

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>I</b>
i	Das Team ist der Primus . . . . .	II
ii	Eingangstest . . . . .	III
iii	Wolfis Welt . . . . .	VI
iv	Zur Benutzung des Buches . . . . .	XII
<b>1</b>	<b>Elementarmathematik</b>	<b>1</b>
1.1	Diskrete Mathematik . . . . .	3
1.1.1	Was ist Logik? . . . . .	3
1.1.2	Logische Gleichwertigkeit . . . . .	9
1.1.3	Methode der vollständigen Induktion . . . . .	13
1.1.4	Für Informatiker und solche, die es werden wollen: Boolesche und Schaltungs algebra . . . . .	14
1.2	Mengenlehre . . . . .	16
1.2.1	Operationen mit Mengen . . . . .	18
1.2.2	Gegenüberstellung der Logik- und Mengensymbolik . . . . .	21
1.3	Arithmetik . . . . .	22
1.3.1	Zahlenmengen . . . . .	22
1.3.2	Summen und Produkte . . . . .	25
1.3.3	Grundgesetze der Arithmetik . . . . .	30
1.3.4	Teilbarkeit und Primzahlen . . . . .	31
1.3.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen . . . . .	33
1.3.6	Absoluter Betrag . . . . .	36
1.3.7	Binomischer Lehrsatz . . . . .	37
1.4	Komplexe Zahlen . . . . .	40
1.4.1	Definition und Darstellung . . . . .	40
1.4.2	Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen . . . . .	42
1.4.3	Komplexe Rechnung . . . . .	43
1.4.4	Anwendung der komplexen Zahlen . . . . .	47
1.5	Kombinatorik . . . . .	48
1.5.1	Permutation . . . . .	50
1.5.2	Kombination . . . . .	53
1.5.3	Variation . . . . .	55
1.6	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	57
1.6.1	Grundbegriffe . . . . .	57
1.6.2	Wahrscheinlichkeit . . . . .	58
1.6.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . . .	62

1.6.4	Totale Wahrscheinlichkeit . . . . .	64
1.7	Beispiele . . . . .	67
1.7.1	Aussagenlogik, Mengenlehre und Beweismethoden . . . . .	67
1.7.2	Zahlenbereiche und Grundrechenarten . . . . .	70
1.7.3	Komplexe Zahlen . . . . .	73
1.7.4	Kombinatorik . . . . .	74
1.7.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	75
1.8	Zusammenfassung . . . . .	76
1.8.1	Abschlussübung. Ansteuerung einer LCD-Anzeige . . . . .	77
1.8.2	Spicker. Komplexe Zahlen . . . . .	79
1.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Elementarmathematik . . . . .	81

## 2 Lineare Algebra

83

2.1	Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	85
2.1.1	Algebraische Gleichungen . . . . .	87
2.1.2	Äquivalente Umformungen . . . . .	89
2.1.3	Lineare und Quadratische Gleichungen . . . . .	90
2.1.4	Gleichungen n-ten Grades . . . . .	92
2.1.5	Wurzelgleichungen . . . . .	93
2.1.6	Ungleichungen . . . . .	95
2.1.7	Gleichungen & Ungleichungen mit Beträgen . . . . .	97
2.2	Transzendente Gleichungen . . . . .	99
2.2.1	Exponential- und Logarithmengleichungen . . . . .	99
2.2.2	Trigonometrische Gleichungen . . . . .	100
2.3	Matrizen und Determinanten . . . . .	103
2.3.1	Begriffserklärung und Notation . . . . .	104
2.3.2	Spezielle Formen und Basisoperationen . . . . .	105
2.4	Rechnen mit Matrizen . . . . .	108
2.4.1	Addition und Subtraktion . . . . .	108
2.4.2	Matrizenmultiplikation . . . . .	109
2.4.3	Elementarmatrizen . . . . .	111
2.4.4	Rang einer Matrix . . . . .	113
2.4.5	Invertieren einer Matrix . . . . .	115
2.4.6	Orthogonale Matrizen . . . . .	117
2.4.7	Übersicht. Arten von Matrizen . . . . .	118
2.5	Determinanten . . . . .	118
2.5.1	Unterdeterminanten . . . . .	119
2.5.2	Eigenschaften der Determinanten . . . . .	121
2.6	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	124
2.6.1	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	124
2.6.2	Gaußscher Algorithmus . . . . .	125
2.6.3	Gauss-Jordan-Verfahren . . . . .	128
2.6.4	Cramersche Regel . . . . .	129
2.7	Beispiele . . . . .	130
2.7.1	Bestimmungsgleichungen . . . . .	130
2.7.2	Ungleichungen . . . . .	133
2.7.3	Matrizen und Determinanten . . . . .	134
2.7.4	Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	136

2.8	Zusammenfassung . . . . .	140
2.8.1	Abschlussübung. Berechnung von Zweigströmen . . . . .	141
2.8.2	Spicker. Matrizen und Determinanten . . . . .	143
2.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Lineare Algebra . . . . .	145

## 3 Vektoren und analytische Geometrie 147

3.1	Begriffe und Grundgesetze der Vektorrechnung . . . . .	149
3.1.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	150
3.1.2	Der Einheitsvektor . . . . .	150
3.1.3	Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . .	150
3.1.4	Lineare Abhängigkeit und Basis . . . . .	152
3.1.5	Komponentendarstellung und Richtungskosinus . . . . .	153
3.2	Multiplikation von Vektoren . . . . .	157
3.2.1	Das skalare oder innere Produkt . . . . .	157
3.2.2	Das vektorielle oder äußere Produkt . . . . .	161
3.3	Analytische Geometrie . . . . .	164
3.3.1	Geradengleichung in der Ebene . . . . .	164
3.3.2	Parameterform der Ebenengleichung . . . . .	169
3.3.3	Lagebeziehungen . . . . .	171
3.3.4	Abstandsberechnungen . . . . .	175
3.3.5	Kegelschnitte . . . . .	178
3.4	Beispiele . . . . .	188
3.4.1	Vektoralgebra . . . . .	188
3.4.2	Analytische Geometrie . . . . .	190
3.5	Zusammenfassung . . . . .	195
3.5.1	Abschlussübung. Kräfte am Kurbeltrieb . . . . .	196
3.5.2	Spicker. Vektoren und analytische Geometrie . . . . .	197
3.5.3	Wolfram Alpha-Syntax – Vektoren . . . . .	199

## 4 Funktionen einer reellen Veränderlichen 201

4.1	Folgen . . . . .	203
4.1.1	Definition und Darstellung . . . . .	203
4.1.2	Eigenschaften von Folgen . . . . .	205
4.1.3	Nullfolgen . . . . .	205
4.1.4	Konvergenzkriterien und Grenzwertsätze . . . . .	207
4.1.5	Spezielle Zahlenfolgen . . . . .	211
4.2	Funktionen . . . . .	214
4.2.1	Definition und Darstellung . . . . .	214
4.2.2	Zusammengesetzte Funktion . . . . .	218
4.2.3	Kombination und Komposition von Funktionen . . . . .	218
4.3	Umkehrfunktion . . . . .	220
4.4	Eigenschaften von Funktionen . . . . .	224
4.4.1	Schnittpunkte mit den Achsen . . . . .	224
4.4.2	Monotonie . . . . .	225
4.4.3	Beschränktheit . . . . .	226

4.4.4	Symmetrie . . . . .	227
4.4.5	Periodizität . . . . .	228
4.5	Koordinatentransformationen . . . . .	229
4.5.1	Parallelverschiebung des kartesischen Koordinatensystems . . . . .	229
4.5.2	Maßstabsänderung . . . . .	230
4.6	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion . . . . .	231
4.6.1	Grenzwert einer Funktion . . . . .	232
4.6.2	Einseitige Grenzwerte . . . . .	234
4.6.3	Konvergenz und Divergenz . . . . .	235
4.6.4	Grenzwertsätze . . . . .	236
4.6.5	Begriff der Stetigkeit . . . . .	237
4.6.6	Singularitäten einer Funktion . . . . .	238
4.7	Grundfunktionen einer Variablen . . . . .	239
4.7.1	Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . .	239
4.7.2	Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	242
4.7.3	Trigonometrische und Arkus-Funktionen . . . . .	244
4.8	Mittelbare und elementare Funktionen . . . . .	250
4.8.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	250
4.8.2	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	254
4.8.3	Hyperbolische Funktionen . . . . .	258
4.8.4	Areafunktionen . . . . .	260
4.9	Interpolation nach Newton . . . . .	262
4.10	Beispiele . . . . .	265
4.10.1	Folgen reeller Zahlen . . . . .	265
4.10.2	Funktionsbegriff und elementare Eigenschaften . . . . .	265
4.10.3	Umkehrfunktion . . . . .	267
4.10.4	Grenzwerte und Stetigkeit . . . . .	268
4.10.5	Grundfunktionen . . . . .	270
4.10.6	Ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen . . . . .	271
4.11	Zusammenfassung . . . . .	272
4.11.1	Abschlussübung. Interpolation nach Newton . . . . .	273
4.11.2	Spicker. Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	275
4.11.3	Wolfram Alpha-Syntax – Analysis . . . . .	277

## 5

## Differential- und Integralrechnung

279

5.1	Tangentenproblem und Ableitungsregeln . . . . .	281
5.1.1	Zur Ableitung elementarer Funktionen . . . . .	283
5.1.2	Grundregeln der Differentiation . . . . .	285
5.1.3	Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel) . . . . .	287
5.1.4	Logarithmische Ableitung . . . . .	288
5.1.5	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	289
5.1.6	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	290
5.1.7	Hauptsätze der Differentialrechnung . . . . .	291
5.2	Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	293
5.2.1	Differential einer Funktion . . . . .	293
5.2.2	Tangenten- und Normalengleichung sowie Linearisieren einer Funktion . . . . .	294
5.2.3	Deutung von charakteristischen Kurvenpunkten . . . . .	294
5.2.4	Kurvendiskussion . . . . .	297

5.2.5	Extremwertaufgaben . . . . .	299
5.2.6	Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital . . . . .	300
5.2.7	Näherungslösungen . . . . .	302
5.3	Stammfunktion und unbestimmtes Integral . . . . .	304
5.4	Integrationsmethoden . . . . .	306
5.4.1	Elementare Integrationsregeln . . . . .	306
5.4.2	Substitutionsmethode . . . . .	307
5.4.3	Partielle Integration . . . . .	310
5.4.4	Integration von Partialbrüchen . . . . .	312
5.5	Bestimmtes Integral . . . . .	314
5.5.1	Sätze über bestimmte Integrale . . . . .	315
5.5.2	Spezielle bestimmte Integrale . . . . .	318
5.5.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	319
5.5.4	Numerische Integration . . . . .	320
5.6	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	321
5.6.1	Flächeninhalt eines ebenen Normalbereichs . . . . .	321
5.6.2	Bogenlänge einer ebenen Kurve . . . . .	322
5.6.3	Volumen eines Rotationskörpers . . . . .	323
5.6.4	Mantelfläche eines Rotationskörpers . . . . .	325
5.6.5	Zum Schluss. Das Paradoxon der unendlichen Posaune . . . . .	326
5.7	Beispiele . . . . .	327
5.7.1	Differentialrechnung . . . . .	327
5.7.2	Integralrechnung . . . . .	332
5.8	Zusammenfassung . . . . .	336
5.8.1	Abschlussübung. Extremwertaufgabe . . . . .	337
5.8.2	Spicker. Differentialrechnung . . . . .	339
5.8.3	Wolfram Alpha-Syntax – Analysis . . . . .	341

---

## 6      Übungsaufgaben 343

6.1	Übungen. Elementarmathematik . . . . .	344
6.2	Übungen. Lineare Algebra . . . . .	350
6.3	Übungen. Vektoren & analytische Geometrie . . . . .	356
6.4	Übungen. Folgen & Funktionen . . . . .	362
6.5	Übungen. Differential- und Integralrechnung . . . . .	368

---

## 7      Lösungen 373

7.1	Lösungen. Elementarmathematik . . . . .	376
7.2	Lösungen. Gleichungen & Ungleichungen . . . . .	396
7.3	Lösungen. Vektoren & analytische Geometrie . . . . .	414
7.4	Lösungen. Folgen & Funktionen . . . . .	429
7.5	Lösungen. Differential- & Integralrechnung . . . . .	443

---

<b>A</b>	<b>Kleine Formelkunde</b>	<b>463</b>
----------	---------------------------	------------

A.1	Mathematische Symbolik . . . . .	463
A.2	Formelsammlung . . . . .	467

---

<b>B</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>485</b>
----------	----------------------	------------

B.1	Fundstellen . . . . .	485
B.2	Bildquellen . . . . .	486

---

<b>C</b>	<b>Begriffsindex</b>	<b>487</b>
----------	----------------------	------------

Basiswissen Mathematik

Der smarte Einstieg in die Mathematikausbildung an  
Hochschulen

Schmidt, J.

2015, XXV, 491 S. 500 Abb., 350 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-43545-8