

Meine Methoden sind Arbeits- und Auffassungsmethoden, und daher anonym überall eingedrungen. (Noether an Hasse 12. 11. 1931)

Als Noether 1931 diesen Satz an Hasse schrieb (Abb. 2.1), war sie als Mathematikerin etabliert und ihre Forschung anerkannt. Auch wenn sie sich beruflich in einer marginalisierten Position befand, so hatten doch zahlreiche Mathematiker/innen bei ihr studiert und ihr mathematisches Handwerkszeug bei ihr gelernt. Was aber waren ihre Auffassungen von Mathematik, und was waren ihre Methoden? Mit der tradierten, etwa durch Weyls Nachruf eingeübten Fokussierung der Analyse ihres mathematischen Wirkens auf die Algebra als Forschungsgebiet und der Axiomatik als methodischem Ansatz<sup>1</sup> geht eine Einengung einher, die den Blick für andere Lesarten verstellt. Mit einer aus dem Zitat abgeleiteten Untersuchungsstruktur von Auffassung und Arbeitsmethode, kurz Methode, ist es möglich, zu einem tieferen Verständnis der Arbeiten Noethers zu gelangen, ihr Wirken als Lehrende genauer in den Blick zu nehmen und die Anonymität ihres Einflusses aufzuheben.

„Begriffliche Mathematik“ nannte Alexandroff in seiner Gedenkrede zu Ehren Noethers im September 1935 die von ihr vertretene Auffassung (Alexandroff 1936a, S. 101). Diese Benennung lässt sich nur bei Alexandroff finden, in anderen zeitgenössischen Dokumenten wird von begrifflichem Verständnis oder begrifflicher Methode gesprochen.<sup>2</sup> Noch in heutigen Publikationen finden sich zur Charakterisierung der Mathematik Noethers zumeist die Worte *abstrakt*, *modern* oder *axiomatisch*, doch sind diese Bezeichnungen sowohl wegen der Unschärfe ihrer Bedeutungen als auch der mit ihnen verbundenen Positionierung in einem metamathematischen Diskurs und den sich daraus ergebenden Konnotationen problematisch und für eine genauere Analyse der Arbeits- und Forschungstätig-

<sup>1</sup> Vgl. Weyl 1935, S. 214.

<sup>2</sup> So ist etwa in der im ersten Kapitel zitierten Petition ihrer Studierenden und Doktorand/inn/en von der „begrifflich inhaltlichen Methode“ Noethers die Rede (Bannow et al. 1933).

legung der Norm-Normierung im obigen Fall anzuwenden. Sie haben  
 es damals unvorsichtlich noch nicht ganz mitgeteilt, und es ist Ihnen  
 selbst nicht überlegt. Gernut gemacht haben Sie es aber schon in  
 Hilden gesagt, dass die Formulierung der „Gegensatzpaartheorie“ im  
 Minimum.

Weiter meine ich, bei Satz 3 - den ich im Vorhinein nicht mitteilen kann,  
 und für den Sie aber das Richt. Brauer und ich eine Vorüberlegung finden  
 werden - sollten Sie sich nicht als Verfasser ausgeben; und den Satz nicht  
 als „Folgerung“, sondern als „Lehrsatz“ einer bekannten Scher-  
 pen Normierung bezeichnen. Ich war sehr immer mit dem Gedanken, dass  
 Sie sich nicht mehr überlegen, aber Gedächtnislosigkeit. Beim Lesen dieses  
 Sie hat Sie zuerst die Ihre Kritik an der Begründung der Normierung  
 in der Natur der Sache zu dieser Theorie liegen gesehen, aber nicht bemerkt,  
 dass Sie so einfach zu bezeichnen ist.

Das wäre der „Gegensatz“. Wenn wir nun zwei Normierungen  
 p. 5 ist die „verallgemeinerte Diskriminante“ als „verallgemeinerte Norm be-  
 zeichnen“ zu definieren (denn  $N(\pi) = p$ ; also  $N(\pi^{n-1}) = N(\pi) = p$  bezieht sich auf  
 verallgemeinerte Normen); die verallgemeinerte Norm hat zwei dieselben Eigenschaften  
 wie die verallgemeinerte Diskriminante, nämlich aber nicht nur diese auf und ab.

Möchten Sie nicht die „normale Algebra“ (im letzten Absatz) per folien-  
 tierung für den nächsten Tag mitbringen: sowohl die Folien.

Dann Hoffentlich: p. 4, siehe Seite 11. Satz III, (III. Satz)  
 p. 5 müssen die Annahmen 5), 6) sein (Satz 4, 5).

Mit der Unterstützung von Heide Sie ist selbstverständlich ein-  
 verständlich. Meine Methoden sind bekannt - sind Auffassungsmen-  
 ften, und diese müssen überall anzuwenden.

Angenehme Grüße von  
 Emmy Noether.

**Abb. 2.1** Auszug aus einem Brief Noethers an Hasse vom 12. November 1931 im Zusammenhang mit dem Beweis des Hasse-Brauer-Noether-Theorems

keit Noethers wenig hilfreich. Das Wort *begrifflich* ist in der Mathematik anders als bei-  
 spielsweise in der Philosophie relativ unbelastet von theoretischen Auseinandersetzungen,  
 vermutlich, da es auch nach seiner Prägung durch Alexandroff kaum Verwendung fand,  
 ein Umstand, der sich für mein Vorhaben als Vorteil erweist.

Zunächst ist zu zeigen, dass sich diese Charakterisierung der Auffassungen und Methoden Noethers aus ihren eigenen Arbeiten speist, und mit Hilfe eines Zeitgenossen Noethers, des Philosophen Cassirers, von außen einen Blick auf die begriffliche Auffassung Noethers zu werfen. Der zweite Teil führt in die mathematischen Details, ohne sich darin zu verlieren, sondern vielmehr, Noethers Publikationen gegen den mathematischen Strich lesend, ihren spezifischen Umgang mit Begriffen, ihre Art der Begriffsbestimmung und deren Nutzung in der Gewinnung mathematischer Erkenntnisse herauszudestillieren. Auf diesen Ergebnissen aufbauend lässt sich die begriffliche Mathematik als ein diskursives Vorhaben erkennen, dessen zentrale Elemente das Denken in Begriffen und die Dialogizität der Texte sind. Welche Leistungsfähigkeit Noether ihrer Auffassung und Methodik zuschreibt und wie sie sich damit zugleich zu den Bewertungskriterien für gute Mathematik *fruchtbar* und *tiefliegend* verhält, wird im vierten Unterkapitel dargestellt. Im letzten Teil werden die Veränderungen im mathematischen Schreiben Noethers untersucht, das sich von der Betonung des Begrifflichen als einem produktiven Zugang zur Mathematik hin zur Hervorhebung des Strukturellen als zentralem Forschungsgegenstand verschiebt.

---

## 2.1 Zur begrifflichen Auffassung

Noether schrieb 1921 in der „Idealtheorie in Ringbereichen“:

Die vorliegenden Untersuchungen stellen eine starke Verallgemeinerung und Weiterentwicklung der diesen beiden Arbeiten zugrundeliegenden Begriffsbildungen dar. (Noether 1921, S. 28)

Mit diesem unspektakulär wirkenden Satz legte Noether die ihre zukünftige Arbeit bestimmenden Auffassungen und Methoden dar. Sich auf die unter Noethers Anleitung geschriebene Habilitation Schmeidlers (Schmeidler 1919) und die gemeinsame Arbeit zu „Moduln in nichtkommutativen Bereichen“ (Noether und Schmeidler 1920) beziehend und zugleich davon abgrenzend wird die neue Forschungsperspektive formuliert. Begriffsbildungen sind wie in den vorhergehenden Arbeiten grundlegend für die gesamte Untersuchung, ihre Bedeutung aber ist gewachsen und qualitativ anders als zuvor. Es wird mit ihnen auf zweifache Weise gearbeitet: „Starke Verallgemeinerung“ der Begriffe und eine präzise Bestimmung des Begriffsumfangs sind das Ziel mathematischen Handelns geworden. Damit sind Begriffe selbst zu Forschungsgegenständen geworden, die durch begriffliche „Weiterentwicklung“ zu untersuchen sind. Für Noether sind Begriffe zugleich Untersuchungsgegenstand und Werkzeug. Mit dieser Auffassung hebt sie sich deutlich von Dedekind ab, dessen inspirative Bedeutung für Noether im vorhergehenden Kapitel angerissen wurde. In seinem Aufsatz „Das Skelett der modernen Algebra. Zur Bildung mathematischer Begriffe bei Richard Dedekind“ schreibt Herbert Mehrstens:

Es ist die intensive Bemühung um die begrifflich-strukturelle Klärung der mathematischen Gegenstände, die Dedekind und E. Noether verbindet. ... Zugrunde liegt die Behauptung,

daß darin der Kern von Dedekinds Beitrag zur Entstehung der modernen Mathematik im Allgemeinen und der modernen Algebra im Besonderen liegt. ... Es geht vielmehr darum, die starke methodische Orientierung Dedekinds nachzuweisen und ihre inhaltliche Auswirkung in der Bildung gewisser neuer Begriffe zu zeigen. (Mehrtens 1979, S. 26)

Doch ist Dedekinds Umgang mit Begriffen eher als instrumentell, Mehrtens spricht von methodischer Orientierung, zu charakterisieren. Die von ihm entwickelten algebraischen Begriffe wie *Körper*, *Ordnung* und *Ideal* sind Werkzeuge und nicht Objekte seiner Forschung.

Die programmatische Lesart des oben zitierten Satzes wird durch den Titel ihrer Publikation und die ersten Seiten der Einleitung bereits vorbereitet. Ginge es um die mathematischen Aussagen der Untersuchung, könnte der Titel der Veröffentlichung auch „Zerlegungssätze von Idealen“ lauten, doch Noether ging es um etwas Allgemeineres und nicht um die Zerlegungssätze. Mit *Theorie* und *Bereiche* ist ihr Vorhaben beschrieben: Eine mathematische Theorie, eine Sammlung von Aussagen, nicht durch einen konkret bezeichneten Geltungsbereich wie etwa den der natürlichen Zahlen beschränkt, sondern in allgemeiner Form wird betrachtet. Hierzu ist eine präzise Bestimmung der für die Untersuchung relevanten Begriffe wie etwa *Ideal*, aber ebenso der Attribute wie *relativprim* notwendig. Diese Begriffsklärung führt bis zu der Frage, wie Begriffe im Kontext einer Untersuchung bestimmt sein müssen, ohne unscharf im Sinne eines seine Schärfe verlierenden Werkzeugs zu werden. In diesem Sinne werden Begriffe in ihrer Tiefe und in ihrer Reichweite vollständig ausgelotet.

Bereits in früheren Arbeiten gibt es einzelne Hinweise darauf, dass die Arbeit mit Begriffen aus Noethers Perspektive ein zentrales Element mathematischen Tuns ist. „Rein begrifflich“ findet sich bereits 1919 als Bewertung von mathematischen Ergebnissen in ihrem Antrag auf Habilitation (Personalakte Noether). Mit der zwei Jahre später publizierten „Idealtheorie in Ringbereichen“ aber wurde das Arbeiten mit Begriffen als Untersuchungsgegenstand und als Werkzeug zentral und auch in ihren weiteren Veröffentlichungen betonte Noether verstärkt die Bedeutung begrifflichen Arbeitens: So ist von „begrifflicher Deutung“ als Ziel die Rede (Noether 1923, S. 53); es werden „Grundbegriffe“ zusammengestellt (Noether 1926, S. 229); „vermöge“ Neubestimmter Begriffe können Beweise vereinfacht werden (Noether 1927, S. 27); Begriffe bilden die „Grundlage der Untersuchung“ (Noether 1929, S. 641). Diese oft in Nebensätzen oder prädikativen Einschüben formulierte Einforderung begrifflichen Arbeitens erscheint in ihrer Gesamtheit wie eine parallel zur mathematischen Forschung laufende theoretische Diskussion über die Relevanz begrifflicher Auffassung und Methoden für die Mathematik. Wurde die begriffliche Mathematik mit der „Idealtheorie in Ringbereichen“ proklamiert, so war es im Laufe der 1920er Jahre Noethers Anliegen, deren Bedeutsamkeit und Produktivität für die Mathematik insgesamt zu erweisen.

Noether setzte Begriffe in den Mittelpunkt mathematischen Arbeitens. Will man zu einem allgemeinen Verständnis ihrer Auffassung, was Begriffe sind, gelangen und damit deren Bedeutung für die Mathematik erfassen, so ist die Auseinandersetzung mit einem

von außen auf die Wissenschaft Mathematik geworfenen Blick hilfreich.<sup>3</sup> Cassirer veröffentlichte 1910 das Buch „Substanzbegriff und Funktionsbegriff“:

Die neue Stellung, die die Philosophie der Gegenwart allmählich zu den Grundlagen des theoretischen Wissens gewinnt, bekundet sich nach außen hin vielleicht nirgends deutlicher als in der Umbildung, die die Hauptlehren der formalen Logik in ihr erfahren haben. In der Logik allein schien die philosophische Gedankenentwicklung endlich zu sicherem Halt gelangt zu sein. (Cassirer 1910, S. 3)

Cassirers Vorbild ist erklärtermaßen die Mathematik. Er spielt in seinem ersten Satz nicht nur auf den Philosophen Gottlob Frege an, sondern ebenso auf Dedekind und Hilbert sowie auf Bertrand Russell und den beginnenden Grundlagenstreit in der Mathematik. Cassirer ist in seiner Auseinandersetzung mit Mathematik ein Zeitzeuge, der die sich um die Jahrhundertwende abspielenden Veränderungen in mathematischen Auffassungen und Zugangsweisen aufmerksam verfolgte, dabei allerdings Teile der Mathematik, so etwa Dedekinds axiomatische Herleitung der Zahlen, für die Mathematik in ihrer Gesamtheit nahm, wie seine Ausführungen in dem Kapitel zum Zahlbegriff zeigen (ebenda, S. 46 ff.). Cassirers Charakterisierung mathematischer Begriffsbildungsprozesse beschreibt eine sich erst ab 1900 deutlich abzeichnende Veränderung in der Mathematik. Dedekinds Umgang mit Begriffen war noch Ende des 19. Jahrhunderts seinen mathematischen Zeitgenossen weitgehend unverständlich geblieben, die Rezeption seiner die Zahlentheorie reflektierenden Arbeiten begann erst mit Hilberts Publikation über algebraische Zahlkörper, auch „Zahlbericht“ genannt, von 1897,<sup>4</sup> seine aus heutiger Sicht algebraischen Begriffsbildungen erst 1909 mit Steinitz' Veröffentlichung zur Körpertheorie<sup>5</sup>.

Cassirers Auffassung über Mathematik spiegelt deren moderne Entwicklung wider, seine Kritik an der logischen Lehre vom Begriff geht von dieser modernen Mathematik aus und charakterisiert in ihrer Gegenrede zu traditionellen philosophischen Positionen zugleich den mathematischen Umgang mit Begriffen im 19. Jahrhundert. Substanzbegriff und Funktionsbegriff sind die sich gegenüberstehenden Positionen von Begriffsbildung und -bestimmung. Unter Substanzbegriff versteht Cassirer eine auf die Materialität von Dingen bezogene Art der Begriffsbildung:

Die logische Form der Begriffsbildung und der Definition kann nur im Hinblick auf diese Grundverhältnisse des Realen festgestellt werden. Die Bestimmung des Begriffs durch seine nächst höhere Gattung und durch die spezifische Differenz gibt den Fortschritt wieder, kraft dessen die reale Substanz sich successiv in ihrer besonderen Seinsweise entfaltet. ... Das

<sup>3</sup> Erste Überlegungen hierzu und zum dialogischen Schreiben Noethers sind in dem Vortrag „Möglichkeiten und Grenzen der Kategorie Geschlecht. Zur Dialogizität in den mathematischen Texten Emmy Noethers.“ vorgestellt worden (Koreuber, Krause 2003). Das Anliegen des gemeinsamen Arbeitens war es, das wissenschaftstheoretische Lesen von Texten Noethers mit einer mathematischen Lesart, vertreten durch den Algebraiker Henning Krause, zu kontrastieren.

<sup>4</sup> Vgl. Hilbert 1897.

<sup>5</sup> Vgl. Steinitz 1909.

vollständige System der wissenschaftlichen Definitionen wäre zugleich der vollständige Ausdruck der substantiellen Kräfte, die die Wirklichkeit beherrschen. (Ebenda, S. 9)

Begriffsbildung erfolgt, so Cassirer, durch den Bezug zur Substanz der realen Welt, auf der Basis „der Grundverhältnisse des Realen“ durch das Erkennen der Ähnlichkeit der realen Dinge und der Abstraktion von ihren Besonderheiten. Begriffsbildung und Begriffsdefinition in diesem substantiellen Sinne solle, so die Erwartungshaltung der Vertreter dieser ontologischen Auffassung, zu einer vollständigen wissenschaftlichen Beschreibung von Wirklichkeit führen. Cassirer kritisiert diese Annahme und schreibt:

Die herkömmliche Vorschrift für die Bildung der Gattungsbegriffe aber enthält in sich keinerlei Gewähr, dass dieses Ziel wahrhaft erreicht wird. In der Tat verbürgt uns nichts, dass die gemeinsamen Merkmale, die wir aus einem beliebigen Komplex von Objekten herausheben, auch die eigentlich charakteristischen Züge enthalten, die die Gesamtstruktur der Glieder des Komplexes beherrschen und nach sich bestimmen. (Ebenda, S. 8) (Hervorhebung i. O.)

Cassirers Gegenentwurf ist der Funktionsbegriff, den er in folgender Weise entwickelt:

In den Definitionen der reinen Mathematik aber ist ... die Welt der sinnlichen Dinge und Vorstellungen nicht sowohl wiedergegeben, als vielmehr umgestaltet und durch eine andersartige Ordnung ersetzt. Verfolgt man die Art und Weise dieser Umbildung, so heben sich hierbei bestimmte Formen der Beziehung, so hebt sich ein gegliedertes System streng unterschiedener gedanklicher Funktionen heraus, die durch das einförmige Schema der ‚Abstraktion‘ nicht bezeichnet, geschweige begründet werden. (Ebenda, S. 18)

Wenige Seiten zuvor skizziert er bereits sein durch die Mathematik inspiriertes Verständnis dieses Gliederungssystems:

Der bloßen ‚Abstraktion‘ tritt daher hier ein eigener Akt des Denkens, eine freie Produktion bestimmter Relationszusammenhänge gegenüber. (Ebenda, S. 15)

Es geht also um Begriffsbildungsprozesse, die nicht als Abstraktion von etwas Realem, mit Substanz Versehenem, sondern als gedankliche Konstruktionen zu beschreiben sind. Cassirers Analyse erlaubt, Noethers Umgang mit Begriffen als „freie Produktion bestimmter Relationszusammenhänge“ zu erkennen. Ihre Begriffe sind Gedankenkonstrukte, die die Rückbindung an die Substanz, an die Alltagsvertrautheit etwa mit den natürlichen Zahlen, die diese ontologische Einbindung in die Welt nicht benötigen und auch nicht bekommen werden. Mit Begriffen wird hier die Ähnlichkeit von Dingen erst hergestellt, sie sind das Benennen von Beziehungen zwischen Dingen in einem funktionalen, nicht in einem substantiellen Sinne. Für Cassirer ist die mathematische Begriffsbildung die wissenschaftlich wahre:<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Cassirer setzt auch hier, indem er sich u. a. auf die zahlentheoretischen Konzepte Giuseppe Peanos und Dedekinds bezog, moderne Entwicklungen in der Mathematik mit Mathematik in ihrer Gesamtheit gleich.



Gegen eine derartige Konsequenz aber schützt wiederum die Betrachtung derjenigen Wissenschaft, in welche die Schärfe und Klarheit der Begriffsbildung ihre höchste Stufe erreicht. In der Tat scheidet sich an diesem Punkt aufs deutlichste der mathematische Begriff vom ontologischen Begriff. (Ebenda, S. 24) (Hervorhebung i. O.)

Die Mathematik ist Cassirers Vorbild für eine von Fragen nach der Substanz befreite und deshalb umso präzisere Art der Begriffsbestimmung. Eine Begriffsbildung, die sich an Substanz, Realität, an Vertrautheit mit der Welt bindet und die Begriffe dadurch zu gewinnen sucht, dass die Ähnlichkeit von Objekten benannt und von den jeweiligen Besonderheiten abstrahiert wird, ist aus Cassirers Sicht für wissenschaftliche Begriffe unzureichend. Ähnlich lässt sich auch Noethers Gegenhorizont beschreiben, wenngleich sie auch ein an Substanz orientiertes Vorgehen wie etwa das symbolische Rechnen – ihre Doktorarbeit zeigt dies deutlich – exzellent beherrschte.

Cassirers Bewertung mathematischer Begriffsbildungsprozesse kann als Beschreibung einer Entwicklung von Dedekind zu Noether gelesen werden. Dedekinds Ansatz war methodologischer Natur, und er äußerte sich in seinen mathematischen Publikationen wiederholt zu Fragen des methodischen Vorgehens in der Mathematik. Bereits in seinem Habilitationsvortrag „Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik“ sprach er über die Bedeutung von Begriffen:

Die Einführung eines solchen Begriffs, als eines Motivs für die Gestaltung des Systems, ist gewissermaßen eine Hypothese, welche man an die innere Natur der Wissenschaft stellt; erst im weiteren Verlauf antwortet sie auf dieselbe; die größere oder geringere Wirksamkeit eines solchen Begriffs bestimmt seinen Wert oder Unwert. ... Diese Wahrheiten wirken aber selbst wieder auf die Bildung der Definition zurück. (Dedekind 1854, S. 429 f.)

Für Dedekind hatten Begriffe den Zweck, als Untersuchungsmittel zu fungieren, wenn es darum geht, die innere Natur eines Gegenstandes oder allgemeine Wahrheiten zu erkennen. Er trennte zwischen dem vom Wissenschaftler geschaffenen Begriff als einem Instrument zur Untersuchung und dem Untersuchungsgegenstand selbst:

So zeigt sich wohl, dass die aus irgend einem Motiv eingeführten Begriffe, weil sie anfangs zu beschränkt oder zu weit gefaßt waren, eine Abänderung bedürfen, um ihre Wirksamkeit, ihre Tragweite auf ein größeres Gebiet erstrecken zu können. Dieses Drehen und Wenden der Definitionen, den aufgefundenen Gesetzen oder Wahrheiten zuliebe, in denen sie eine Rolle spielen, bildet die größte Kunst des Systematikers. (Ebenda, S. 430)

Für Dedekind hatten Begriffe den Zweck, als Untersuchungsmittel zu fungieren, wenn es darum geht, die innere Natur eines Gegenstandes oder allgemeine Wahrheiten zu erkennen. Er trennte zwischen dem vom Wissenschaftler geschaffenen Begriff als einem Instrument zur Untersuchung und dem Untersuchungsgegenstand selbst (Dedekind 1863–94).<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Auf die Entwicklung der mathematischen Bezeichnung Ideal als einem von Dedekind geschaffenen Begriff wird im fünften Kapitel in einem historischen Exkurs ausführlicher eingegangen werden.

In diesem Zeitraum erschien auch seine umfangreiche Erörterung „Was sind und was sollen die Zahlen?“, in denen Dedekind sich zu seinem Verständnis zahlentheoretischer Forschung äußerte:

Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen. ... Aber ich weiß sehr wohl, dass gar mancher in den schattenhaften Gestalten, die ich ihm vorführe, seine Zahlen, die ihn als treue und vertraute Freunde durch das ganze Leben begleitet haben, kaum wieder erkennen mag. (Dedekind 1888, S. 335)

Die Nähe Noethers zu diesem Verständnis von Mathematik ist unverkennbar, doch ging es ihr um die Begriffe. Noethers Auffassung von und Umgang mit Begriffen ist, ganz im Sinne von Cassirers Funktionsbegriff, eine – im ontologischen Sinne – „freie Produktion bestimmter Relationszusammenhänge“ (Cassirer 1910, S. 15). Ein Rückgriff auf die Substanz, die konkreten Elemente wird nicht nur nicht benötigt, sondern ist zur Herstellung des Begriffszusammenhangs hinderlich. Die so hergeleiteten Begriffe ermöglichen in neuer Perspektive die Untersuchungen des Besonderen, und in diesem Verständnis erhalten auch die Beispiele eine andere Rolle, verlieren ihre motivierende Funktion, ein Aspekt begrifflichen Arbeitens, der an anderer Stelle noch zu vertiefen ist. Cassirer schreibt:

Der exakte Begriff läßt die Eigentümlichkeiten und die Besonderheiten der Inhalte, die er unter sich faßt, nicht achtlos beiseite, sondern er sucht das Auftreten und den Zusammenhang eben dieser Besonderheiten als notwendig zu erweisen. Was er gibt, ist eine universelle Regel für die Verknüpfungen des Besonderen selbst. (Ebenda, S. 25)

Begriffe sind nicht ontologisch begründet, sondern Beziehungen, die erst die Ähnlichkeit der Dinge herstellen. Sie sind nicht Abstraktionen von untersuchten Gegenständen wie etwa den ganzen rationalen Zahlen; sie sind abstrakt, weil sie nicht darauf angewiesen sind, sich bezogen auf irgendeine Substanz zu erklären. Cassirer formuliert:

Diese Bestimmtheit kann immer nur in einem synthetischen Akt der Definition, nicht in einer einfachen Anschauung, ihren Ausdruck finden. (Ebenda, S. 34)

Nach diesen Vorüberlegungen wird deutlich, dass diese Auffassung, wenn auch nicht expliziert, dem ersten Satz der Einleitung der „Idealtheorie in Ringbereichen“ und damit der gesamten Arbeit zugrunde liegt:

Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen*. (Noether 1921, S. 25) (Hervorhebung i. O.)

Noethers Vorgehen beinhaltete Umgestaltung und Perspektivwechsel, das wird bereits mit diesem Satz deutlich. Scheint es sich zunächst um eine Formulierung des behandelten mathematischen Problems zu handeln oder präziser seine Herstellung, so wird zugleich



mit dem Wort „Übertragung“ auch die Methode genannt. Scheint es also zunächst eine algebraische Fragestellung zu sein, so wird beim zweiten Lesen deutlich, dass Noether mit dieser Arbeit auch ein methodisches Konzept vorstellte. Und zwischen welchen Dingen sollte die Übertragung ermöglicht und nachgewiesen werden? Es handelt sich nicht um Übertragungen zwischen qualitativ Gleichem, wie es die im ersten Teil angedeutete Verschiebung der Zerlegungssätze von dem Bereich der ganzen Zahlen in den Bereich der algebraischen Zahlkörper ist, die nur eine Verallgemeinerung oder „Abstraktion von“ bedeutet. Die Perspektive verändert sich. Um die Begriffe selbst, hier Ideal und Ring, soll es gehen; gedankliche Konstruktionen, nicht konkrete Zahlen werden in den Blick genommen. Wurden bisher in mathematischen Publikationen die Zerlegungssätze für konkret gegebene Elemente betrachtet, lag also der Ausgangspunkt bei den Eigenschaften z. B. der ganzen rationalen Zahlen, so nahm Noether nun genau die entgegengesetzte Sicht ein: Ihr Ausgangspunkt waren allgemeine Ringbereiche und sie betrachtete in diesen die Eigenschaften bestimmter Ideale, losgelöst von den spezifischen Eigenschaften der in dem einen oder anderen Fall die Ideale bildenden Elemente. Damit werden die Zerlegungssätze für ganze rationale Zahlen im Cassirer'schen Sinne „Besonderheiten der Inhalte“, deren „Auftreten und Zusammenhang eben dieser Besonderheiten“ sich gemäß den Begriffen Ideal und Ring „als notwendig“ (Cassirer 1910, S. 25) erweist. Noch deutlicher wird diese Auffassung Noethers wenige Seiten weiter in der den Ring definierenden Formulierung:

Der zugrundegelegte Bereich  $\Sigma$  sei ein (kommutativer) *Ring* in abstrakter Definition; ... Der Ring und diese sonst ganz willkürlichen Operationen müssen den folgenden Gesetzen genügen:

1. Dem assoziativen Gesetz der Addition:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
2. Dem kommutativen Gesetz der Addition:  $a + b = b + a$ .
3. Dem assoziativen Gesetz der Multiplikation:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
4. Dem kommutativen Gesetz der Multiplikation:  $a \cdot b = b \cdot a$ .
5. Dem distributiven Gesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
6. Dem Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion. (Noether 1921, S. 29) (Hervorhebung i. O.)

Mit den Worten „abstrakter Definition“ und „willkürlichen Operationen“ wird betont, dass jeder Bezug auf etwas Konkretes, Vertrautes, auf ein mit Substanz behaftetes Ding nicht gedacht wird und nicht gedacht werden soll.<sup>8</sup> Über ein solches Vorgehen schreibt Cassirer:

Die mathematischen Begriffe, die durch genetische Definition, durch die gedankliche Feststellung eines konstruktiven Zusammenhangs entstehen, scheiden sich von den empirischen, die lediglich die Nachbildung irgendwelcher tatsächlicher Züge in der gegebenen Wirklichkeit der Dinge sein wollen. Wenn im letzteren Falle die Mannigfaltigkeit der Dinge an und für sich vorhanden ist und nur auf einen abgekürzten, sprachlichen oder begrifflichen Ausdruck zusammengezogen werden soll, so handelt es sich im ersteren umgekehrt darum, die

<sup>8</sup> Die Definition geht auf Fraenkels Habilitationsschrift (vgl. Fraenkel 1916, S. 143) zurück und wurde von Noether abstrakt formuliert. Bedenkt man, dass Fraenkel einer der Begründer der abstrakten Mengenlehre war, so zeigt sich die Nähe dieser Denkrichtungen.

Mannigfaltigkeit, die den Gegenstand der Betrachtung bildet, erst zu schaffen, indem aus einem einfachen Akt der Setzung durch fortgeschrittene Synthese eine systematische Verknüpfung von Denkgebilden hervorgebracht wird. (Cassirer 1910, S. 15) (Hervorhebung i. O.)

Wird also ein Begriff aus ontologischer Sicht durch Abstraktion aus der Mannigfaltigkeit seiner Daseinsformen gewonnen, so entsteht der mathematische Begriff als „gedankliche Feststellung eines konstruktiven Zusammenhangs“, als Definition vermittelt abstrakter Beschreibung der Eigenschaften von Elementen und Mengen, die Noether im obigen Beispiel Gesetze nennt. Die Dinge aber, die mit diesem Begriff erfasst werden, sind durch ihn zugleich geschaffen. Cassirer kommentiert dieses Vorgehen:

Nur darin besteht der Unterschied der ontologischen und der psychologischen Betrachtungsweise, dass die ‚Dinge‘ der Scholastik das im Denken abgebildete Seiende bedeuten, während die Gegenstände, von denen hier die Rede ist, nicht mehr seien wollen als Vorstellungsinhalte. (Ebenda, S. 14)

Den Begriff als Zusammenhang zu fassen, der vorgestellt ist und qua Konstruktion hergestellt und nicht aus einer wie auch immer vertrauten Wirklichkeit abgeleitet wird, ist die in diesen Überlegungen enthaltene Auffassung. Dieses Verständnis von Begriffen, das in der „Idealtheorie in Ringbereichen“ das erste Mal in aller Deutlichkeit erkennbar ist, bestimmt Noethers gesamtes weiteres mathematisches Werk. Und es ging nicht nur um die abstrakt formulierten Begriffe, sondern auch um die Zusammenhänge zwischen ihnen. So wurden die Zusammenhänge zwischen den konstruierten Objekten, den Idealen, durch die Zerlegungssätze gefasst, die Zusammenhänge zwischen den Begriffen in der Betrachtung der Verallgemeinerung von Integritäts- zu Ringbereichen. Auch hierauf wird durch den ersten Satz der Einleitung der Blick gelenkt; die Beziehung zwischen den Begriffen wird den durch die Formulierung der „Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen“ in den Untersuchungsfokus gestellt. Dieses begrifflich zu bestimmende Verhältnis von Idealen zu Integritäts- oder Ringbereichen ist eine der Forschungsfragen ebenso wie die Beziehungen der Ideale untereinander. Explizit formulierte Noether:

Auch der Zusammenhang zwischen primärem Ideal – auch die irreduziblen Ideale sind primär – und zugehörigem Primideal bleibt erhalten. (Noether 1921, S. 26)

Derartige Zusammenhänge präzise zu bestimmen und begrifflich zu fassen, ist Teil des Vorhabens *begriffliche Mathematik*. Begriffsbildungen als Herstellung von Zusammenhängen zwischen Begriffen thematisierte Cassirer in seiner Arbeit von 1910 nicht, und seine Analyse mathematischer Begriffsbildungsprozesse nahm die begriffliche Auffassung Noethers nicht vorweg. Begriffe als Konstruktionszusammenhänge und in einem Netz von begrifflich gefassten Zusammenhängen zwischen Begriffen zu betrachten, beschreibt Noethers „Auffassungsmethoden“. Diese Gedanken gilt es im mathematischen Detail zu verfolgen und ihre „Arbeitsmethoden“ zu bestimmen.

Emmy Noether, die Noether-Schule und die moderne  
Algebra

Zur Geschichte einer kulturellen Bewegung

Koreuber, M.

2015, XV, 368 S. 25 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-44149-7