$$\mathcal{A} = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}; \{3; 4\}; \{1; 3; 4\}; \{2; 3; 4\}; \{1; 2; 3; 4\}\}$$

eine σ -Algebra auf Ω mit $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}_\Omega$. ◀

Beispiel 2.5 Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$, und sei

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{k \in K} \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right] \mid K \subset \mathbb{Z} \right\}.$$

Wie wir im Folgenden zeigen werden, ist \mathcal{A} eine σ -Algebra auf \mathbb{R} , da \mathcal{A} die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Definition 2.1 erfüllt:

Zu (i): Für die Wahl $K = \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in K} \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{A}.$$

Zu (ii): Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es also ein $K \subset \mathbb{Z}$ mit $A = \bigcup_{k \in K} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$. Setze $K_1 := \mathbb{Z} \setminus K \subset \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\mathbb{C}A = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in K} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] = \bigcup_{k \in K_1} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] \in \mathcal{A}.$$

Zu (iii): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $K_n \subset \mathbb{Z}$ mit $A_n = \bigcup_{k \in K_n} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$. Setze $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in K_n} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] = \bigcup_{k \in K} (k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] \in \mathcal{A}. \quad \blacktriangleleft$$

Beispiel 2.6 Ein weiteres illustratives Beispiel ist

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \mathbb{C}A \text{ ist abzählbar}\}.$$

Der Beweis, dass es sich hierbei um eine σ -Algebra auf $\Omega = \mathbb{R}$ handelt, ist eine schöne Übungsaufgabe. \blacktriangleleft

Studierende haben meist recht große Schwierigkeiten beim Hantieren mit σ -Algebren, und das hat folgenden Grund: Eine σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω ist eine Menge, deren Elemente $A \in \mathcal{A}$ selbst wieder Mengen sind, und zwar Teilmengen von Ω . Das ist etwas verwirrend, denn dadurch haben Elemente A_1 und A_2 aus \mathcal{A} zwei Naturen. Einerseits sind sie Teilmengen von Ω , sodass sie mit Mengensymbolen verknüpft werden wie z. B.

$$A_1 \cup A_2, \quad A_2 \setminus A_1, \quad A_1 \subset \Omega.$$

Andererseits sind sie Elemente der Menge \mathcal{A} , sodass entsprechend

$$A_1 \in \mathcal{A}, \quad \{A_1, A_2\} \subset \mathcal{A}, \quad \{A_1, A_2\} \cup \{A_2, \Omega\} = \{A_1, A_2, \Omega\}.$$

Um sich in der Stochastik zurechtzufinden, ist ein sicherer Umgang mit den Mengen- und Elementsymbolen Voraussetzung. Folgende kleine Übung soll dabei helfen; die Lösung findet sich am Ende des Buches.

Übung 2.7 Sei (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum. Seien A_1, A_2, A_3, \dots Teilmengen von Ω , und sei ω ein Element aus Ω . Geben Sie bei jedem der folgenden Ausdrücke (mit kurzer Begründung) an, ob der Ausdruck sinnvoll ist:

- (a) $A_1 \in \mathcal{A}$
- (b) $\{A_1\} \in \mathcal{A}$
- (c) $\{A_1 \cup A_2\} \in \mathcal{A}$
- (d) $A_1 \cup A_2 \subset \mathcal{A}$

- (e) $\{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{A}$
- (f) $\{\{\omega\}\} \subset \mathcal{A}$
- (g) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$
- (h) $\{A_1, A_2\} \cap \{A_2\} = \{A_1 \cap A_2, A_2\}$

Hinweis: Für ein Element ω aus Ω schreibt man kurz $\omega \in \Omega$. Es wäre aber falsch, $\omega \subset \Omega$ zu schreiben, da ω ein Element und keine Teilmenge von Ω ist; sinnvoll wäre wieder $\{\omega\} \subset \Omega$. ◀

In der Stochastik muss man häufig mit Mengen „rechnen“ und z. B. zeigen, dass für zwei Mengen A und B gilt $A \subset B$ oder $A = B$. Dies gelingt manchmal durch Mengenumformungen z. B. mit Hilfe der De Morgan'schen Regeln. Viel einfacher ist es aber meistens, wenn man solche Umformungen vermeidet und die Aussagen elementweise zeigt. Für $A \subset B$ hält man also ein beliebiges $\omega \in A$ fest und zeigt, dass dann auch $\omega \in B$ gilt. Für $A = B$ zeigt man zunächst $A \subset B$ elementweise und dann $B \subset A$ elementweise. Dies können wir gleich beim Beweis der De Morgan'schen Regeln üben:

Satz 2.8 (De Morgan'sche Regeln) Sei I eine beliebige Indexmenge,¹ und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset \Omega$. Dann gilt

$$\complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i \quad \text{und} \quad \complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i.$$

Beweis Um „ \subset “ der ersten Regel zu zeigen, sei zunächst $\omega \in \complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ fest. Dann gilt unter Zuhilfenahme von Bemerkung 2.2 (b):

$$\begin{aligned} \omega \in \complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\Rightarrow \omega \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \omega \notin A_i \forall i \in I \\ &\Rightarrow \omega \in \complement A_i \forall i \in I \Rightarrow \omega \in \bigcap_{i \in I} \complement A_i \end{aligned}$$

Um nun „ \supset “ der ersten Regel zu zeigen, sei jetzt $\omega \in \bigcap_{i \in I} \complement A_i$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{i \in I} \complement A_i &\Rightarrow \omega \in \complement A_i \forall i \in I \Rightarrow \omega \notin A_i \forall i \in I \\ &\Rightarrow \omega \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \omega \in \complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \end{aligned}$$

In diesem Fall hätten wir auch beide Richtungen gleichzeitig zeigen können, da hier bei jedem „ \Rightarrow “ sogar „ \Leftrightarrow “ gilt. Das geht aber natürlich nicht immer; außerdem ist es einfacher, beide Richtungen getrennt zu behandeln, weil man dann jeweils nur in eine Richtung denken muss.

¹ also z. B. $I = \{1; \dots; n\}$ oder $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$

Die zweite Regel könnte man nun aus der ersten Regel herleiten. Einfacher ist es aber, die Gleichheit der beiden Mengen wieder elementweise zu zeigen. Dies führen wir hier jedoch nicht mehr aus, sondern lassen es als kleine Übung übrig. \square

2.2 Eigenschaften und Erzeuger von σ -Algebren

Nachdem wir uns in Abschn. 2.1 überlegt haben, weshalb σ -Algebren benötigt werden und wie diese (sinnvollerweise) definiert sind, stellen wir zunächst eine Liste von wichtigen Eigenschaften zusammen, die ständig benötigt werden.

Satz 2.9 (Eigenschaften einer σ -Algebra) *Sei Ω eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra auf Ω . Dann gilt:*

- (a) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$.
 (b) Falls $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, dann gilt auch

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{A}.$$

- (c) Falls $A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

- (d) Falls $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, dann gilt auch

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{A}.$$

- (e) Falls $A_1 \in \mathcal{A}$ und $A_2 \in \mathcal{A}$, dann gilt auch

$$A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}.$$

- (f) Sei K irgendeine (höchstens) abzählbare Menge, und für jedes $k \in K$ sei $A_k \in \mathcal{A}$. Dann gilt auch

$$\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \bigcap_{k \in K} A_k \in \mathcal{A}.$$

Der Beweis ist eine relativ einfache Übung:

Übung 2.10 Führen Sie den Beweis von Satz 2.9 aus. \blacktriangleleft

Der folgende Satz wird zwar nicht allzu häufig benötigt, aber der Beweis ist eine gute Übung in Bezug auf die zuvor angesprochenen zwei Naturen der Elemente von \mathcal{A} und der damit verbundenen Schwierigkeiten. Den Beweis sollten Sie also sehr sorgfältig durcharbeiten.

Satz 2.11 (Durchschnitt von σ -Algebren) Sei Ω eine Menge, sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei \mathcal{A}_i eine σ -Algebra auf Ω . Dann ist auch

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine σ -Algebra auf Ω .

Beweis Zunächst einmal müssen wir uns klarmachen, was $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ überhaupt ist: Die Elemente dieser Menge sind gerade die Teilmengen $A \subset \Omega$, die in jeder der σ -Algebren \mathcal{A}_i , $i \in I$, dabei sind, also

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I\}.$$

Man beachte, dass dies etwas völlig anderes ist als

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} A_i \mid A_i \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \right\}.$$

Hat man sich diesen Unterschied einmal (in einigen ruhigen Minuten) wirklich klar gemacht, dann ist der Beweis nicht schwer. Setzen wir dazu $\mathcal{B} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Nach der Vorbemerkung gilt also

$$A \in \mathcal{B} \iff A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I.$$

Wir müssen zeigen, dass für \mathcal{B} dann (i) – (iii) aus Definition 2.1 erfüllt sind:

Zu (i): Wegen $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ gilt $\Omega \in \mathcal{B}$.

Zu (ii): Falls $A \in \mathcal{B}$, dann ist also $A \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$, und weil jedes \mathcal{A}_i eine σ -Algebra ist, folgt somit auch $\complement A \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$. Also ist $\complement A \in \mathcal{B}$.

Zu (iii): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{B}$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in I$ also $A_n \in \mathcal{A}_i$. Für jedes $i \in I$ ist \mathcal{A}_i eine σ -Algebra und somit folgt jeweils $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$. Also ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$. \square

Wie zuvor beschrieben, werden Maße μ häufig nicht auf der ganzen Potenzmenge \mathcal{P}_Ω definiert, sondern nur auf einer kleineren Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$, wobei – wie besprochen – der Definitionsbereich \mathcal{A} die Eigenschaften einer σ -Algebra hat. Wie wird aber in einer konkreten Anwendung \mathcal{A} nun gewählt? Häufig geschieht das folgendermaßen: Man legt fest, welche Teilmengen $E \subset \Omega$ auf jeden Fall dabei sein sollen und gibt dann so viele weitere Teilmengen $A \subset \Omega$ dazu, bis schließlich die Eigenschaften einer σ -Algebra erfüllt sind. Stellen wir uns z. B. vor, dass wir auf $\Omega = \mathbb{R}$ Längen messen wollen. Das Maß μ soll also Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ jeweils ihre Länge zuordnen, also z. B.

$$\mu([-2; 5]) = 7 \quad \text{und} \quad \mu([1; 4]) = 3.$$

Nehmen wir nun an, dass alle Intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ im Definitionsbereich von μ dabei sein sollen. Das heißt also, dass

$$\mathcal{E} = \{[a; b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

auf jeden Fall Teil des Definitionsbereichs von μ sein soll. Da (wie man sich ganz leicht überlegt) aber \mathcal{E} noch keine σ -Algebra ist, müssen wir weitere Teilmengen $A \subset \Omega$ dazugeben. Wir wollen aber auch nicht mehr Teilmengen $A \subset \Omega$ mit dazunehmen als unbedingt nötig und suchen somit nach der kleinsten σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω mit

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{A}.$$

Diesen Gedanken halten wir in der nachfolgenden wichtigen Definition fest.

Definition 2.12 Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_\Omega$. Sei $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ die kleinste σ -Algebra auf Ω , die \mathcal{E} enthält, d. h.:

- (i) $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ ist eine σ -Algebra auf Ω .
- (ii) $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_\mathcal{E}$.
- (iii) Falls \mathcal{D} eine weitere σ -Algebra auf Ω ist mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$, so ist $\mathcal{A}_\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.

Dann heißt $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ die **von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra**, und \mathcal{E} heißt **Erzeuger** von $\mathcal{A}_\mathcal{E}$. Notation: Man schreibt

$$\mathcal{A}_\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}).$$

Der nachfolgende Satz zeigt, dass die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E})$ stets existiert und auch eindeutig ist. Der Beweis ist wieder eine gute Übung in Bezug auf die Schwierigkeiten im Umgang mit σ -Algebren.

Satz 2.13 Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_\Omega$. Dann gibt es genau eine kleinste σ -Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ auf Ω , die \mathcal{E} enthält.

Beweis Zur Existenz: Sei Ψ die Menge aller σ -Algebren, die \mathcal{E} enthalten, d. h.

$$\mathcal{A} \in \Psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \text{ und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}.$$

Wegen $\mathcal{P}_\Omega \in \Psi$ ist Ψ nicht leer. Also existiert

$$\mathcal{A}_\mathcal{E} := \bigcap_{\mathcal{A} \in \Psi} \mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A} \forall \mathcal{A} \in \Psi\}. \quad (2.3)$$

Dieses $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ erfüllt alle Eigenschaften aus Definition 2.12: (i) folgt aus Satz 2.11; (ii) und (iii) folgen unmittelbar aus (2.3).

Zur Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{A}'_{\mathcal{E}}$ eine weitere kleinste σ -Algebra auf Ω , die \mathcal{E} enthält. Da $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ bereits eine kleinste σ -Algebra ist, gilt nach Definition 2.12 (iii) einerseits $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}'_{\mathcal{E}}$. Da aber $\mathcal{A}'_{\mathcal{E}}$ ebenfalls eine kleinste σ -Algebra ist, gilt andererseits nach Definition 2.12 (iii) auch $\mathcal{A}'_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. \square

Betrachten wir einige konkrete Beispiele:

Beispiel 2.14 Aus Beispiel 2.3 kennen wir bereits die σ -Algebra

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \mathbb{C}A, \Omega\}$$

für ein $A \subset \Omega$. Diese σ -Algebra wird von $\mathcal{E} = \{A\}$ erzeugt, denn $\{\emptyset, A, \mathbb{C}A, \Omega\}$ ist offensichtlich die kleinste σ -Algebra, die $\{A\}$ enthält. \blacktriangleleft

Beispiel 2.15 Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{E} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra gleich der Potenzmenge:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}_{\mathbb{N}}.$$

Um dies zu zeigen, setze $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} := \sigma(\mathcal{E})$. Es gilt per Definition, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \supset \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$. Sei dazu $A \subset \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Setze $K = A$ und $A_k = \{k\}$ für jedes $k \in K$, sodass also $A = \bigcup_{k \in K} A_k$. Wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ gilt für jedes $k \in K$, dass $A_k \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$. Somit folgt $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ aus Satz 2.9 (f). \blacktriangleleft

Beispiel 2.16 Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$. Ein Erzeuger der σ -Algebra

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \mathbb{C}A \text{ ist abzählbar}\}$$

aus Beispiel 2.6 ist

$$\mathcal{E} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Der Beweis ist eine schöne Übungsaufgabe. \blacktriangleleft

Beispiel 2.17 Im Eingangsbeispiel vor Definition 2.12 war $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{E} = \{[a; b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Die von diesem \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{B} := \sigma(\mathcal{E})$$

und nennen sie die **Borel- σ -Algebra** auf \mathbb{R} . Dies ist die wichtigste σ -Algebra in der Maßtheorie und in der Stochastik. In Abschn. 3.4 werden wir uns die Borel- σ -Algebra \mathfrak{B} genauer anschauen und weitere Erzeuger von \mathfrak{B} angeben. ◀

Erzeuger von σ -Algebren sind ein wichtiges Hilfsmittel in Beweisen. Meistens sind σ -Algebren nämlich sehr groß und enthalten komplizierte Teilmengen $A \subset \Omega$, die man nicht analytisch angeben kann. Es ist daher oft schwierig, eine Aussage für alle $A \in \mathcal{A}$ direkt zu zeigen. Oftmals ist dies aber nicht nötig, denn wir werden im weiteren Verlauf noch einige Sätze von folgendem Typ kennenlernen:

„Sei $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ und für jedes $A \in \mathcal{E}$ gelte ...“

„Dann gilt ... sogar für alle $A \in \mathcal{A}$.“

Mithilfe solcher Sätze reicht es also oftmals, die entsprechende Aussage nur für die Mengen $A \in \mathcal{E}$ aus dem Erzeuger zu zeigen. Und die Mengen $A \in \mathcal{E}$ sind meist sehr konkrete und einfach handhabbare Mengen. Beispiele für solche Sätze sind Satz 3.5, Satz 4.5 und Satz 6.4, aber auch schon die folgende Bemerkung:

Bemerkung 2.18 Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Algebren auf Ω , und nehmen wir an, wir müssten zeigen, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Eigentlich müssten wir also zeigen

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{B}. \quad (2.4)$$

Sei nun \mathcal{E} ein Erzeuger von \mathcal{A} . Nach Definition 2.12 (iii) folgt dann aus $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$ bereits $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Das heißt also: Statt (2.4) reicht es,

$$A \in \mathcal{E} \Rightarrow A \in \mathcal{B} \quad (2.5)$$

zu zeigen.

Zur Illustration von Bemerkung 2.18 betrachten wir z. B. die σ -Algebra

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist abzählbar oder } \mathbb{C}A \text{ ist abzählbar} \right\}$$

aus den Beispielen 2.6 und 2.16 und die Borel- σ -Algebra \mathfrak{B} aus Beispiel 2.17. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$. Da $\mathcal{E} = \left\{ \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ein Erzeuger von \mathcal{A} ist, reicht es also zu zeigen, dass $\{x\} \in \mathfrak{B}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies folgt aber aus Satz 2.9 (c) mit

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n} \right]}_{\in \mathfrak{B}} \in \mathfrak{B}.$$

Einführung in die Stochastik

Ein Begleitbuch zur Vorlesung

Hable, R.

2015, VIII, 134 S. 15 Abb., 1 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-43497-0