2. Vorgriechische Mathematik

Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften überhaupt, zusammen mit der Astronomie, die für Religion (Sonnwendfeiern; vgl. auch Stonehenge), Landwirtschaft (Festlegung der Saatzeiten[1]) und die Seefahrt (Orientierung auf hoher See) unerlässlich war. Die Anfänge der Mathematik liegen im Zählen, und es gibt sehr alte Knochen, auf denen mithilfe von Einkerbungen Zahlen festgehalten wurden; das berühmteste Beispiel ist der Knochen von Ishango, der 1960 im damaligen Belgisch-Kongo entdeckt wurde und der vermutlich mehr als 20 000 Jahre alt ist.[2]

Die Tatsache, dass dieser Knochen Gruppierungen von 11, 13, 17 und 19 Kerben zeigt, hat manche Zeitgenossen vermuten lassen, dass damals schon der Begriff von Primzahlen bekannt war. Generell sollte man sich vor derart kühnen Schlussfolgerungen allerdings hüten. Vielleicht sollten wir mit der Behauptung zufrieden sein, dass die Menschen vor 20 000 Jahren den Zahlenraum bis 20 erobert hatten, und selbst dabei muss man sich vor Augen halten, dass diese Schlussfolgerung voraussetzt, die Kerben würden mehr repräsentieren als bloße Dekoration.

Wie viel Mathematik in die Planung von Großbauten wie Stonehenge oder die Pyramiden von Gizeh geflossen ist, wissen wir nicht; klar ist nur, dass kein Pharao auf die Idee gekommen wäre, sich an ein derartiges Riesenbauwerk zu wagen, ohne einen seiner Schreiber ausrechnen zu lassen, wie lange dies dauern würde. Teile der dazu notwendigen Mathematik hat man in alten Papyri oder in Inschriften an Tempeln gefunden, die die Jahrtausende überdauert haben, aber das meiste dürfte verloren gegangen sein.

Relativ genau Bescheid wissen wir über die mathematischen Leistungen der Griechen um 300 v.Chr., weil deren Bücher sich durch regelmäßige Abschriften bis heute erhalten haben. Weil mancher Schreiber sich für schlauer gehalten hat als den jeweiligen Autor, hat er Passagen, die ihm unverständlich waren, beim Abschreiben „verbessert“, mit dem Ergebnis, dass manche Stellen heute nur fehlerhaft erhalten oder gar vollständig korrumpiert sind. Jedenfalls kennen wir aus diesen Büchern (und vor allem aus später verfassten Kommentaren zu diesen Büchern) diejenigen Namen, die auch heutigen Schülern noch bekannt sind: Thales, Pythagoras, und

[1] In [64, S. 13] findet man ein Bild der rekonstruierten Kreisgrabenanlage von Goseck in Sachsen-Anhalt, die um 4800 v.Chr. gebaut wurde. Solche Bauten erlaubten die exakte Bestimmung der Jahreszeit aus dem Stand der Sonne, und man glaubt, dass sie Bauern zur Bestimmung der Saatzeiten gedient haben.

[2] Der Knochen kann im Royal Belgian Institute of Natural Sciences in Brüssel bewundert werden. Bilder findet man im Internet und in [122, S. 26–27].

F. Lemmermeyer, *Mathematik à la Carte,* DOI 10.1007/978-3-662-45270-7_2,
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Euklid. Dass wir über die Mathematik der Germanen[3] nichts wissen, liegt neben der Tatsache, dass ihre Gesellschaft wohl keine Klasse ernährt hat, die sich dem Nachdenken widmen konnte, am vollständigen Fehlen schriftlicher Zeugnisse aus dieser Kultur. Eine – wenn nicht *die* – Kultur, über die wir relativ genau Bescheid wissen, obwohl sie sehr alt ist, ist die der Babylonier.

Den Großteil unseres Wissens über die Völker, die Babylon bewohnten, verdanken wir dem Umstand, dass die von ihnen benutzte Keilschrift traditionell in Tontafeln geritzt wurde, die dann in der Sonne trockneten und teilweise die Jahrtausende überdauerten.

An dieser Stelle möchte ich die antiquarisch erhältlichen Büchlein [55, 56] von Johannes Lehmann (1922–1995) wärmstens empfehlen, ebenso wie P. Mäders Buch [57]. Auf etwas höherem Niveau, aber für gute Schüler durchaus noch lesbar, gibt es die Reihe „Vom Zählstein zum Computer“, in der bereits einige Bände ([47, 61, 62, 64, 65]) erschienen sind. Wer englische Bücher lesen kann, ist auch mit Rudmans Buch [60] sehr gut beraten.

2.1 Die Babylonier

Die Wiege der westlichen Kultur[4] liegt in Babylon, einer Stadt im fruchtbaren „Land zwischen den Flüssen“ (griech.: Mesopotamien) Euphrat und Tigris, die etwas südlich des heutigen Bagdad im Irak gelegen hat (Bagdad liegt am Tigris, Babylon lag am Euphrat). Wir alle kennen Babylon aus der Bibel, wo diese Stadt beim Turmbau zu „Babel“ und der Entstehung der verschiedenen Sprachen eine zentrale Rolle spielt.

Die Verbindung zwischen Babylon und der Bibel ist weit enger als die wenigen Fakten oben erahnen lassen. Die Schöpfungsgeschichte der Babylonier (vgl. [13]), oft Enuma Elish genannt nach den beiden ersten Wörtern dieser Sage, zeigt große Parallelen mit derjenigen in der Bibel. Es gab 10 Urväter, deren Regierungszeiten länger als 10 000 Jahre dauerten (auch die ersten 10 Menschen der Bibel lebten fast 1000 Jahre lang; Adam wurde 930, Methusalem brachte es auf 969 Jahre); es gab eine Sintflut, aus der sich nur der fromme Xisuthros (auch Atrachasis oder Utnapischti genannt) mit seiner Familie auf einem Boot retten konnte; Xisuthros erklärte Gilgamesch, wie man durch das Essen einer bestimmten Pflanze unsterblich werden könne, aber die Pflanze wurde von einer Schlange gefressen während Gilgamesch schlief. 5000 Jahre vor Christus beginnt dann die „eigentliche“ Geschichtsschreibung mit der Gründung des ersten Reiches durch Mesannipada in Ur, der Stadt, die in der Bibel zur Heimatstadt Abrahams wurde.

[3] Es sind Steine erhalten, in die Dodekaedermuster eingeritzt waren; hier bleibt natürlich die Frage, ob es sich dabei in erster Linie um Kunst gehandelt hat oder ob man solche Leistungen auch der Mathematik zuordnen darf.

[4] Die „westliche Kultur“ ist sicherlich ein mutiger Begriff, heute wie damals. Auch in der Antike gab es einen regen Austausch von Waren zwischen dem Mittelmeerraum und Indien und China, und auch mathematisches Wissen wurde, vor allem nach den Feldzügen von Kyros II (ca. 590–530 v.Chr.) und Alexander dem Großen (356–327 v.Chr.), in beide Richtungen transportiert.

Die erste Hochkultur Babylons, von der wir wissen, ist die der Sumerer. Diese hatten eine Keilschrift[5] entwickelt, die von den Akkadiern übernommen wurde, als diese das sumerische Reich einnahmen. Einer der bekanntesten Herrscher Babylons war Hammurapi (etwa 1792–1750 v. Chr.). Babylon beherbergte eines der 7 antiken Weltwunder, die hängenden Gärten der Semiramis (auch wenn sich Historiker darüber streiten, ob es diese wirklich gegeben hat: Relikte sind jedenfalls keine vorhanden). Später, nämlich 323 v. Chr., starb Alexander der Große in Babylon.

Das Zahlensystem der Babylonier war auf der 60 aufgebaut (und heißt deswegen Sexagesimalsystem); Erinnerungen an ein solches System wecken bei uns die Wörter Dutzend für 12, sowie die inzwischen praktisch ausgestorbenen Wörter Schock für 60 und Gros für 120. Die Tatsache, dass der Vollwinkel 360° beträgt, sowie dass man eine Stunde in 60 Minuten und eine Minute in 60 Sekunden einteilt, geht auf die Babylonier zurück. Von der Größenordnung her sind die 360 und die 12 Zahlen, die an den Kalender erinnern: Das Jahr besteht aus 365 Tagen, folglich bewegt sich die Sonne pro Tag etwa 1/360 des Vollwinkels durch die Sternbilder; diesen Teil hat man 1 Grad genannt. Die Zahl der Monate ist ebenfalls 12, wobei die Monatslänge durch den Mond festgelegt ist: Es ist der Zeitraum zwischen zwei Vollmonden.

Die Keilschrift

Die Zahlen der Sumerer wurden in einem Stellenwertsystem geschrieben, d.h. der Platz, an dem eine Ziffer steht, legt ihren Wert fest. Die Sumerer kamen mit zwei Ziffern aus: Ein vertikaler Strich mit Einkerbung bedeutete eine 1, ein waagrechte Kerbe eine 10:

 steht für die 1,  für die 10.

Andere Zahlen unterhalb von 60 wurden additiv aus diesen beiden zusammengesetzt:

23 ist , 57 ist .

Die 60 hatte das gleiche Symbol wie die 1, und da die alten Babylonier noch kein Symbol für die 0 hatten, kann man deren 60 nicht von 1 oder 3600 oder auch von $\frac{1}{60}$ usw. unterscheiden (außer durch den jeweiligen Kontext). Um nun etwa 84 zu schreiben, zerlegt man diese Zahl in $84 = 60 + 24$ und findet, dass das babylonische Symbol für 84 gleich  ist.

Aufgabe 2.1. *Wandle folgende Zahlen ins Dezimalsystem um:* , , .

[5] Die Sprache der Sumerer wurde bis etwa 1700 v.Chr. gesprochen und hat dann noch weitere eineinhalb Jahrtausende als Sprache der Religion und der Wissenschaften gedient. Sumerisch ist mit keiner anderen bekannten Sprache verwandt. Als die Akkadier nach Mesopotamien kamen, übernahmen sie zwar die Keilschrift der Sumerer, aber nicht ihre Sprache: Weniger als 10 % ihres Wortschatzes wurden aus dem sumerischen entlehnt.

Der Kalender

Teilt man einen Monat in vier Teile (dies entspricht den vier Mondphasen Neumond, zunehmender Mond, Vollmond und abnehmender Mond), so erhält man die Woche aus sieben Tagen (in der Antike waren auch Wochen von 4 bis zu 10 Tagen gebräuchlich in dem Sinne, dass die Woche der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Markttagen war). Jeder Stunde des Tags war ein Wächter zugeordnet, und jeder Tag wurde nach dem Wächter der ersten Stunde benannt. Diese Wächter waren die Planeten (Wandelsterne), nämlich (in der Reihenfolge abnehmender Umlaufsdauern) Saturn, Jupiter, Mars, Sonne, Venus, Merkur und Mond. Die erste Stunde des Sonntags wurde also von der Sonne bewacht, die erste Stunde des darauffolgenden Tags vom Mond ($24 = 3 \cdot 7 + 3$, d.h. es wird immer um drei Plätze weitergezählt), dann Mars, Merkur, Jupiter, Venus, Saturn.

Die Namen der Planeten, zusammen mit Sonne und Mond, gaben also den sieben Wochentagen die Namen; die deutschen Namen wurden der nordischen Götterwelt entlehnt:

deutsch	französisch	englisch	Planet / Gottheit
Sonntag	dimanche	sunday	Sonne
Montag	lunedi	monday	Mond
Dienstag	mardi	tuesday	Mars / Tiw
Mittwoch	mercredi	wednesday	Merkur / Wotan
Donnerstag	jeudi	thursday	Jupiter / Donar, Thor
Freitag	vendredi	friday	Venus / Fria
Samstag	samedi	saturday	Saturn

Tiw bzw. Tiu war der Schutzgott des Things, und sein Tag war bei den Germanen der Gerichtstag. Der deutsche Name Dienstag kommt vermutlich von Thingstag. Frija = Frigg war die Gemahlin Wotans. Das Wort Samstag (frz. samedi) ist ebenso wie das spanische *el sabado* aus dem Wort Sabbat entstanden. Das französische *dimanche* kommt wie das spanische *domingo* von *dies domini*, lateinisch für „Tag des Herrn“.

Der ursprüngliche Kalender der Römer, der König Numa zugeschrieben wurde, war ein Mondkalender, der aus 12 Monaten (Monden) mit insgesamt 355 Tagen bestand. Der Vollmond wurde auf die Mitte jedes Monats gelegt, den Iden. Alle anderen Tage wurden von den Iden ab gezählt. Am Beginn der Monate (den *calendae*) war die aufgehende Sichel des Mondes zu sehen. Zum Ausgleich für das zu kurze Jahr wurde hin und wieder ein Schaltmonat von 22 oder 23 Tagen am Jahresende zwischen Februar und März (der Jahresanfang war nämlich der 1. März) eingefügt. Allerdings gab es dafür keine festen Regeln: Die Schaltmonate wurden von den *pontifices* eingefügt, die damit die Macht hatten, Amtszeiten zu verlängern oder zu verkürzen und die dies auch ausgenutzt haben. Die zehn Monate hießen *mensis Martius, Aprilis, Maius, Iunius, Quintilis, Sextilis, September, October, November*, und *December*, unter König Numa kamen später *Januarius* und *Februarius* dazu.

Gaius Iulius Caesar reformierte den Kalender 46 v. Chr. (im römischen Sprachgebrauch war dies das Jahr 708 *ab urbe condita*, also seit Gründung der Stadt Rom) mit Hilfe eines Astronomen, den er aus Alexandria kommen ließ. Caesar führte das Sonnenjahr mit 365 Tagen und alle vier Jahre einen Schalttag ein, und zwar nach dem 24. Februar. Die Römer benannten 44 v.Chr. Caesars Geburtsmonat Quintilis nach ihm (Iulius), und 8 v.Chr. gaben sie dem Sextilis den Namen Augustus. Auch spätere Kaiser nahmen sich das Recht, Monate umzutaufen: Caligula gab dem September z.B. den Namen seines Vaters, Germanicus, was sich aber, wie viele andere Namen, nicht durchsetzen konnte.

Um eine Zahl aus dem Dezimalsystem, z.B. 8000, in das Sexagesimalsystem umzuwandeln, geht man wie folgt vor. Man beginnt mit der Beobachtung, dass $60^2 < 8000 < 60^3$ ist; also prüft man, wie oft 60^2 in 8000 enthalten ist, und findet

$$8000 = 2 \cdot 60^2 + 800.$$

Jetzt ist $800 = 13 \cdot 60 + 20$ und damit $8000 = 2 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 20$, also

$$8000 = 2; 13; 20 =$$ .

Aufgabe 2.2. *Wandle die Dezimalzahlen* 1234, 4321, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ *und* $\frac{1}{10}$ *in das Sexagesimalsystem um. Was passiert, wenn man* $\frac{1}{7}$ *umwandelt?*

Die Quadratwurzel von 2

Ein kleines Täfelchen[6] aus der Yale-Sammlung enthält ein Quadrat samt Diagonalen. Eingeritzt sind die Zahlen 30 an der Seite des Quadrats, sowie

$$1; 24; 51; 10:$$ 

und

$$42; 25; 35:$$ .

Die Zahl

$$1; 24, 51, 10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30\,547}{21\,600} = 1,41421\overline{296}$$

ist nichts anderes als eine Approximation der Quadratwurzel aus 2:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872 4\ldots$$

Die babylonische Näherung liegt zwischen

$$\frac{30\,546}{21\,600} = 1,4141\overline{6} \qquad \text{und} \qquad \frac{30\,548}{21\,600} = 1,414\overline{259},$$

gibt also die ersten drei Nachkommastellen von $\sqrt{2}$ im Dezimalsystem korrekt an.

[6] Der genaue Name ist YBC 7289, aus der „Yale Babylonian Collection“. Die vollständigste Sammlung und Besprechung mathematischer Keilschrifttexte findet man in dem monumentalen Buch [49] von Friberg.

Periodische Dezimalbrüche

In den Zeiten, als Taschenrechner noch Mangelware waren, wussten Schüler, welche Brüche man als abbrechende Dezimalbrüche schreiben kann und welche nicht: So sind $\frac{1}{2} = 0,5$ und $\frac{2}{5} = 0,4$ abbrechend, während $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$ eine nicht abbrechende (aber immerhin periodische) Dezimalentwicklung besitzt. Auch $\frac{1}{8}$ hat eine abbrechende Dezimalentwicklung, weil $\frac{1}{8} = \frac{125}{8\cdot 125} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$ sich zu einem Bruch erweitern lässt, dessen Nenner einer Zehnerpotenz ist. Oder etwas anders gesagt: Aus einem abbrechenden Dezimalbruch wird eine ganze Zahl, wenn man ihn mit einer geeigneten Potenz von 10 multipliziert; aus $\frac{1000}{8} = 125$ folgt dann $\frac{1}{8} = 0,125$. Dies geht bei allen Brüchen, deren Nenner nur durch 2 und 5 teilbar sind, und offenbar auch nur bei diesen.

Die Dezimalentwicklung aller anderen Brüche ist periodisch, und umgekehrt lassen sich periodische Dezimalbrüche als Quotienten ganzer Zahlen schreiben: Wollen wir z.B. $x = 0,1343434\ldots$ als Bruch darstellen, so überlegen wir uns, dass $100x$ dieselbe Periode besitzt, woraus sich nach Subtraktion der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 100x &= \quad 13,43434\ldots \\ x &= \quad\ 0,13434\ldots \end{aligned}$$

ergibt, dass $99x = 13,3$ und folglich $x = \frac{133}{990}$ ist.

Die Tatsache, dass die Division durch Potenzen von 2 und 5 abbrechende Dezimalbrüche liefert, lässt sich bei Rechnungen vorteilhaft verwenden: So wird man z.B. $24\cdot 5$ so ausrechnen, dass man den ersten Faktor halbiert und den zweiten verdoppelt: $24 \cdot 5 = 12 \cdot 10 = 120$. Entsprechend ist $24 : 5 = 48 : 10 = 4,8$.

Gegenüber dem Dezimalsystem hat das babylonische Sexagesimalsystem den Vorteil, dass es viel mehr Brüche gibt, deren Entwicklung abbricht: Dies wird bei allen Brüchen der Fall sein, deren Nenner nur durch 2, 3 und 5 teilbar ist. Von den Brüchen mit Nenner bis zu 10 haben also nur diejenigen mit Nenner 7 eine nicht abbrechende (periodische) Sexagesimalentwicklung.

Da die Notation der Babylonier zwischen 1, 60 oder auch $\frac{1}{60}$ nicht unterschieden hat, war rechentechnisch gesehen eine Division durch 3 nichts anderes als eine Multiplikation mit 20. Ein sehr großer Teil der Divisionen ließ sich also problemlos in Multiplikationen verwandeln. Tatsächlich wurden viele Tontäfelchen mit Tabellen „reziproker Zahlen“ gefunden, die in etwa wie folgt begonnen haben:

2	30	8	7;30	16	3;45
3	20	9	6;40	18	3;20
4	15	10	6	20	3
5	12	12	5	24	2;30
6	10	15	4	25	2;24

Der Eintrag für 8 erklärt sich z.B. aus $\frac{3600}{8} = 450 = 7 \cdot 60 + 30$.

Um umgekehrt $\frac{1}{13}$ als periodischen Dezimalbruch zu schreiben, führt man entweder eine schriftliche Division aus oder man sucht die kleinste Zahl der Form $99\ldots9$, die durch 13 teilbar ist. Dies ist $999999 = 13 \cdot 76923$; damit ist

$$\frac{1}{13} = \frac{76923}{999999} = 0,\overline{076923}.$$

Im Sexagesimalsystem hat man entsprechend $60^4 - 1 = 13 \cdot 996923$, also wegen $996923 = 4 \cdot 60^3 + 36 \cdot 60^2 + 55 \cdot 60 + 23$

$$\frac{1}{13} = \overline{4;36;55;23}.$$

Multipliziert man die Seitenlänge 30 mit $\sqrt{2}$, oder, was im Sexagesimalsystem auf dasselbe hinausläuft, teilt man $\sqrt{2}$ durch 2, so erhält man die Länge der Diagonalen zu

$$[42, 25, 35] = \frac{30547}{720} \approx 42,4263888\ldots.$$

Manche Historiker vermuten, dass es sich bei dem Täfelchen um eine Übungsaufgabe eines Schreiberlehrlings gehandelt haben könnte.



YBC 7289; mit freundlicher Genehmigung von Bill Casselmann.

Wenn man beginnt, über dieses Täfelchen nachzudenken, wird man um einige Fragen nicht herumkommen:

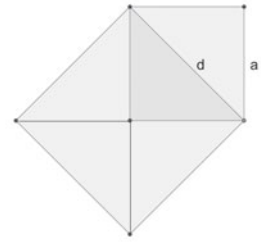
1. Wie konnten die Babylonier diese Näherung für $\sqrt{2}$ berechnen?
2. Warum muss man sich überhaupt mit Näherungen zufriedengeben und kann $\sqrt{2}$ nicht genau, z.B. als Bruch angeben?
3. Woher wussten die Babylonier, dass die Diagonale eines Quadrats $\sqrt{2}$-mal so lang ist wie die Seite?

Die Antwort auf die erste Frage kennen wir nicht; es ist aber zu vermuten, dass die babylonische Methode derjenigen ähnelt, die wir in Kap. 3 vorstellen werden. Die Übertragung der Methode ins Sexagesimalsystem ist dabei kein Problem. Auf der anderen Seite wissen wir aber, wie Heron von Alexandria Quadratwurzeln berechnet hat; dessen Methode werden wir ebenfalls in Kap. 3 vorstellen.

Auch die zweite Frage wurde, wie wir in Kap. 1 bereits gesehen haben, von den Griechen beantwortet: Die Pythagoreer konnten nämlich zeigen, dass es keinen Bruch $\frac{p}{q}$ gibt mit der Eigenschaft, dass $p^2/q^2 = 2$ ist. In ihrer Sprache haben sie das so ausgedrückt: Die Kante und die Diagonale eines Quadrats sind inkommensurabel. Das bedeutet, dass es keine auch noch so kleine Strecke s gibt, sodass sowohl d wie auch a ganze Vielfache von s sind; dies bedeutet, dass es natürliche Zahlen p und q gibt mit $d = ps$ und $a = qs$, was mit $\frac{d}{a} = \frac{p}{q}$ gleichbedeutend ist.

Die letzte Frage schließlich ist ebenfalls sehr interessant. Der von den Babyloniern angegebene Wert von $\sqrt{2}$ ist viel zu genau, als dass er durch Messung hätte gewonnen werden können: Die einzige Möglichkeit zu wissen, dass die Diagonale eines Quadrats das $\sqrt{2}$-Fache ihrer Seite ist, ist ein **Beweis**. In diesem Falle hätte die Überlegung in etwa so aussehen können (man beachte, dass die dazugehörige Skizze derjenigen auf dem Täfelchen ziemlich ähnlich sieht):

Das kleine Quadrat mit Kantenlänge a und Diagonale d besteht aus zwei gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken, das große Quadrat mit Kantenlänge d und Diagonale $2a$ dagegen aus vier solcher Dreiecke. Also hat das große Quadrat die doppelte Fläche des kleinen, und es ist $d^2 = 2a^2$, oder auch $d = a \cdot \sqrt{2}$.



Dass auch die Babylonier diese Überlegung gekannt haben könnten ist durchaus denkbar; Platon jedenfalls hat sie, wie wir in Kap. 1 gesehen haben, in seinem berühmten Dialog zwischen Sokrates und dem Sklaven Menons vorgestellt. Natürlich folgt diese Beobachtung auch aus dem Satz des Pythagoras; diesen haben die Babylonier definitiv gekannt (wenn auch vermutlich ohne Beweis). Danach ist ebenfalls $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

2.2 Plimpton 322: Pythagoreische Tripel

Eine ganz berühmte Tontafel[7] ist „Plimpton 322“ (s. Abb. 2.1), die eine ausführliche Tabelle von pythagoreischen Tripeln enthält, also Zahlen a, b, c mit $a^2+b^2 = c^2$. Der seltsame Name der Tafel rührt daher, dass es das Ausstellungsstück Nr. 322 in der Sammlung von G.A. Plimpton an der Columbia University ist. Plimpton hatte diese Tontafel nach 1920 gekauft und sie zusammen mit seiner ganzen Sammlung von Tontafeln der Columbia University vermacht. Geschrieben wurde die Tafel etwa 1800 v. Chr., sie hat das Format 13 cm × 9 cm und ist etwa 2 cm dick (vgl. [122, S. 34–35]).

In der ersten Zeile dieser Tontafel stehen, von rechts nach links, folgende Zahlen:

1. 169 119

Die erste Zahl gibt einfach die Zeilennummer an; die anderen beiden Zahlen 169 und 119 kennen wir aus Kap. 1: Sie gehören zu dem pythagoreischen Tripel $(119, 120, 169)$, deren Katheten sich um 1 unterscheiden. Die Zahl 120 sucht man allerdings vergeblich in dieser Zeile.

Die letzten Spalten der ersten drei Zeilen lauten im Sexagesimalsystem:

[7] Es soll hier nicht der Eindruck entstehen, als handelten alle babylonischen Tontafeln von Mathematik. Die Tafel W 20472,167 (Deutsches Archäologisches Institut, Berlin) enthält beispielsweise eine Auflistung von Getreidelieferungen zur Herstellung von Bier. Bei anderen wird deutlich, dass die Täfelchen von Schülern gemacht wurden: Es gibt falsch gelöste Übungsaufgaben ebenso wie Sprüchlein, wonach z.B. Schreiberlehrlingen das Schwätzen während des Unterrichts verboten ist. Und sogar kleine Witzchen haben die Jahrtausende überstanden, wie z.B. der folgende Dialog ([54]; ich kenne es aus [72, S. 6]):

Vater: Wo bist du gewesen?
Sohn: Nirgends.
Vater: Warum kommst du dann zu spät?

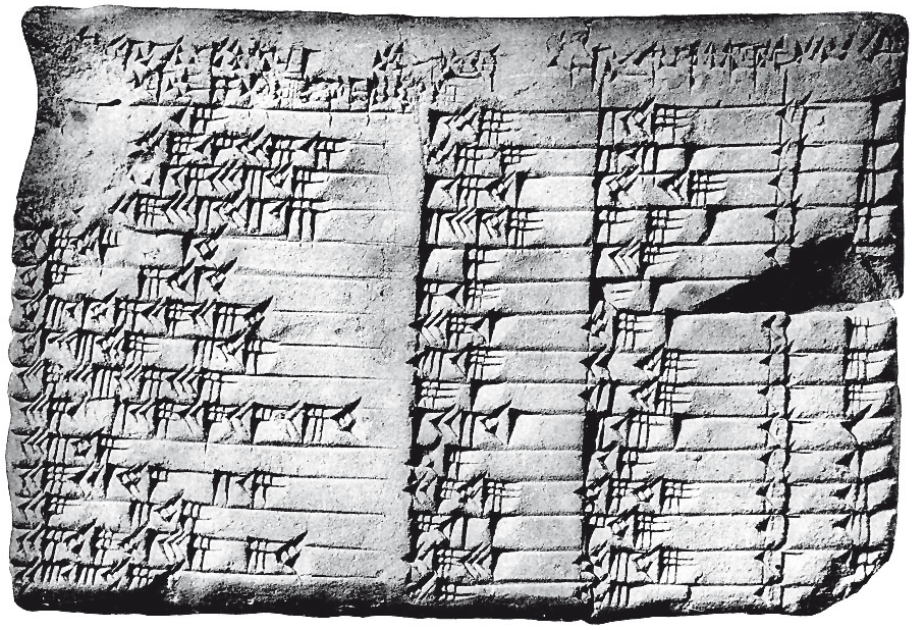


Abb. 2.1. Plimpton 322



In der folgenden „Übersetzung“ sind die abgesplitterten Teile sinngemäß ergänzt. Viele Fachleute glauben, dass am linken Rand eine (1) fehlt, weil die Tafel abgebrochen ist.

$(1);59;0;15$	$1;59$	$2;49$	1.
$(1);56;56;58;14;56;15$	$56;07$	$3;12;01$	2.
$(1);55;07;41;15;33;45$	$1;16;41$	$1;50;49$	3.

Im Dezimalsystem sieht das so aus:

428 415	119	169	1.
90 939 941 775	3367	11 521	2.
89 523 632 025	4601	6649	3.

Die erste und die dritte Zeile machen uns keine Schwierigkeiten: Dort ist, wie schon gesagt,

$$169^2 - 119^2 = 120^2 \quad \text{und} \quad \frac{169^2}{120^2} = \frac{428415}{60^3}.$$

Entsprechend erhält man in der dritten Zeile

$$6649^2 - 4601^2 = 4800^2,$$

und in der ersten Zeile steht die Sexagesimaldarstellung der Zahl

$$\frac{6649^2}{4800^2} = \frac{89523632025}{60^6}.$$

Dieses Muster zieht sich durch die ganze Tabelle: In der zweiten und dritten Spalte stehen die Zahlen b und c mit $a^2 + b^2 = c^2$, wobei a nicht angegeben ist, aber immer eine Zahl ist, deren Kehrwert eine abbrechende Sexagesimaldarstellung besitzt.

In der zweiten Zeile dagegen passt nichts zusammen: Dort ist $11521^2 - 3367^2$ kein Quadrat, und auch die Zahl in der ersten Spalte ist kein Quadrat eines Bruchs. Man nimmt an, dass die Zahl in Zeile 2 und Spalte 1 stattdessen

$$(1); 56; 56; 58; 14; 50; 06; 15 = 5456396484375$$

hätte heißen sollen, dass also der Schreiber aus den korrekten „Ziffern“ 50 und 06 durch Weglassen des Zwischenraums eine einzige Ziffer 56 gemacht hat. In diesem Falle stünde links das Quadrat

$$\frac{5456396484375}{60^7} = \frac{4825^2}{3456^2}.$$

Wegen $4825^2 - 3367^2 = 3456^2$ würde das in unser Bild passen, wenn wir in der 3. Spalte die $3; 12; 01 = 11521$ ersetzen durch $1; 20; 25 = 4825$.

Über diesen Fehler und die Interpretation von Plimpton 322 ist viel geschrieben worden; wirklich überzeugend scheint keine Theorie, die bisher aufgestellt worden ist. Man sollte sich aber klar machen, dass der Autor dieses Täfelchens, unter Umständen ein Schreiberlehrling, sicherlich nicht für die Ewigkeit geschrieben, sondern vielleicht nur seine Hausaufgaben etwas schlampig erledigt hat.

Auch die letzte Zeile enthält einen Fehler: Das pythagoreische Tripel $(90, 56, 106)$ ist nicht primitiv; teilt man die einzelnen Zahlen durch 2, erhält man das Tripel $(45, 28, 53)$. Die Tabelle gibt fälschlicherweise die Zahlen $(56, 53)$, die aus beiden Tripeln zusammengesetzt ist.

a	b	c		a	b	c		a	b	c	
120	119	169	1	360	319	481	6	60	45	75	11
3456	3367	4825	2	2700	2291	3541	7	2400	1679	2929	12
4800	4601	6649	3	960	799	1249	8	240	161	289	13
13500	12709	18541	4	600	481	769	9	2700	1771	3229	14
72	65	97	5	6480	4961	8161	10	45	28	53	15

http://www.springer.com/978-3-662-45269-1

Mathematik à la Carte
Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen
Lemmermeyer, F.
2015, XII, 201 S. 150 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45269-1