

2 Untersuchung der Bewegungsgleichungen

Übersicht

2.1	Allgemeines über Differentialgleichungen	35
2.2	Autonome kanonische Systeme mit einem Freiheitsgrad	46
2.3	Das Zweikörperproblem mit Zentralkräften	52
2.4	Beschleunigte Bezugssysteme	62
2.5	Das Foucault'sche Pendel	69

« — cette étude qualitative (des équations différentielles) aura par elle-même un intérêt de premier ordre — »

H. Poincaré, 1881

Die Zeitevolution eines mechanischen Systems ist durch gewöhnliche Differentialgleichungen – die Newton'schen Bewegungsgleichungen – bestimmt. Diese legen für einen gegebenen *Zustand*, charakterisiert durch die Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen, die weitere Entwicklung des Systems fest.

Es gibt nur wenige Beispiele von Bewegungsproblemen, die exakt (explizit) integriert werden können. Natürlich ist heute der Computer ein sehr hilfreiches Werkzeug (z. B. in der Astronautik). Daneben gilt es aber auch Methoden zu entwickeln, die qualitative Einsichten in die „nichtintegrablen“ Probleme liefern. Auf diesem Gebiete sind gerade in neuerer Zeit beachtliche Entwicklungen zu verzeichnen. Es bleibt aber noch viel zu tun!

2.1 Allgemeines über Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt besprechen wir einige Grundbegriffe und Fakten aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Für ein vertieftes Studium verweise ich auf Amann (1995); Arnold (2001); Walter (2000) des Literaturverzeichnisses.

Die Newton'schen Gleichungen für N Teilchen haben die Form (die Cartesischen Koordinaten bezeichnen wir jetzt mit \mathbf{q}_i):

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \dot{\mathbf{q}}_1, \dots, \dot{\mathbf{q}}_N, t). \quad (2.1)$$

Diese sind von 2. Ordnung. Ein dazu äquivalentes System 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i &= \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{F}_i(\mathbf{q}_i, \dots, \mathbf{q}_N, \frac{\mathbf{p}_1}{m_1}, \dots, \frac{\mathbf{p}_N}{m_N}, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Steht $x \in \mathbb{R}^{6N}$ abkürzend für $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, so ist (2.2) von der allgemeinen Form

$$\dot{x} = X(x, t). \quad (2.3)$$

Hier ist X ein zeitabhängiges *Vektorfeld*,

$$X : \mathcal{M} \times J \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(In unserem Fall ist $n = 6N$.) Die Koordinaten des mechanischen Systems durchlaufen den *Phasenraum* (oder Zustandsraum) \mathcal{M} = offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und die Zeit ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Falls Nebenbedingungen vorliegen (z. B. Teilchen an einer masselosen festgehängten Schnur) ist $\dim \mathcal{M} = 2f$, $f < 3N$, wobei f die *Zahl der Freiheitsgrade* des Systems ist.

Wir fassen den Phasenraum \mathcal{M} immer als Teilmenge des \mathbb{R}^{2f} auf, obschon der Zustandsraum schon für einfache Systeme eine allgemeinere differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. (Wir arbeiten immer in einer Karte.)

Die Vorgabe eines Vektorfeldes definiert ein *dynamisches System*. Unter einer *Lösung* der Differentialgleichung (2.3) versteht man eine Abbildung $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 , wobei $I \subset J$ ein offenes Intervall ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Die Punkte $(\gamma(t), t)$ liegen für alle $t \in I$ im Definitionsbereich von X ;
- (ii) $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), t)$ für alle $t \in I$.

Häufig nennen wir $t \mapsto \gamma(t)$ auch eine *Integralkurve* des Vektorfeldes X .

In Komponenten schreibt sich die Gleichung (2.3)

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

wo X_i die Komponentenfunktionen des Vektorfeldes X bezeichnen.

Bemerkung Wir denken uns in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ den Vektor $X(x)$ „angeheftet“. Dies bedeutet, dass wir X mit der Abbildung $\tilde{X} : \mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M} := \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, X(x))$ identifizieren. Eine Lösung ist also ein Weg, der in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ den Tangentialvektor $\tilde{X} \in T_x\mathcal{M} := \{(x, \mathbb{R}^n)\}$ hat. (X nennt man auch den *Hauptteil* von \tilde{X} .)

Beispiel 2.1

Lineare Differentialgleichungen: $\dot{x} = A(t)x + a(t)$; $A(t)$ ($t \in I$) ist eine $n \times n$ Matrixfunktion mit stetiger t -Abhängigkeit und $a(t)$ ist eine zeitabhängige Translation. ■

Beispiel 2.2

Kanonische Differentialgleichungen: Hier ist das Vektorfeld X von der speziellen Form¹

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{f+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2f}}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_f} \right), \quad (2.5)$$

wobei H eine differenzierbare Funktion ist, $H : U \subset \mathbb{R}^{2f} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Kanonische Differentialgleichungen treten in der Mechanik sehr häufig auf, wenn keine Dissipation vorhanden ist, z.B. in der Himmelsmechanik. Diese Systeme werden wir später sehr ausführlich besprechen. Eine wichtige Klasse von Beispielen erhalten wir aus (2.2), wenn sich die Kräfte aus einem Potential ableiten,

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_N).$$

Setzen wir $x = (q, p)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$, $p = (p_1, \dots, p_N)$, so ist das Gleichungssystem von der Form (2.4), mit einem *Hamilton'schen Vektorfeld* vom Typ (2.5) zur *Hamilton'schen Funktion*

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i} + U(q).$$

Hamilton'sche (kanonische) Systeme lassen sich oft in die Quantenmechanik übersetzen und sind auch deshalb sehr wichtig. Sie haben eine Reihe von speziellen Eigenschaften. Vom Standpunkt der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme sind sie deshalb nicht typisch. Andererseits sind in der Technik die meisten Systeme dissipativ und deshalb nicht durch kanonische Gleichungen (oder höchstens approximativ) zu beschreiben. ■

¹Wir notieren die Vektoren aus „typographischen“ Gründen meistens als Zeilen. Im Matrizenkalkül sind diese aber als Spaltentupel zu denken.

Falls das Vektorfeld X zeitunabhängig ist, nennen wir die Differentialgleichung (2.3) *autonom*, und sonst *nichtautonom*.

Das direkte Produkt $\mathcal{M} \times J$ (Definitionsbereich von X) ist der *erweiterte Phasenraum*.

Ist $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{M}$ eine Integralkurve von X , so nennen wir die Punktmenge $\{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathcal{M}$ eine *Phasenbahn* (= Projektion des Graphen von γ auf den Phasenraum; vgl. Abb. 2.1).

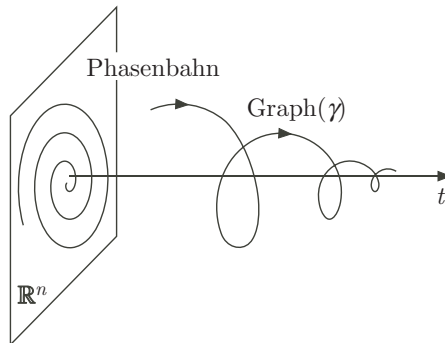


Abb. 2.1 Graph einer Integralkurve γ im erweiterten Phasenraum und zugehörige Phasenbahn (Projektion auf den Phasenraum).

Die qualitative Struktur aller Phasenbahnen, das *Phasenportrait* eines Vektorfeldes, lässt sich manchmal, vor allem in niedrigen Dimensionen, ohne große Rechnung finden. Beispiele werden wir kennenlernen. Etwa im zweidimensionalen autonomen Fall macht man zweckmäßig eine Skizze des Vektorfeldes, aus der sich die Phasenbahnen ablesen lassen (vgl. die Übungen).

An dieser Stelle bemerken wir noch, dass sich ein nichtautonomes System immer trivialerweise im erweiterten Phasenraum als autonomes System auffassen lässt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= X(x, t), \\ \dot{t} &= 1.\end{aligned}$$

Dies ist für gewisse Beweise manchmal nützlich.

Transformation eines Vektorfeldes unter einem Diffeomorphismus

Oft ist es nützlich, ein dynamisches System auf neue Koordinaten zu transformieren. Wir betrachten zunächst den autonomen Fall. Sei also

$$\psi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus von U auf V . (Ohne weitere Präzisierung bedeutet differenzierbar im Folgenden, der Einfachheit halber, immer C^∞ .) Wir definieren das

transformierte Vektorfeld ψ_*X derart, dass eine Integralkurve $\alpha(t)$ von X unter ψ immer in eine Integralkurve von ψ_*X übergeht, d. h. aus $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ soll folgen (vgl. Abb. 2.2)

$$\frac{d}{dt}\psi(\alpha(t)) = (\psi_*X)(\psi(\alpha(t))).$$

Nun ist nach der Kettenregel²

$$\frac{d}{dt}\psi(\alpha(t)) = D\psi(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = D\psi(\alpha(t)) \cdot X(\alpha(t)).$$

Deshalb definieren wir

$$(\psi_*X)(\psi(x)) := D\psi(x) \cdot X(x). \quad (2.6)$$

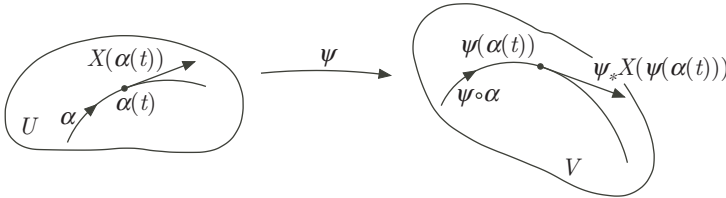


Abb. 2.2 Transformation eines Vektorfeldes X unter einem Diffeomorphismus ψ .

Im nichtautonomen Fall betrachten wir zeitabhängige Diffeomorphismen, d. h. differenzierbare Abbildungen $\psi : U \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, derart, dass für jedes $t \in I$ (I ist ein offenes Intervall) $\psi_t := \psi(\cdot, t)$ ein Diffeomorphismus von U nach V ist. Die Verallgemeinerung ist nun, damit Integralkurven durch die Transformation ψ wieder in Integralkurven übergehen, folgendermaßen zu wählen:

$$(\psi_*X)(\psi(x, t), t) = D\psi_t(x) \cdot X(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t). \quad (2.7)$$

Das Transformationsgesetz (2.7) kann man auch wie folgt interpretieren. Wir betrachten das Vektorfeld $\bar{X} = (X, 1)$ der autonomen Erweiterung im erweiterten Phasenraum. Ferner sei $\bar{\psi}(x, t) = (\psi(x, t), t)$ der zu ψ gehörige Diffeomorphismus im erweiterten Phasenraum. Dann hat das Vektorfeld \bar{Y} , definiert durch (vgl. (2.6))

$$\bar{Y}(\bar{\psi}(x, t)) := D\bar{\psi}(x, t)\bar{X}(x, t),$$

die Form $(\psi_*X, 1)$ und ist also die autonome Erweiterung von ψ_*X .

²Wichtige Begriffe, Sätze und Notationen aus der Analysis werden im Anhang A zusammengestellt.

Der folgende Satz ist zentral in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Er zeigt, dass in der Nähe eines nichtsingulären Punktes x_0 ($X(x_0) \neq 0$) die durch X beschriebene Strömung qualitativ sehr einfach ist.

Satz 2.1

Ein autonomes, differenzierbares Vektorfeld X ist in einer Umgebung jedes nicht-singulären Punktes diffeomorph zum konstanten Feld $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, d. h. es existiert ein lokaler Diffeomorphismus ψ mit $\psi_* X = e_1$.

Bemerkungen

- (i) Dieser Glättungssatz zeigt, dass qualitativ (d. h. bis auf diffeomorphe Abbildungen) die Strömung lokal dieselbe ist wie für das Gleichungssystem:

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_3 = \dots = \dot{y}_n = 0. \quad (2.8)$$

Die einzigen interessanten Fragen in der qualitativen Theorie der dyna-

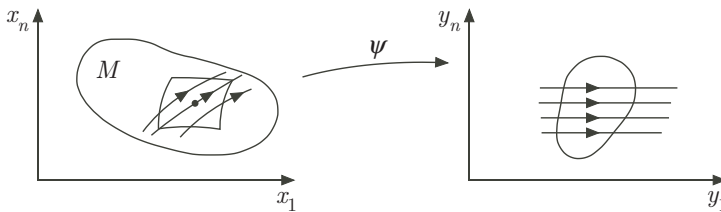


Abb. 2.3 Lokale Glättung eines Vektorfeldes außerhalb von kritischen Punkten.

mischen Systeme (2.3) betreffen deshalb das Verhalten der Strömung in der Nähe eines *Gleichgewichtspunktes* (oder singulären Punktes) x_0 , $X(x_0) = 0$, oder das globale *langzeitige Verhalten*. Gerade über Letzteres kann der Computer keine sichere Auskunft geben. Auf diesem Gebiet gibt es in neuerer Zeit interessante Entwicklungen. Die Gesamtheit der möglichen Bewegungen eines mechanischen Systems ist aber im Allgemeinen ungeheuer kompliziert, und selbst in einfachen Fällen ist man weit davon entfernt, eine vollständige Beschreibung geben zu können.

- (ii) der Glättungssatz 2.1 ist eigentlich der Hauptsatz der lokalen Theorie der Differentialgleichungen. Aus ihm werden wir insbesondere Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen in trivialer Weise erhalten, da man über das System (2.8) natürlich alles weiß. Es ist dies der einzige Satz, den wir in diesem Kapitel nicht beweisen. Für einen Beweis siehe Arnold (2001), Abschnitt 32 oder Amann (1995), S. 277 (Satz 19.1).

Wir ziehen jetzt einige Folgerungen aus dem Glättungssatz 2.1. Zunächst erhalten wir sofort die Existenz von Lösungen von (2.3) zu gegebenen Anfangswerten.

Korollar 2.2

Zu $x_0 \in \mathcal{M}$ gibt es eine Lösung $\alpha(t)$ von $\dot{x} = X(x)$ mit der Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = x_0$.

Beweis 2.2 Falls $X(x_0) = 0$, ist $\alpha(t) \equiv x_0$ ein Lösung. Ist $X(x_0) \neq 0$, so ist das Gleichungssystem (2.8) in einer Umgebung von x_0 äquivalent zur gegebenen Gleichung bezüglich einem Diffeomorphismus ψ . Das System (2.8) hat aber trivialerweise eine Lösung $\beta(t)$ mit $\beta(t_0) = y_0 := \psi(x_0)$. Deshalb ist $\alpha := \psi^{-1} \circ \beta$ eine Lösung von (2.3) mit der gewünschten Anfangsbedingung. \square

Korollar 2.3

Sind $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow \mathcal{M}$, $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow \mathcal{M}$ zwei Lösungen von $\dot{x} = X(x)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0, \quad X(x_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein Intervall I_3 mit $t_0 \in I_3$, auf welchem $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ ist.

Beweis 2.3 Dies ist trivialerweise wahr für das System (2.8), also auch für die lokal äquivalente Gleichung $\dot{x} = X(x)$. \square

Bemerkung Es wird sich zeigen, dass man die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ fallen lassen kann.

Lokale Flüsse

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Begriff. Es sei X ein autonomes Vektorfeld auf $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in \mathcal{M}$.

Definition 2.1

Unter einem *lokalen Fluss*, bestimmt durch das Vektorfeld X , in der Umgebung von x_0 verstehen wir ein Tripel (I, V_0, ϕ) , bestehend aus einem Intervall $I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon\}$ auf der t-Achse, einer Umgebung V_0 von x_0 und einer Abbildung $\phi : I \times V_0 \longrightarrow \mathcal{M}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Für festes $t \in I$ ist die Abbildung $\phi_t : V_0 \longrightarrow \mathcal{M}$, definiert durch $\phi_t(x) = \phi(x, t)$, ein Diffeomorphismus.
- (ii) Für festes $x \in V_0$ ist die Abbildung $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{M}$, definiert durch $\alpha(t) = \phi(x, t)$, eine Lösung von $\dot{x} = X(x)$ mit der Anfangsbedingung $\alpha(0) = x$.
- (iii) Es gilt (lokal)

$$\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{t+s}(x),$$

falls beide Seiten definiert sind. $[\phi_t]$ nennt man auch eine *lokale, 1-parametrische Gruppe von Diffeomorphismen*.]



Korollar 2.4

Das Vektorfeld X bestimmt einen lokalen Fluss in einer Umgebung jedes nichtsingularen Punktes.

Beweis 2.4 Dies gilt offensichtlich für (2.8), also nach Satz 2.1 auch für X . □

Bemerkung Es wird sich zeigen, dass die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ nicht nötig ist.

Nichtautonomer Fall

Wir betrachten jetzt den nichtautonomen Fall

$$\dot{x} = X(x, t), \quad (2.9)$$

wobei das Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definiert sei.

Korollar 2.5 (Rektifizierung für nicht autonome Systeme)

Zu jedem Punkt $(x_0, t_0) \in U$ existiert eine Umgebung V und ein Diffeomorphismus $\bar{\varphi} : V \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+1}$, welcher die Zeit nicht ändert, d. h. $\bar{\varphi}(x, t) = (\varphi(x, t), t)$, und unter welchem X in das Nullfeld transformiert wird:

$$\varphi_* X = 0.$$

Dies zeigt, dass (2.9) äquivalent zum System

$$\dot{y} = 0 \quad (2.10)$$

in W ist.

Beweis 2.5 Wir betrachten das erweiterte autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, t), \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned}$$

Satz 2.1 impliziert, dass ein Diffeomorphismus $\bar{\psi} : V \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ existiert mit

$$D\bar{\psi} \cdot \bar{X} = (0, 1), \quad \bar{X} := (X, 1).$$

[Beachte, dass \bar{X} keine kritischen Punkte hat.] Setzen wir

$$\bar{\psi}(x, t) = (\psi(x, t), f(x, t)),$$

so gilt insbesondere (für die n ersten Komponenten)

$$D_1 \psi \cdot X + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Sei jetzt $\bar{\varphi}(x, t) := (\psi(x, t), t)$, dann ist $\varphi_* X = 0$ und $\bar{\varphi}$ erfüllt die gewünschten Eigenschaften. □

Übung Leite aus Korollar 2.5 den Satz 2.1 ab.

Korollar 2.6

Für genügend kleine $|t - t_0|$ existiert eine Lösung $\alpha(t)$ von (2.9), welche die Anfangsbedingungen $\alpha(t_0) = x_0 \in U$ erfüllt.

Korollar 2.7

Zwei Lösungen von (2.9), welche dieselben Anfangsbedingungen erfüllen, stimmen auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche überein.

Beweis: Trivial!

Bemerkung Das Korollar 2.7 zeigt, dass wir im Korollar 2.3 die Einschränkung $X(x_0) \neq 0$ weglassen können.

Nun verallgemeinern wir den Begriff des lokalen Flusses auf den nichtautonomen Fall (s. Abb. 2.4).

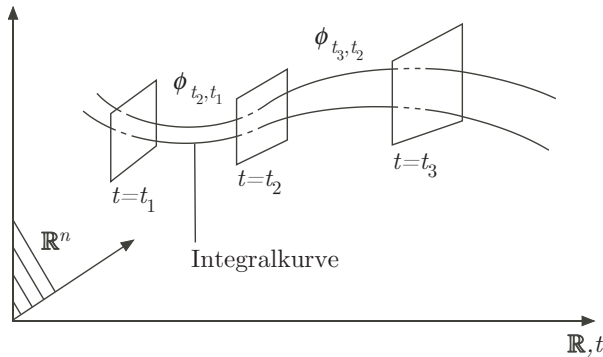


Abb. 2.4 Illustration einer 2-parametrischen Familie von Transformationen.

Definition 2.2

Unter einer *lokalen zweiparametrischen Familie von Transformationen*, bestimmt durch das Vektorfeld $X(x, t)$, in einer Umgebung eines Punktes (x_0, t_0) , verstehen wir ein Tripel (I, V_0, ϕ) , bestehend aus einem Intervall I der reellen Achse, welches t_0 enthält, einer Umgebung V_0 von x_0 im Phasenraum und einer Abbildung

$$\phi : V_0 \times I \times I \longrightarrow U \quad (= \text{Definitionsbereich von } X)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für feste $t_1, t_2 \in I$ ist die Abbildung $\phi_{t_2, t_1} : V_0 \times \{t_1\} \longrightarrow U$, definiert durch $\phi_{t_2, t_1}(x) = \phi(x, t_2, t_1)$, ein Diffeomorphismus mit Bild in der Ebene $t = t_2$.
- (ii) Für feste $x \in V_0, t_1 \in I$ ist $t \mapsto \gamma(t)$, definiert durch $t \mapsto \phi(x, t, t_1) =: (\gamma(t), t)$, eine Lösung von (2.9) mit Anfangsbedingungen $\gamma(t_1) = x$.

(iii) Lokal gilt

$$\phi_{t_3, t_2} \circ \phi_{t_2, t_1} = \phi_{t_3, t_1}.$$

◆

Korollar 2.8

Das Vektorfeld $X(x, t)$ bestimmt in einer Umgebung jedes Punktes (x_0, t_0) eine lokale zweiparametrische Familie von Transformationen.

Beweis 2.8 Triviale Folge von Korollar 2.5. □

Bemerkungen

- (i) Falls wir jede Ebene $t = \text{const}$ im erweiterten Phasenraum mit dem Phasenraum identifizieren, können wir $\phi_{t,s}$ als lokalen Diffeomorphismus des Phasenraumes auffassen. Ist speziell X autonom, so hängt $\phi_{t,s}$ nur von der Differenz $(t - s)$ ab, und es ist $\phi_{t,s} = \phi_{t-s} = \text{lokaler Fluss zu } X$. [Dies folgt aus dem Eindeutigkeitssatz und der Tatsache, dass für eine Lösung $\alpha(t)$ der autonomen Gleichung auch $\alpha(t + c)$ eine Lösung ist.]
- (ii) Korollar 2.8 enthält Korollar 2.4 als Spezialfall, aber *ohne* die Einschränkung $X(x) \neq 0$.

Erste Integrale

Wir betrachten zuerst wieder den autonomen Fall

$$X : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Definition 2.3

Eine Funktion $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein *Integral* der Differentialgleichung

$$\dot{x} = X(x),$$

falls für jede Lösung $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{M}$ die Funktion $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist. ◆

Dies ist äquivalent zu

$$D_X f = 0,$$

wo D_X die Richtungsableitung bezeichnet, denn $0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = Df(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = Df(\gamma(t)) \cdot X(\gamma(t)) = D_X f$.

Beispiel 2.3

Die zehn Erhaltungssätze in 1.4 für ein abgeschlossenes N-Körperproblem. ■

Theoretische Mechanik

Ein Grundkurs über klassische Mechanik endlich vieler
Freiheitsgrade

Straumann, N.

2015, XII, 429 S. 250 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-43690-5