2 Elementare Rechentechniken in der Menge der reellen Zahlen

Zusammenfassung

Mit der Mathematik verbindet man in erster Linie das „Ausrechnen von bestimmten Dingen“. Nun, in der Tat spielt gerade in der Schulmathematik das Rechnen eine dominante Rolle. Später im Studium oder Beruf treten sicherlich auch andere Aspekte – z. B. die logische Beweisführung, die Programmierung von Algorithmen usw. – in den Vordergrund. Dennoch wird niemand, und möge er auch in eine noch so tiefe mathematische Materie eindringen, ernsthaft bezweifeln, dass solide mathematische Rechenfertigkeiten unnütz seien. In diesem Kapitel wollen wir das notwendige mathematische Rüstzeug wiederholen, angefangen vom Ausklammern und Ausmultiplizieren, dem Umgang mit Brüchen, Potenzen und Logarithmen bis hin zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Uns sollte dabei immer bewusst sein, dass die Beherrschung dieser Techniken (auch ohne Taschenrechner und PC!) in Studium und Beruf schlicht und einfach vorausgesetzt wird.

2.1 Zusammenfassen, Faktorisieren und Binomische Formeln

Zunächst klären wir den Begriff eines mathematischen Terms.

Definition 2.1
Ein Term ist eine sinnvolle Verknüpfung von Zahlen und Variablen mit Rechenzeichen sowie Klammern.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und des weiteren Rechenaufwandes ist es erstrebenswert, einen Term weitestgehend zu vereinfachen. Eine Vereinfachung eines Terms $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ muss dabei stets zu einem äquivalenten

W. Schneider, *Mathematik für die berufliche Oberschule*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-45227-1_2

Term $T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ führen. Äquivalent bedeutet dabei, dass bei gleicher Variablenbelegung die Terme T_1 und T_2 die gleichen Werte annehmen, d. h.: $T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Jede Termvereinfachung basiert auf den Axiomen, wie diese im Kap. 1 vorgestellt wurden (siehe Regel 1.2). Eine wichtige Folgerung daraus betrifft das Auflösen von Klammern sowie die Multiplikation von Summen.

Regel 2.1
Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a + (b - c) = a + b - c$
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Beispiel 2.1

$$\begin{aligned}(3x - 4(x + y)) \cdot (2x + y) &= (3x - 4x - 4y) \cdot (2x + y)\\ &= 6x^2 + 3xy - 8x^2 - 4xy - 8xy - 4y^2\\ &= -2x^2 - 9xy - 4y^2.\end{aligned}$$

Durch das Distributivgesetz kann eine Summe in ein Produkt und umgekehrt verwandelt werden. Man spricht dabei vom *Faktorisieren* bzw. *Ausmultiplizieren*. Besondere Bedeutung in diesem Zusammenhang haben die Binomischen Formeln, die man leicht durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen bestätigt.

Satz 2.1 (Binomische Formeln)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Diese Formeln, die in der Mittelstufe ausgiebigst geübt werden, müssen immer präsent sein – auch ohne Formelsammlung. Es reicht auch nicht aus, die Formeln nur zu kennen, vielmehr ist es wichtig, deren Anwendbarkeit in einem gegebenen Term zu „sehen“. Der „mathematische Blick“ ist sozusagen der Schlüssel zum Erfolg.

Beispiel 2.2

$$36ax^2 + 48ax + 16a = 4a(9x^2 + 12x + 4) = 4a(3x + 2)^2.$$

Die Erweiterung der binomischen Formeln auf Potenzen mit Exponenten größer 2 geschieht mit dem allgemeinen binomischen Lehrsatz, der die Kenntnis des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ voraussetzt.[1] Obwohl der allgemeine binomische Lehrsatz nicht Gegenstand des Lehrplans ist, wollen wir ihn dennoch ergänzend aufführen, da diesbezüglich immer wieder die Schüler Fragen stellen („*Gibt es auch binomische Formeln mit Exponenten 3, 4, ...?*“).

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

2.2 Bruchterme

Im Umgang mit Brüchen sind *Erweitern* und *Kürzen* von fundamentaler Bedeutung.

- Erweitern: Multiplikation von Zähler und Nenner mit gleichem Faktor ($\neq 0$)
- Kürzen: Division von Zähler und Nenner durch gleichen Faktor ($\neq 0$)

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \text{ (Erweitern mit } c\text{)} \qquad \frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b} \text{ (Kürzen mit } c\text{)}$$

Für die 4 Grundrechenarten gelten die folgenden Gesetze.

- Addition/Subtraktion: Man addiert/subtrahiert zwei Brüche, indem man den Hauptnenner (= kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV) aller auftretenden Nenner) bestimmt, erweitert und dann die Zähler addiert/subtrahiert.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

- Multiplikation/Division: Man multipliziert zwei Brüche, indem man ihre Zähler und Nenner jeweils multipliziert. Die Division durch einen Bruch wird auf die Multiplikation mit dessen Kehrwert zurückgeführt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Diese Gesetze scheinen sehr trivial zu sein. Die sichere Beherrschung wird sich aber erst dann zeigen, wenn man zumindest bei den nachfolgenden Beispielen keinerlei Schwierigkeiten hat.

[1] Auf den Binomialkoeffizienten werden wir speziell in der Wahrscheinlichkeitstheorie nochmals ausführlich zu sprechen kommen.

Beispiel 2.3 Der folgende Term soll weitestgehend vereinfacht werden.

$$\frac{4u-1}{2u-2}-\frac{2u+1}{2u}-\frac{u^2}{u^2-1} \qquad u \in \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 1\}$$

Den Hauptnenner und die zugehörigen Erweiterungsfaktoren bestimmen wir systematisch anhand der folgenden Tabelle.

Nenner	*Faktorisierung*	*Erweiterungsfaktoren*
$2u-2$	$2(u-1)$	$u(u+1)$
$2u$	$2u$	$(u+1)(u-1)$
u^2-1	$(u+1)(u-1)$	$2u$

Damit ist der Hauptnenner $HN = 2u(u+1)(u-1)$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{4u-1}{2u-2}-\frac{2u+1}{2u}-\frac{u^2}{u^2-1} &= \frac{(4u-1)u(u+1)-(2u+1)(u+1)(u-1)-u^2\cdot 2u}{HN}\\ &= \frac{(4u-1)(u^2+u)-(2u+1)(u^2-1)-2u^3}{HN}\\ &= \frac{4u^3+3u^2-u-2u^3+2u-u^2+1-2u^3}{HN}\\ &= \frac{2u^2+u+1}{2u^3-2u}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.4 Bei der nachfolgenden Division bringen wir erst Dividend und Divisor auf den Hauptnenner (das ist hier wohl ohne ausführliche Tabelle nachvollziehbar) und multiplizieren dann mit dem Kehrwert.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x^2-1}{x-1}-1\right):\left(x+\frac{x}{x-1}\right) &= \frac{2x^2-1-(x-1)}{x-1}:\frac{x(x-1)+x}{x-1} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}\\ &= \frac{2x^2-x}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{x^2} = \frac{2x^2-x}{x^2}\\ &= \frac{\cancel{x}\cdot(2x-1)}{x^{\cancel{2}}} = \frac{2x-1}{x}.\end{aligned}$$

Durch den jeweiligen Definitionsbereich in beiden Beispielen ($\widehat{=}$ zulässige Werte für u bzw. x) ist sichergestellt, dass eine Division durch 0 vermieden wird.

2.3 Quadratwurzeln

Definition 2.2
Die positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$, $x \in \mathbb{R}$ heißt *Quadratwurzel* aus a (kurz: $\sqrt{a}$). Man bezeichnet a als Radikand.

Man beachte, dass das Quadrieren eines Terms $T(x)$ und anschließendes Wurzelziehen nur dann wieder $T(x)$ liefert, falls $T(x)$ nichtnegativ ist. Es gilt allgemein:

$$\sqrt{T(x)^2} = |T(x)|.$$

Für die Multiplikation und Division von Quadratwurzeln mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gelten folgende Regeln:

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (b \neq 0).}$$

Derartige Regeln sind für Addition und Subtraktion *nicht* gültig, d. h.:

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

Teilweises Radizieren
Durch Zerlegung des Radikanden in Faktoren, von denen einer oder mehrere Quadratzahlen sind, lässt sich der Radikand teilweise radizieren. Zu beachten sind evtl. auftretende Beträge. Ist der Radikand positiv, so kann auf die Betragsstriche verzichtet werden.

Beispiel 2.5

$$\sqrt{8a^5 - 4a^2} = \sqrt{4a^2 \cdot (2a^3 - 1)} = 2|a|\sqrt{2a^3 - 1}$$

$$\sqrt{32x^4 + 64x^6 - 160x^8} = \sqrt{16x^4 \cdot (2 + 4x^2 - 10x^4)} = 4x^2 \cdot \sqrt{2 + 4x^2 - 10x^4}$$

Rationalmachen des Nenners
Das Rationalmachen des Nenners beseitigt auftretende Wurzelterme im Nenner. Kommt dabei nur ein Wurzelterm im Nenner vor, so führt einfaches Erweitern mit dem Nenner zum Ziel. Bei einer Summe/Differenz aus Wurzeltermen hingegen ist die 3. Binomische Formel hilfreich.

Beispiel 2.6

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

2.4 Potenzen und n-te Wurzeln

Die Potenz a^n ist die abkürzende Schreibweise für das Produkt aus n gleichen Faktoren a. Man bezeichnet a als die Basis und n als den Exponent der Potenz.

$$\boxed{\text{Potenz } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}}$$

Eine Erweiterung des Potenzbegriffs auf negative ganzzahlige Exponenten erfolgt durch die beiden Regeln:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0, n \in \mathbb{N}) \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0).}$$

Etwas anspruchsvoller erscheint die Frage, wie man mit rationalen Exponenten verfährt. Hierzu führen wir zuerst den Begriff der *n-ten Wurzel* ein.

Definition 2.3
Die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$ heißt *n-te Wurzel* aus a (kurz: $\sqrt[n]{a}$).

Beispiel 2.7

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \text{da } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}, \quad \text{da } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Da das n-malige Multiplizieren von $\sqrt[n]{a}$ wieder a ergibt, also

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{-mal}} = a$$

hat man unter Berücksichtigung von Satz 2.2 ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$) den folgenden Zusammenhang zwischen n-ter Wurzel und Potenzdarstellung:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.}$$

Für das Rechnen mit Potenzen sind die folgenden Potenzgesetze von Bedeutung.

Satz 2.2 (Potenzgesetze)
Seien $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ sowie $n, m \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$, $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

Anmerkung 2.1

1. Diese Potenzgesetze sind auch für beliebige reelle Exponenten gültig. Auf weitere Ausführungen hierzu verweisen wir auf [23].
2. Für beliebige reelle Basen ($a, b \in \mathbb{R}$) sind durch rationale Exponenten Konflikte vorprogrammiert. Betrachten wir hierzu die beiden Potenzen $(-8)^{\frac{1}{3}}$ sowie $(-16)^{\frac{1}{4}}$. Die erste Potenz ist diejenige Zahl, die 3-mal mit sich selbst multipliziert -8 ergibt,[2] also -2. Die zweite Potenz ist nicht als reelle Zahl darstellbar, da das 4-malige Multiplizieren einer beliebigen Zahl stets eine positive Zahl ergibt.

Anhand der folgenden Beispiele setzen wir uns jetzt konkret mit den Potenzgesetzen auseinander. Auftretende Wurzelterme werden dabei zuerst in die entsprechenden Potenzen verwandelt.

Beispiel 2.8

$$\frac{(mn)^3 p}{(mp)^3 n^4} = \frac{m^3 n^3 p}{m^3 p^3 n^4} = m^{3-3} n^{3-4} p^{1-3} = n^{-1} p^{-2} = \frac{1}{np^2}$$

$$\frac{(2p)^{-2}}{(3q)^{-4}} : \frac{(8p^2)^{-1}}{(9q)^2} = \frac{2^{-2} p^{-2}}{3^{-4} q^{-4}} \cdot \frac{9^2 q^2}{8^{-1} p^{-2}} = 13.122 p^{-2-(-2)} q^{2-(-4)} = 13.122 q^6$$

$$\frac{\sqrt[4]{2^6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^4}} = \frac{2^{\frac{6}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{6}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 2^0 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^9 y}}{\sqrt[4]{x^{12} y}}\right)^3 = \left(\frac{(x^9 y)^{\frac{1}{3}}}{(x^{12} y)^{\frac{1}{4}}}\right)^3 = \frac{x^9 y}{x^9 y^{\frac{3}{4}}} = x^{9-9} y^{1-\frac{3}{4}} = y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$$

[2] Der äquivalente Ausdruck von $(-8)^{\frac{1}{3}}$ als Wurzel lautet formal korrekt $-\sqrt[3]{8}$. Die Schreibweise $\sqrt[3]{-8}$ ist aufgrund des negativen Radikanden nicht korrekt, auch wenn herkömmliche Taschenrechner damit keine Probleme haben.

2.5 Logarithmen

Mit dem Radizieren sind wir in der Lage, Gleichungen des Typs $x^a = b$ zu lösen: $x = \sqrt[a]{b}$, $b \geq 0$. Umgekehrt stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung

$$a^x = b$$

was uns zum Begriff des Logarithmus führt.

Definition 2.4
Man bezeichnet die Lösung der Gleichung $a^x = b$ $(a, b > 0;\ a \neq 1)$ als den *Logarithmus* von b zur Basis a und schreibt hierfür:

$$x = \log_a b.$$

Der Logarithmus $\log_a b$ (gewöhnliche Taschenrechner sind mit einer entsprechenden Taste $\boxed{\log_a b}$ ausgestattet) ist also diejenige Zahl, mit der man die Basis a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Unmittelbar leiten sich aus der Definition folgende einfache Regeln ab:

$$\boxed{\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1 \qquad \log_a a^r = r.}$$

Beispiel 2.9

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{wegen } 2^3 = 8$$
$$\log_5 \frac{1}{625} = -4 \quad \left(\text{wegen } 5^{-4} = \frac{1}{625}\right)$$

Für einige besondere Logarithmen sind folgende Abkürzungen üblich.

1. $\lg b$: Zehnerlogarithmus (Logarithmus von b zur Basis 10)
2. $\ln b$: natürlicher Logarithmus (Logarithmus von b zur Eulerschen Zahl e)

Beim Rechnen mit Logarithmen spielen die folgenden Logarithmengesetze eine wichtige Rolle, die mittels Potenzgesetze relativ einfach bewiesen werden können. Darauf wollen wir jedoch verzichten und stattdessen konkrete Beispiele durchrechnen.

Satz 2.3 (Logarithmengesetze)
Für $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sowie $a \neq 1$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a (b^r) = r \cdot \log_a b$.

Beispiel 2.10

$$3\log_b x + 2\log_b y - 4\log_b z = \log_b x^3 + \log_b y^2 - \log_b z^4 = \log_b \left(\frac{x^3 y^2}{z^4}\right)$$

$$\begin{aligned} 2 + \log_b p^2 + \log_b q^2 &= \log_b b^2 + \log_b p^2 + \log_b q^2 \\ &= \log_b (b^2 p^2 q^2) = 2\log_b (bpq) \end{aligned}$$

$$-4 \cdot \underbrace{\log_b b}_{1} + \underbrace{\log_b 1}_{0} + \frac{1}{2} \underbrace{\log_b b^3}_{3} = -4 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = -2{,}5$$

2.6 Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen
Gleichungen haben generell die Form: *linke Seite* = *rechte Seite*, z. B.:

$$\underbrace{4x - 7}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{x^3 + 2x + y}_{\text{rechte Seite}}.$$

Durch Einsetzen bestimmter Werte für die vorkommenden Variablen einer Gleichung erhält man eine *wahre* bzw. *falsche* Aussage. Fasst man alle möglichen Variablenbelegungen in einer Menge zusammen, so erhält man die *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ einer Gleichung. Bevor eine Gleichung systematisch gelöst wird, ist es wichtig, diejenigen Variablenbelegungen zu ermitteln, die in der gegebenen Gleichung überhaupt verwendet werden dürfen. Man spricht hier von der *Definitionsmenge* $\mathbb{D}$ der Gleichung.

Beispiel 2.11 In der Gleichung $x^2 = 3$ dürfen für die einzige Variable x alle beliebigen reellen Zahlen eingesetzt werden. Daher ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. Durch einfaches Radizieren erhält man die beiden Lösungen $x_1 = -\sqrt{3}$ und $x_2 = \sqrt{3}$. Damit hat man als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

In der Regel hat man Gleichungen, die weitaus komplexer als das eben erwähnte Beispiel sind. Für die Bestimmung der Lösungsmenge wird hierbei durch *äquivalente Umformung* eine *äquivalente Gleichung* ermittelt.

Definition 2.5
Man bezeichnet zwei Gleichungen als *äquivalent* (in Zeichen $\Longleftrightarrow$), wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Ist die Lösungsmenge einer Gleichung A eine Teilmenge einer anderen Gleichung B, so sagt man, dass Gleichung A Gleichung B *impliziert* (in Zeichen $\Longrightarrow$).

Beispiel 2.12 Die Gleichungen A: $3x = 9$ und B: $30x = 90$ sind äquivalent ($3x = 9 \Longleftrightarrow 30x = 90$), da ihre Lösungsmenge jeweils $\mathbb{L} = \{3\}$ ist.

Im Gegensatz dazu sind die Gleichungen $C: x = 10$ und $D: x^2 = 100$ nicht äquivalent, da $\mathbb{L}_C = \{10\} \subset \mathbb{L}_D = \{\pm 10\}$ ist. Also impliziert Gleichung C Gleichung D ($x = 10 \Longrightarrow x^2 = 100$).

In der folgenden Regel klären wir, welche Umformungen als äquivalent gelten.

Regel 2.2 (Äquivalenzumformungen)
Die Lösungsmenge einer Gleichung wird durch folgende, jeweils auf beiden Seiten einer Gleichung ausgeführte Operationen nicht verändert:

1. Addition und Subtraktion einer beliebigen reellen Zahl (bzw. eines Terms)
2. Multiplikation und Division mit einer von Null verschiedenen beliebigen reellen Zahl (bzw. eines Terms).

Diese Operationen bezeichnet man auch als Äquivalenzumformungen.

Mit den Äquivalenzumformungen wird also eine Gleichung soweit in eine äquivalente Gleichung umgeformt, bis die Lösungsmenge direkt ersichtlich ist. Bei einer Gleichung mit einer Variablen (z. B. x) hat man am Ende der Umformungen die Variable *isoliert* auf einer Seite.

Beispiel 2.13 Wir bestimmen die Lösungsmenge der Gleichung

$$3(x^2 + x - 1) + x = (x + 1)^2 + 2x^2 - 5$$

http://www.springer.com/978-3-662-45226-4

Mathematik für die berufliche Oberschule
Schneider, W.
2015, XI, 402 S. 191 Abb., 35 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-45226-4