
Nicola Oswald · Jörn Steuding

Elementare Zahlentheorie

Ein sanfter Einstieg in die
höhere Mathematik



Springer Spektrum

Nicola Oswald
Jörn Steuding
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-662-44247-0

ISBN 978-3-662-44248-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-44248-7

Mathematics Subject Classification (2010): 01, 11, 97

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Zeichnungen: Nicola Oswald

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Ein sanfter Einstieg in
Die Höhere Mathematik:
ELEMENTARE
ZAHLENTHEORIE

UND VERWANDTE GEBIETE
FÜR STUDIERENDE IM ERSTEN SEMESTER
UND WEITERE INTERESSIERTE

JÖRN STEUDING
NICOLA OSWALD

Vorwort

Mathematik ist anders als die meisten Menschen sie sich vorstellen!

Sie ist nicht leicht zu beschreiben; einfacher ist darzulegen, was sie nicht ist: Mathematik ist keine Naturwissenschaft; ihre Ergebnisse bedürfen keiner Experimente, sondern sie werden durch Beweise verifiziert. Entsprechend stellen mathematische Theoreme letztlich Gesetze bereit, die unverändert von Zeit und Raum allgemein gültig sind. Dies unterscheidet Mathematik von beispielsweise Physik oder Chemie. Damit ist jedoch noch keineswegs erläutert, was denn Mathematik tatsächlich ist. Um dies zu verstehen, – besser noch: um dies zu erfahren –, muss man letztlich *Mathematik selbst betreiben!*

Mathematik ist nichts Weltfremdes; sie ist in der heutigen hochtechnologischen Welt an allen Ecken und Enden auffindbar, oftmals auf den ersten Blick unsichtbar und trotzdem von zentraler Bedeutung! Insbesondere gilt dies für die *Zahlentheorie*, welche das Hauptthema des vorliegenden Buches bildet.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen und angeschlossenen Tutorien entstanden, die wir für Studierende des ersten Studienjahres an der Universität Würzburg angeboten haben. Im Besonderen sei hier die Veranstaltung gleichen Namens für Lehramtsstudierende des ersten Semesters der Schulformen Grund-, Haupt- und Realschule in den Wintersemestern 2009/10 sowie 2012/13 erwähnt. Aber auch die regelmäßig angebotene Einführung in die Zahlentheorie für die Bachelorstudiengänge sowie das gymnasiale Lehramt aus den Sommersemestern 2010 bis 2014 hat unsere Darstellung und Themenwahl maßgeblich beeinflusst.

Zahlentheorie eignet sich mit ihren einfach verständlichen Fragestellungen in ganz besonderer Art und Weise dafür, das Mathematikstudium zu eröffnen, auch wenn die Geschichte zeigt, dass viele zahlentheoretische Probleme letztlich schwierig sind und ihre Lösung, wenn überhaupt existent, oftmals nur mit diffizilen Methoden, Tricks und tiefen Ideen gefunden werden kann. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist eine Frage des Juristen und

Hobbymathematikers Pierre de Fermat aus dem 17. Jahrhundert. Die nach ihm benannte *Fermatsche Vermutung* besagt, dass die Gleichung

$$X^n + Y^n = Z^n \quad \text{mit ganzzahligem } n \geq 3$$

nur *triviale* ganzzahlige Lösungen besitzt, also nur solche, die sofort sichtbar sind (wie etwa $x = z = 5$ oder 7 oder irgendeine andere ganze Zahl und $y = 0$). Als einen Höhepunkt des vorliegenden Buches werden wir den Spezialfall $n = 4$ beweisen; der allgemeine Fall wurde tatsächlich erst vor zwanzig Jahren von Andrew Wiles erschöpfend behandelt unter Zuhilfenahme anspruchsvoller Methoden der Arithmetik, Analysis und Algebra (weit jenseits dessen, womit wir uns beschäftigen werden). Im Gegensatz dazu besitzt obige Gleichung für den Exponenten $n = 2$ unendlich viele nicht-triviale Lösungen, z. B.

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad \dots$$

Auch dies werden wir untersuchen und dabei der Frage nachgehen, was denn den Unterschied zwischen diesen beiden Fällen ausmacht. Nebenbei werden wir allerhand über ganze Zahlen und insbesondere Primzahlen erfahren, aber auch weitere Typen von Zahlen und verwandte Objekte kennen lernen, und nicht zuletzt studieren wir Anwendungen in der Kryptographie und bei den ISBN-Codes.

Das Attribut *elementar* im Titel dieses Buches bedeutet, dass wir nur grundlegende Techniken verwenden; es ist jedoch *elementar* keineswegs mit *einfach* gleichzusetzen. Analytische oder algebraische Methoden kommen lediglich in einigen wenigen Passagen zum Einsatz vor dem Hintergrund, Perspektiven nach dem ersten Studienjahr aufzeigen zu wollen.

Neben dieser elementaren Einführung in die Zahlentheorie soll dieses Buch eine Brücke bauen zwischen der *Schulmathematik* und der *Hochschulmathematik* und dabei auf weitere Themengebiete der Mathematik vorbereiten. Insofern werden wir zunächst allgemein das *mathematische Argumentieren* und *Beweisen* ausgiebig behandeln und üben, um dann im weiteren Verlauf auch hier und da einen Ausblick auf weiterführende Mathematik (wie Analysis, lineare Algebra und Geometrie) werfen. Wir möchten mit diesem Buch sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Lehrer und Lehrerinnen, aber natürlich nicht zuletzt auch Studierende der Mathematik (in einem frühen Semester) ansprechen. Unser Zugang ist als eine Ergänzung des üblichen Curriculums an deutschen Hochschulen gedacht, aber natürlich

nicht als Ersatz für die bewährten Anfängerveranstaltungen Analysis und lineare Algebra.

Sämtliche Zeichnungen entstammen der Feder von Nicola Oswald; Vorlage hierzu waren oftmals Bilder des *MacTutor Institute History of Mathematics Archive* der University of St Andrews,¹ welches sehr viele lesenswerte Informationen zur Kulturgeschichte der Mathematik bereitstellt. Wir danken Nadja Harms und Markus Ruppert für Korrekturlesen und Aufstöbern von Druckfehlern in einer sehr frühen Fassung des Skriptes. Dem Springer-Verlag, und insbesondere Herrn Clemens Heine, gebührt unser Dank für die freundliche Unterstützung und sehr entgegenkommende Zusammenarbeit.

Wir wünschen allen Leserinnen und Lesern *viel Spaß* mit der Lektüre.

Würzburg im April 2014

Nicola Oswald, Jörn Steuding

¹ <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	VII
1 Gebrauchsanleitung	1
1.1 Zum Aufwärmen: Was ist Zahlentheorie?	2
2 Grundlagen	15
2.1 Elementare Logik und Mengenlehre	15
2.2 Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip	31
2.3 Die ganzen und die rationalen Zahlen	44
Weitere Aufgaben zum zweiten Kapitel	57
3 Elementare Teilbarkeitslehre	63
3.1 Der euklidische Algorithmus	63
3.2 Lineare diophantische Gleichungen	72
3.3 Das Briefmarkenproblem	80
3.4 Primzahlen – die multiplikativen Bausteine	84
3.5 Algebraische Strukturen	96
Weitere Aufgaben zum dritten Kapitel	111
4 Modulare Arithmetik	117
4.1 Rechnen mit Restklassen	118
4.2 Der ‚kleine‘ Fermat und Primzahltests	127
4.3 Der chinesische Restsatz	134
4.4 Kryptographie mit RSA	140
Weitere Aufgaben zum vierten Kapitel	146
5 Das Kontinuum	151
5.1 Konvergente und divergente Folgen	151
5.2 Unendliche Reihen und Dezimalbrüche	162
5.3 Die Irrationalität von π	171
5.4 Färbungen der natürlichen Zahlen	174
5.5 Die reellen Zahlen und Intervallschachtelung	178

5.6	abzählbar vs. überabzählbar	184
	Weitere Aufgaben zum fünften Kapitel	191
6	Diophantische Approximation	195
6.1	Die Farey-Folge und Ford-Kreise	195
6.2	Der Approximationssatz von Hurwitz	201
6.3	Kettenbruchkalkül	204
6.4	Das Gesetz der besten Approximation	214
6.5	Periodische Kettenbrüche	222
6.6	Inkommensurabilität in der Geometrie	226
	Weitere Aufgaben zum sechsten Kapitel	228
7	Diophantische Gleichungen	233
7.1	Die Pellsche Gleichung	233
7.2	Pythagoräische Tripel	246
7.3	Fermats letzter Satz	255
	Weitere Aufgaben zum siebten Kapitel	261
8	Eine imaginäre Welt	267
8.1	Die komplexen Zahlen	267
8.2	Summen von Quadraten	280
8.3	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	286
8.4	Origami	299
	Weitere Aufgaben zum letzten Kapitel	305
9	Lösungshinweise zu den *-Übungsaufgaben	311
9.1	Logeleien	311
9.2	Das MU-Rätsel	315
9.3	Die Kaprekar-Konstante	318
9.4	Pascals Dreieck und der binomische Lehrsatz	320
9.5	Gierige Stammbrüche	324
9.6	Wie lange läuft der euklidische Algorithmus?	327
9.7	Unteilbar und selten: Primzahlen	330
9.8	Kalenderarithmetik	333
9.9	Eine diophantische Kryptoattacke	335
9.10	CD-Player und Codierung	338
9.11	Primitivwurzeln	341
9.12	Die Kochsche Insel	344
9.13	Die Kunst der Hochstapelei	348
9.14	Kannibalische Käfer	352

9.15	Das Unendliche	355
9.16	Newton-Näherung und Kettenbrüche	359
9.17	Kopulierende Kaninchen	362
9.18	Ganzzahlige Punkte auf Hyperbeln	365
9.19	Rechte Winkel und Quadrate en masse	367
9.20	Zahlkörper	373
9.21	Wie GPS-Navigation funktioniert	377
9.22	Die <i>abc</i> -Vermutung	380
10	Ende: Nach dem Spiel ist vor dem Spiel...	385
	Literatur	389
	Sachverzeichnis	391

Elementare Zahlentheorie

Ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik

Oswald, N.; Steuding, J.

2015, XIII, 396 S. 89 Abb., 2 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-44247-0