

# 1

## Gebrauchsanleitung

Ein einführendes Wort zur *mathematischen Sprache*, welche manchmal etwas seltsam anmuten mag, jedoch durch ihre Präzision eine große Hilfe im Umgang mit Mathematik und manchmal sogar im täglichen Leben sein kann. Zum Beispiel sagen Menschen, die sich mit Mathematik beschäftigen, vielleicht:

*Es existiert genau eine gerade Primzahl,*

was nicht nur bedeutet, dass *es eine gerade Primzahl gibt*, sondern zusätzlich auch, dass es nicht zwei oder drei oder noch mehr solcher Primzahlen gibt – also *genau eine solche existiert*. Aber es mag noch mehr ungewohnt sein: Während *Schulmathematik* oft beispielhaft bleibt (und wohl auch meistens sein sollte), ist *Hochschulmathematik wissenschaftlich*. Die Darstellung mathematischer Theorien erfolgt nach einem strengen Muster (Definition – Satz – Beweis), das sich seit seiner Entstehung im Laufe der Jahrhunderte als äußerst effektiv erwiesen hat, wenngleich die meisten Mathematikstudierenden diese wissenschaftliche Methode zu Beginn erst gewöhnungsbedürftig empfinden mögen, bevor sie diese letztlich Wert schätzen lernen.

Auch davon handelt dieses Buch. . .

Das Erlernen dieser *Sprechweise* ist nicht ganz unähnlich dem einer Fremdsprache. Hier helfen Geduld und Aufgeschlossenheit, jedoch wird im Umgang mit Mathematik auch die *Denkweise* gefordert und gefördert: Hier sind Konzentration, Wissensdurst und Neugier, Kreativität und Fantasie unerlässlich. Wir verschweigen nicht, dass ebenso Begabung für die zu erklimmenden Gipfel der Mathematik notwendig ist! Und bevor nun der Leser oder die Leserin bei dieser Aufzählung von notwendigen Tugenden vor der eigentlichen Lektüre an sich zu zweifeln beginnt, die richtige Wahl beim Erwerb dieses Buches getätigt zu haben, sei noch erwähnt, dass letztlich erst das Praktizieren von Mathematik Aufschluss darüber gibt, ob sich eine *Freude an der Mathematik* einstellt. Aus diesem Grund haben wir eine Vielzahl von Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades eingebaut:

## Mathematik ist kein Zuschauersport!

Von den zahlreichen Übungsaufgaben werden die mit einem \* gekennzeichneten skizzenhaft im abschließenden Kapitel gelöst; die Details bleiben natürlich der Leserin oder dem Leser zur weiteren Übung selbst überlassen!

Humor hilft wie bei vielen Dingen sicherlich auch beim Erlernen dieser mathematischen Denk- und Sprechweise. Ohne weiteren Kommentar ein dies illustrierender Witz:

Ein Physiker, eine Mathematikerin und ein Informatiker fahren im Zug durch Schottland. Sie schauen aus dem Fenster und sehen, wie ein schwarzes Schaf auf einer Weide grast. Der Informatiker schlussfolgert: *„Alle Schafe in Schottland sind schwarz.“* Der Physiker verbessert: *„Das ist nicht ganz korrekt. In Schottland gibt es schwarze Schafe.“* Die Mathematikerin seufzt und spricht: *„In Schottland gibt es auf mindestens einer Weide mindestens ein Schaf, welches von mindestens einer Seite schwarz ist.“*

### 1.1 Zum Aufwärmen: Was ist Zahlentheorie?

Am Anfang der Mathematik – sowohl vor einigen tausend Jahren als auch in der ersten Klasse der Schule oder dem ersten Semester an der Universität – stehen die Zahlen im Mittelpunkt. In der deutschen Sprache sind die beiden Wörter *Zahlen* und *zählen* sehr ähnlich; dies kommt nicht von ungefähr: Die *natürlichen* Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  ermöglichen eine Sprache, Dinge des täglichen Lebens zu zählen oder auch Gegenstände zu messen: eine Familie besitzt vielleicht *ein* Schwein oder *zwei* Hühner; die Entfernung Würzburg–Schweinfurt beträgt ca. *144.000* Fuß bzw. *sechs* (mittelalterliche) Meilen (ungefähr 45 km). Die natürlichen Zahlen verdienen sich ihren Namen damit als *Ordinalzahlen*, wie sie eben beim Zählen vorkommen, und auch als *Kardinalzahlen*, welche die Größe einer Menge wiedergeben. Zahlen zum Zählen oder auch als Maßzahlen werden seit etlichen Tausenden von Jahren verwendet. Seitdem hat sich das Zahlenuniversum jedoch erheblich vergrößert – eine ‚Evolution der Zahlbereiche‘ –, entsprechend den Aufgaben mit denen die Mathematikerinnen und Mathematiker konfrontiert wurden:

$\mathbb{N}$  = Menge der natürlichen Zahlen :  $1, 2, 3, 4, \dots$  ;

$\mathbb{Z}$  = Menge der ganzen Zahlen :  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  ;

$\mathbb{Q}$  = Menge der rationalen Zahlen, wie etwa  $\frac{1}{2}, -\frac{11}{97}$  ;

$\mathbb{R}$  = Menge der reellen Zahlen, z. B.  $\sqrt{2}, \pi = 3,14159 \dots$  ;

$\mathbb{C}$  = Menge der komplexen Zahlen.

Die Menge der *ganzen* Zahlen erweitert die der natürlichen Zahlen um das jeweils Negative sowie die Zahl null. Negative Zahlen treten in Kaufmannsrechnungen z. B. im Zusammenhang für Verbindlichkeiten auf; so wurden Schulden im Mittelalter als rote Zahlen in der ansonsten schwarz verfassten Buchhaltung geführt. Die Null fällt aus dem Rahmen: Sie ist weder positiv noch negativ. Tatsächlich ist die Null ein Kunstgriff indischer Mathematiker vor mehr als eintausend Jahren; die erste gesicherte Erwähnung findet sich auf einer Steintafel südlich von Delhi aus dem achten Jahrhundert unserer Zeitrechnung. Ihre Relevanz wird sich uns erschließen, wenn wir (in Abschn. 3.5) eingehend die Struktur der obigen Zahlbereiche studieren werden.

Die *rationalen* Zahlen bilden eine Obermenge der ganzen Zahlen, in der sämtliche Quotienten ganzer Zahlen zu finden sind (natürlich ohne dabei durch null zu dividieren). Die ‚alten Ägypter‘ zerlegten z. B. in ihren bemerkenswerten Kalenderrechnungen Proportionen systematisch in Summen von Stammbrüchen, etwa

$$\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

und entwickelten eine ganz eigene Arithmetik. Ein *guter* Kalender war bereits damals von großer Wichtigkeit im Hinblick auf die Ernte und ihre Abhängigkeit von den Überschwemmungen des Nils.<sup>1</sup> Noch für die ‚alten Griechen‘ lieferten die rationalen Zahlen das Fundament ihres Weltbildes:

„*Alles ist Zahl.*“

soll Pythagoras im sechsten Jahrhundert vor Beginn unserer Zeitrechnung gesagt haben<sup>2</sup> und meinte damit, dass sich das Wesen der Welt in Zahlen ausdrückt. Ein Beispiel hierfür ist Pythagoras’ Harmonienlehre in der Musik. In dieser Weltanschauung waren ausschließlich *rationale*<sup>3</sup> Zahlen gemeint und jede Naturgesetzmäßigkeit sollte sich mit eben diesen rationalen Zahlen beschreiben lassen. Doch bereits Pythagoras’ Schüler erkannten,

<sup>1</sup>Das Schaltjahr ist übrigens eine ägyptische Erfindung; Gaius Julius Cäsar adaptierte diese Idee in seinem Julianischen Kalender lediglich.

<sup>2</sup>Und sein Schüler Kroton fügt präzisierend hinzu: „*Und wirklich hat alles, was erkannt wird, Zahl. Denn es ist unmöglich, daß ohne diese irgend etwas im Denken erfaßt oder erkannt wird*“ (cf. [5], Seite 127).

<sup>3</sup>‚ratio‘ ist lateinisch für ‚Vernunft‘.

dass die rationalen Zahlen alleine nicht ausreichen, die Welt zu erklären: Hippasos von Metapont entdeckte, dass die Diagonale im Einheitsquadrat *inkommensurabel* ist, d. h. deren Länge  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl (siehe Satz 1.1 weiter unten). Diese Erkenntnis revolutionierte die Mathematik der Griechen!<sup>4</sup>

Die Entdeckung der Irrationalitäten führt direkt auf die in der Analysis so wichtigen Menge  $\mathbb{R}$  der *reellen* Zahlen, wenngleich die Mathematiker mehr als ein Jahrtausend für diesen Schritt benötigten!<sup>5</sup> Tatsächlich brachte das römische Reich außer der Verpflichtung ausländischer Mathematiker zum Bau von Aquädukten und dergleichen keinen nennenswerten Beitrag zur Förderung der Mathematik zustande, sondern war mit seinen unpraktikablen Zahlsymbolen und den damit verbundenen Unannehmlichkeiten eher rückschrittlich. Das erleichternde Dezimalsystem inkl. der Null verdanken wir den arabischen Mathematikern und der arabischen Vorherrschaft auf der iberischen Halbinsel vor gut eintausend Jahren.

Bei den *reellen Zahlen* treffen wir weitere alte Bekannte aus der Schule, wie etwa  $e = 2,71828\dots$  (die Basis des natürlichen Logarithmus) und die Kreiszahl  $\pi = 3,14159\dots$ . Allerdings entziehen sich die Wurzeln der einfachen Gleichung  $X^2 + 1 = 0$  auch den reellen Zahlen; erst mit Hilfe der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen lässt sich diese und tatsächlich jede polynomielle Gleichung mit reellen oder gar komplexen Koeffizienten lösen (wie der ‚Fundamentalsatz der Algebra‘ besagt, den wir in Abschn. 8.1 behandeln werden). Wir haben also folgenden Turm von Zahlenuniversen zur Verfügung:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Hierbei werden existente Zahlbereiche tatsächlich jeweils so um weitere Zahlen erweitert, dass mehr und mehr (algebraische) Struktur entsteht! Alle diese Zahlbereiche werden wir eingehend studieren (und dabei auch Aspekte kennen lernen, die jenseits des uns in der Schule vermittelten Wissens liegen und trotzdem relevant sind). Insbesondere interessieren wir uns für

---

<sup>4</sup>Von einer Grundlagenkrise (wie in einiger Literatur) sollte man dabei nicht ausgehen, sondern viel mehr von einem Startpunkt, aus dem sich Ideen und Theorien entwickelt haben; siehe hierzu D. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press Oxford, 1999.

<sup>5</sup>Weder das Tempo von Mathematikvorlesungen noch die Dicke der Lehrbücher spiegelt die Geschwindigkeit der Entwicklung dieser Theorien wieder. Insofern benötigt auch der Stoff einer Vorlesung oder auch eines Buches wie diesem unbedingt eine Nachbereitung!

die reellen Zahlen und dabei wiederum für die Unterschiede zwischen den rationalen Zahlen und den reellen Irrationalzahlen.

### *Was ist Zahlentheorie?*

Ein Beispiel hatten wir mit der Fermatschen Vermutung bereits im Vorwort angesprochen. Hier wollen wir ein anderes Problem betrachten, das ebenfalls auf Fermat zurückgeht, dabei einen recht einfachen Einstieg in die Zahlentheorie liefert und uns nebenbei auch noch eine zeitlang beschäftigen wird. Wir fragen, ob auf gewissen Kurven Punkte mit ganzzahligen Koordinaten liegen und starten mit ganz einfachen Kurven.

Gegeben sei eine *lineare* Gleichung in zwei Unbekannten  $X$  und  $Y$ , etwa

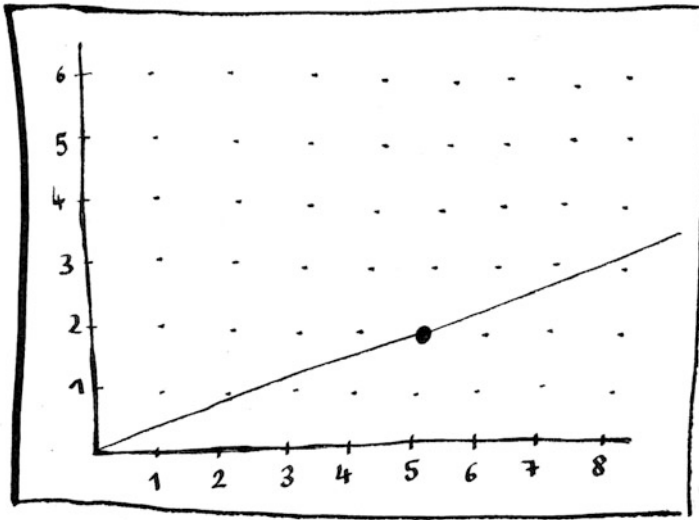
$$2X - 5Y = 0;$$

diese Gleichung beschreibt geometrisch eine Gerade in der  $X - Y$ -Ebene durch den Ursprung. Wir suchen nach Punkten  $(x, y)$  mit ganzzahligen Koordinaten, kurz *ganzzahlige Punkte*, auf dieser Geraden. Hier und im Folgenden beschreiben wir in Gleichungen Variable mit Großbuchstaben und Lösungen zur Unterscheidung mit den entsprechenden Kleinbuchstaben – eine hilfreiche Konvention, an die man sich schnell gewöhnt. Wem die obige Problemstellung ohne weitere Motivation zu langweilig scheint, der mag an eine Sammlung von Fingerabdrücken denken, in der von  $z$  Personen sämtliche Fingerabdrücke der beiden Hände gesammelt sind. Diese Sammlung lässt sich unterschiedlich ordnen, etwa nach Händen, aber auch nach Fingern. Weil wir davon ausgehen, dass alle Personen zwei Hände mit je fünf Fingern (Daumen, Zeigefinger usw.) besitzen, gelten die Gleichungen  $5y = 10z$  und  $2x = 10z$  für die Anzahl  $x$  der Fingerpaare und die Anzahl  $y$  der Hände. Natürlich ist zudem  $5y = 2x$  bzw.  $2x - 5y = 0$  (durch Bildung der Differenz); also liefern diese möglichen Anzahlen  $x$  und  $y$  Beispiele für ganzzahlige Punkte auf unserer Geraden und umgekehrt.<sup>6</sup>

Zurück zur eigentlichen mathematischen Fragestellung. Offensichtlich ist die gegebene Gleichung ganzzahlig lösbar, wie wir gesehen hatten etwa durch  $x = 5$  und  $y = 2$ ; demzufolge ist  $(5, 2)$  ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten auf der obigen Geraden (siehe Abb. 1.1). *Gibt es weitere ganzzahlige Punkte auf dieser Geraden?* Tatsächlich besitzt diese Gleichung sogar *unendlich viele* Lösungen, die sich wie folgt parametrisieren lassen:

---

<sup>6</sup> Vielleicht liefert ein Seestern, wie er bei *Schwammkopf Bob* auftritt, mit seinen fünf Armen und zwei Augen ein besseres, wenn auch biologisch zweifelhaftes und realitätsfernes Beispiel?!



**Abbildung 1.1.** Die Gerade  $Y = \frac{2}{5}X$  im ersten Quadranten

$$x = 5m \quad \text{und} \quad y = 2m \quad \text{für ganzzahliges } m.$$

Der Begriff ‚Parametrisierung‘ bedeutet hier, dass es eine gewisse Größe gibt, der *Parameter*  $m$  in unserem Falle, mit dessen Hilfe sich durch Variieren desselben sämtliche Lösungen ergeben. Dass tatsächlich alle solchen  $x$  und  $y$  die gegebene Gleichung lösen, rechnet man leicht nach; dass es keine weiteren Lösungen gibt, benötigt schon ein wenig Nachdenken: Zunächst nehmen wir an, dass es eine Lösung  $(x, y)$  in ganzen Zahlen gibt und stellen die Gleichung um:

$$2x = 5y.$$

Weil wir es mit ganzen Zahlen zu tun haben, muss  $5y$  eine gerade Zahl sein, eben da diese gleich der wegen des Faktors 2 sicherlich geraden Zahl  $2x$  ist. Hier benutzen wir also die Unterteilung der ganzen Zahlen in *gerade* und *ungerade* Zahlen, also in Zahlen der Form  $2k$  bzw.  $2k+1$ , wobei  $k$  eine ganze Zahl ist. In dieser oder in variiert Form ist diese Einteilung ganzer Zahlen in verschiedene Klassen ein sehr wichtiges Konzept der Zahlentheorie! Da aber 5 ungerade ist, muss also  $y$  gerade sein, d. h.  $y = 2m$  für eine ganze Zahl  $m$ . Also wissen wir

$$2x = 5 \cdot 2m.$$

Kürzen liefert nun die oben angegebene Parametrisierung. Das war recht einfach, allerdings haben wir an einer Stelle einen *wichtigen* Satz der Zahlentheorie benutzt – fast ohne dies zu merken –, nämlich, das so genannte

**Lemma von Euklid.** *Teilt eine Primzahl ein Produkt zweier ganzer Zahlen, so teilt sie mindestens einen der beiden Faktoren*

(als wir folgerten, dass  $y$  gerade ist). Mit einem *Lemma* bezeichnet man üblicherweise eine mathematische Aussage, die als Hilfssatz für den Beweis tieferer Resultate benötigt wird.<sup>7</sup> Die Aussage des euklidischen Lemmas klingt harmlos, ist womöglich intuitiv klar, trotzdem bedarf sie eines Beweises (den wir auch in Abschn. 3.4 später geben werden).

Auf diese Weise kann man alle möglichen Gleichungen der Form

$$aX - bY = 0$$

behandeln, wobei  $a$  und  $b$  jetzt irgendwelche vorgegebenen ganzen Zahlen seien. Zur Übung mag man sich überlegen, wie zu argumentieren ist, wenn weder  $a$  noch  $b$  eine Primzahl ist. *Aber was ist mit Gleichungen der Gestalt  $2X - 5Y = 1$  etwa oder, wenn drei oder mehr Unbekannte auftreten?* (Dies wird später in Abschn. 3.2 noch unser Thema sein.) Wir sprechen hier von *linearen Gleichungen*, da diese Gleichungen so genannte Hyperebenen im Sinne der *linearen* Algebra definieren; das Attribut *linear* entstammt dem lateinischen ‚linea‘, was ‚Linie‘ bedeutet.

Als nächstes Problem wollen wir *quadratische Gleichungen* untersuchen, wie etwa

$$X^2 - 2Y^2 = 0;$$

wiederum fragen wir nach ganzzahligen Lösungen, möchten nun allerdings die *triviale* Lösung  $x = y = 0$  ausdrücklich ausschließen. Ausgehend von einer hypothetischen nicht-trivialen Lösung  $(x, y)$  stellen wir diese Gleichung um, so dass

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{y} = \pm\sqrt{2}$$

entsteht; diese Umformung ist erlaubt, weil für eine solche Lösung sicherlich  $y \neq 0$  gilt (da sonst ja auch  $x = 0$  gelten würde, was wir ausgeschlossen hatten). Wenn aber  $x$  und  $y$  ganze Zahlen sind, wobei  $y \neq 0$ , dann ist  $\frac{x}{y}$

---

<sup>7</sup> ‚Lemma‘ ist übrigens griechisch für ‚Annahme‘.

eine *rationale* Zahl (ein so genannter ‚Bruch‘, was wir im Folgenden aber nur selten sagen wollen). Dem entgegen gilt folgender

**Satz 1.1.**  $\sqrt{2}$  ist irrational.

Hierbei heißt eine Zahl *irrational*, wenn sie nicht rational (also kein ‚Bruch‘) ist, und somit keine Darstellung  $\frac{a}{b}$  mit ganzen Zahlen  $a$  und  $b \neq 0$  besitzt. Ist  $\eta$  eine nicht-negative reelle Zahl, so existiert eine eindeutig bestimmte nicht-negative reelle Zahl  $\xi$ , welche  $\xi^2 = \eta$  genügt; dieses  $\xi$  notieren wir auch als Quadratwurzel aus  $\eta$ , in Zeichen:  $\xi = \sqrt{\eta}$ . Dies dürfte aus der Schule bekannt sein, wird uns aber später noch öfter beschäftigen.<sup>8</sup> Letztlich ist die Quadratwurzel  $\sqrt{2}$  somit ein Symbol, welches eine bestimmte reelle Zahl definiert, nämlich jene, welche der Gleichung  $\xi^2 = 2$  genügt und dabei positiv ist. Tatsächlich sollten wir zunächst jedoch eine gewisse Vorsicht mit reellen Zahlen an den Tag legen, ist uns doch keine genaue (endliche) Darstellung der reellen Zahl hinter dem Symbol  $\sqrt{2}$  bekannt. (In Kap. 5 werden wir dies eingehend beleuchten.)

In der Mathematik verdient eine Aussage nur dann den Namen *Satz*, wenn es eine stichhaltige Argumentation, einen so genannten *Beweis*, für diese Aussage gibt (ein Thema, dass wir in Abschn. 2.1 vertiefen werden). Hier kommt nun für Satz 1.1 ein

**Beweis durch Widerspruch.** Hierzu nehmen wir an, dass die Aussage des Satzes falsch ist und führen dies zu einem Widerspruch, was dann wiederum beweist, dass unsere Annahme falsch und daher die Aussage wahr ist: Angenommen,  $\sqrt{2}$  ist nicht irrational, dann ist sie rational, also lässt sie sich schreiben als  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  für gewisse ganze Zahlen  $a$  und  $b \neq 0$ . *Wir dürfen ferner annehmen, dass  $a$  und  $b$  teilerfremd sind*, also keinen gemeinsamen Primfaktor besitzen; ansonsten erzielen wir durch Kürzen des größten gemeinsamen Teilers von Zähler und Nenner einen solchen Bruch (wie etwa im Beispiel  $\frac{10}{15} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$ ). Dann liefert Quadrieren

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{bzw.} \quad 2b^2 = a^2.$$

*Soweit waren wir im Prinzip schon; allerdings haben wir mittlerweile gezeigt, dass die Irrationalität von  $\sqrt{2}$  äquivalent zur nicht-trivialen Lösbarkeit obiger quadratischer Gleichung ist.* (Nun argumentieren wir ganz ähnlich wie im Falle der linearen Gleichung  $2x = 5y$  oben:) Da die linke

---

<sup>8</sup>Lediglich die griechischen Buchstaben mögen ungewohnt erscheinen; hier hilft nur der praktische Umgang mit denselben. Sprachlich liest sich unser Beispiel als *xi Quadrat gleich eta*.



Seite gerade ist, muss auch die rechte Seite gerade sein. Angenommen,  $a$  sei ungerade, also  $a = 2k + 1$  mit einer ganzen Zahl  $k$ , dann folgte  $a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ , womit dann auch  $a^2$  ungerade wäre. Folglich ist  $a$  gerade, d. h.  $a = 2k$  für eine ganze Zahl  $k$  und  $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ . Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, zeigt sich

$$2b^2 = 4k^2 \quad \text{bzw.} \quad b^2 = 2k^2$$

nach Kürzen des Faktors 2. Mit demselben Argument wie zuvor folgt nun, dass auch  $b$  gerade ist. *Dies widerspricht jedoch unserer Voraussetzung der Teilerfremdheit von  $a$  und  $b$ .* Also war die Annahme falsch, d. h.  $\sqrt{2}$  ist irrational und die Aussage ist bewiesen. •<sup>9</sup>

Damit haben wir unseren ersten formal korrekten Beweis geführt (wenngleich wir wiederum das bislang noch nicht bewiesene euklidische Lemma benutzt haben). Das Ergebnis war – wie angemerkt – bereits den griechischen Mathematikern der Antike bekannt als Inkommensurabilität von Diagonale und Seitenlänge eines Quadrates (was wir in Abschn. 6.6 noch einmal vertiefen werden). Heutzutage können wir diese Erkenntnis auf einer Seite zusammenfassen, aber wir sollten nicht vergessen, was für eine große Leistung hinter einem *ersten neuen Gedanken* steckt! Zur Verdeutlichung sei hierzu noch erwähnt, dass es damals überhaupt *keine algebraische Formulierung* der Mathematik gab, was heutzutage ja bereits mit der Formelsprache in der Schule eine Selbstverständlichkeit ist; unser Kalkül der Notation mathematischer Formeln wurde tatsächlich erst beginnend mit François Viète und seinen Zeitgenossen im sechzehnten Jahrhundert nach und nach entwickelt.<sup>10</sup>

Übrigens: Der Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  funktioniert nahezu wortwörtlich auch mit  $\sqrt{3}$  und  $\sqrt{5}$  anstelle von  $\sqrt{2}$ , aber natürlich nicht mit  $\sqrt{4} = 2$ ; *an welcher Stelle des Beweises ergeben sich Probleme im Falle  $\sqrt{4}$ ?*

**Aufgabe 1.1.** *Beweise die Irrationalität von  $\sqrt{p}$ , wobei  $p$  eine beliebige Primzahl sei. Wieso funktioniert der Beweis nicht für  $\sqrt{4}$ ? Für welche natürlichen Zahlen  $n$  ist die Quadratwurzel  $\sqrt{n}$  irrational? Ist  $\sqrt[3]{2}$  (also die reelle Lösung der Gleichung  $X^3 = 2$ ) ebenfalls irrational?*

Aus Platons Schriften wissen wir, dass wohl Theodoros von Kyrene der Erste war, der über die Irrationalität von  $\sqrt{2}$  hinausgehend, Quadratwurzeln

<sup>9</sup> Wir notieren mit dem Symbol • das Beweisende; andere schreiben ‚qed‘ für ‚quod erat demonstrandum‘ oder ähnliches.

<sup>10</sup> Mehr zu diesem wichtigen Thema in [18], Band 1.

natürlicher Zahlen auf Irrationalität untersuchte; bei Platon selbst findet man ebenfalls Versuche, diese Irrationalitäten zu klassifizieren (ein Thema, dem wir später in Kap. 6 wieder begegnen werden).

In Briefen an die besten Mathematiker seiner Zeit (17. Jhd.) stellte Fermat folgende Aufgabe:<sup>11</sup> *Gegeben eine natürliche Zahl  $d$ , finde man alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung*

$$X^2 = dY^2 + 1.$$

Für ein erstes Beispiel denke man hier etwa an  $d = 1$ . Dann kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$1 = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$$

(in der Schule wurde die zweite Gleichung oben mit dem Namen ‚dritte binomische Formel‘ bezeichnet). Da nach *ganzzahligen* Lösungen  $x, y$  gefragt ist, erlaubt diese Faktorisierung nur ganzzahlige Faktoren, und weil das Produkt eins ist, gilt für diese

$$x - y = x + y = \pm 1,$$

was so zu lesen ist, dass entweder  $x - y$  und  $x + y$  gleich  $+1$  oder beide gleich  $-1$  sind. Nach Addition beider Gleichungen ergeben sich als einzige Lösungen  $x = \pm 1$  und  $y = 0$ . Auf ähnliche Art und Weise kommt man für alle Quadratzahlen  $d$  zum Ziel; man versuche sich etwa an  $d = 4 = 2^2$ . *Aber was lässt sich für etwa  $d = 61$  sagen?* Also:

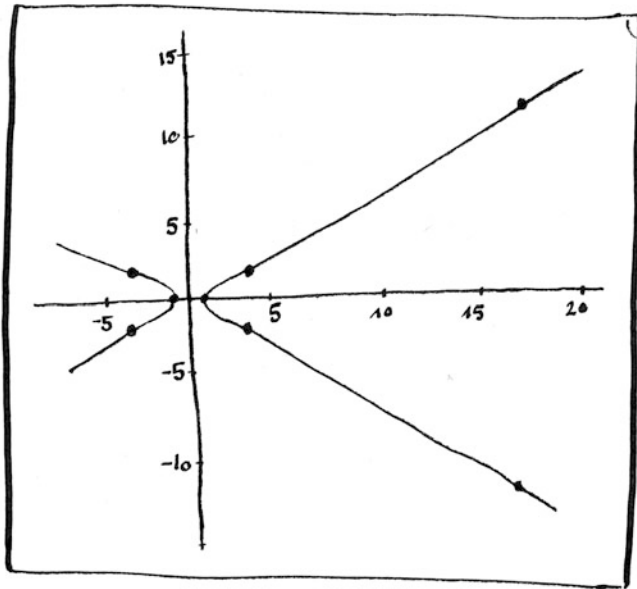
$$X^2 - 61Y^2 = 1.$$

Die Lösungen, die wir für quadratische  $d$  gefunden haben, sind stets Lösungen (unabhängig von  $d$ , wie man sofort nachrechnet). Allerdings sieht man diese Lösungen sofort, weshalb wir sie *trivial* nennen wollen. *Aber gibt es auch nicht-triviale Lösungen?* Zunächst wollen wir uns diese Problemstellung geometrisch veranschaulichen. Den Lösungen entsprechen ganzzahlige Punkte auf einer Hyperbel (siehe Abb. 1.2) und unsere Problemstellung lautet folglich:

*Eine solche Hyperbel enthält natürlich viele Punkte, aber liegen auch welche mit ganzzahligen Koordinaten auf ihr?*

---

<sup>11</sup> Wir versuchen weitestgehend *geschlechterneutral* zu schreiben, jedoch scheint dies hier unangebracht zu sein, da Fermats Korrespondenz ausschließlich männlichen Adressaten vorbehalten war, in einer Zeit, in der es nahezu gar keine Mathematikerinnen gab. Im Folgenden wählen wir als Kompromiss wechselnd die männliche oder weibliche Form.



**Abbildung 1.2.** Die Hyperbel  $X^2 - 2Y^2 = 1$ ; die ganzzahligen Punkte sind *fett* eingezeichnet, wie etwa  $(x, y) = (3, 2)$ .

Die Symmetrien der Hyperbel legen auch eine Symmetrie bei den Lösungen der Gleichung nahe: Mit  $(x, y)$  ist auch  $(\pm x, \pm y)$  eine Lösung, wobei hier jede Kombination von Vorzeichen erlaubt ist, weil die Unbekannten quadratisch in der Gleichung auftreten.

Wir werden also Hyperbeln der Gestalt

$$X^2 - dY^2 = 1$$

untersuchen, wobei  $d$  eine beliebige natürliche Zahl sei, jedoch kein Quadrat, und auf Grund der Symmetrien dürfen wir uns zukünftig auf Lösungen in *natürlichen* Zahlen beschränken. Tatsächlich existieren stets solche, wenn  $\sqrt{d}$  irrational ist (bzw.  $d$  kein Quadrat), was wir auch im Verlaufe dieses Buches beweisen werden! Der Beweis hiervon ist keine leichte Aufgabe, wie etwa das Beispiel  $d = 61$  nahelegt, denn die *kleinste* Lösung in natürlichen Zahlen ist hier erstaunlich groß:

$$x = 1\,766\,319\,049, \quad y = 226\,153\,980.$$

Auch wie man für eine Gleichung des obigen Typs nicht nur *eine*, sondern sogar die Gesamtheit *aller* Lösungen explizit gewinnt, wird uns in Abschn. 7.1 beschäftigen. Ein Beispiel für das Auffinden weiterer Lösungen illustrieren

wir aber bereits jetzt an Hand der Gleichung (siehe Abb. 1.2):

$$X^2 - 2Y^2 = 1.$$

Durch Ausprobieren finden wir die Lösung  $x = \mathbf{3}$  und  $y = \mathbf{2}$  in natürlichen Zahlen und erhalten weitere auf folgende erstaunliche Art und Weise: Zunächst Quadrieren wir unsere leicht modifizierte Lösung und berechnen

$$(x + y\sqrt{2})^2 = (\mathbf{3} + \mathbf{2}\sqrt{2})^2 = \mathbf{17} + \mathbf{12}\sqrt{2};$$

dann ist  $x = \mathbf{17}$  und  $y = \mathbf{12}$  eine neue Lösung:

$$\mathbf{17^2} - 2 \cdot \mathbf{12^2} = 289 - 2 \cdot 144 = 1.$$

Die Zahlen 17 und 12 ergeben sich hierbei durch Separieren des rationalen vom irrationalen Anteil (gewissermaßen ein *Koeffizientenvergleich*). Durch weiteres Potenzieren erhalten wir

$$(3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2}$$

und wiederum ist  $x = 99$  und  $y = 70$  eine Lösung. Alle diese Lösungen besitzen zudem eine interessante Eigenschaft, sie approximieren<sup>12</sup> nämlich  $\sqrt{2}$  sehr gut (tatsächlich zunehmend besser):

$$\frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{17}{12} = 1,41\bar{6}, \quad \frac{99}{70} = 1,41428571\dots, \quad \longrightarrow \sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

Wir können dies geometrisch wie folgt begründen: Die ganzzahligen Punkte liegen auf den Ästen der Hyperbel und mit wachsenden Koordinaten  $x$  und  $y$  liegen diese Punkte immer weiter vom Ursprung entfernt; ebenso nähern sich diese Äste den Asymptoten  $X = \pm\sqrt{2}Y$  der Hyperbel mit wachsendem Abstand an. Die Asymptoten der Hyperbel berechnen sich hierbei über die Geradengleichungen, welche sich durch Faktorisieren der Gleichung  $X^2 - 2Y^2 = 0$  ergeben. Also bilden die Quotienten der Koordinaten von Punkten auf der Hyperbel immer bessere Approximationen an die Steigung der Asymptoten.

Übrigens ist dieses Beispiel nicht ohne praktischen Nutzen: Das Längenverhältnis bei Din A4 beträgt

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Breite}} = \frac{29,7\text{cm}}{21\text{cm}} = \frac{99}{70};$$

warum diese Approximation an  $\sqrt{2}$  eine so gute Wahl für unser Papierformat ist, werden wir in Abschn. 6.4 genauestens ergründen, und auch den Zusammenhang zur farbigen Abbildung auf S. V. Ebenso werden wir das

---

<sup>12</sup> ‚annähern‘, von lat.: proximus, ‚der Nächste‘.



**Abbildung 1.3.** Pierre de Fermat, \* 1607/08 Beaumont-de-Lomagne – † 12. Januar 1665 Castres; französischer Jurist und Mathematiker, der nicht nur in der Zahlentheorie wichtige Akzente setzte, sondern auch Mitbegründer der *analytischen Geometrie* und der *Differential- und Integralrechnung* war. Fermats Geburtsdatum ist unbekannt.

Phänomen der Approximation von Quadratwurzeln durch Lösungen obiger quadratischer Gleichungen eingehend untersuchen.

**Aufgabe 1.2.** *Untersuche die Gleichung  $X^2 - 5Y^2 = 1$  und finde mit der oben beschriebenen Methode rationale Näherungen an  $\sqrt{5}$ , die mindestens fünf exakte Nachkommastellen besitzen.*

Wir haben nun bereits einige Beispiele so genannter *diophantischer Gleichungen* kennen gelernt. Dabei handelt es sich jeweils um *polynomielle Gleichungen* mit ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten, die in ganzen oder rationalen Zahlen gelöst werden sollen. Diese zahlentheoretische Fragestellung entspringt der geometrisch motivierten Mathematik der griechischen Antike. Die Namensgebung bezieht sich auf den griechischen Mathematiker *Diophant*, der im dritten Jahrhundert in Alexandria lebte. Über sein Leben ist nur sehr wenig bekannt; seine Werke waren lange verschollen und wurden erst im 16. Jahrhundert wiederentdeckt.

Übrigens notierte unser alter Bekannter Fermat seine berühmte *Fermatsche Vermutung* von der Unlösbarkeit der Gleichung  $X^n + Y^n = Z^n$  mit

Exponenten  $n \geq 3$  in natürlichen Zahlen (vgl. Vorwort) in seinem Exemplar des Lehrbuches *Arithmetica* von Diophant. Er schrieb

*„Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben zu zerlegen, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate, oder allgemein irgendeine Potenz größer als die zweite in Potenzen gleichen Grades. Ich habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.“*

Unglücklicherweise ist dieser ‚Beweis‘ jedoch nirgends aufgetaucht; heute geht man davon aus, dass Fermat keinen stichhaltigen Beweis hatte. Auch wenn die Bewältigung dieses Fermatschen Problems Mittel benötigt, die jenseits dessen liegen, was wir in diesem Buch ansprechen wollen, werden wir einige Aspekte dieses Problems im Laufe dieses Buches studieren.

Elementare Zahlentheorie

Ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik

Oswald, N.; Steuding, J.

2015, XIII, 396 S. 89 Abb., 2 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-44247-0